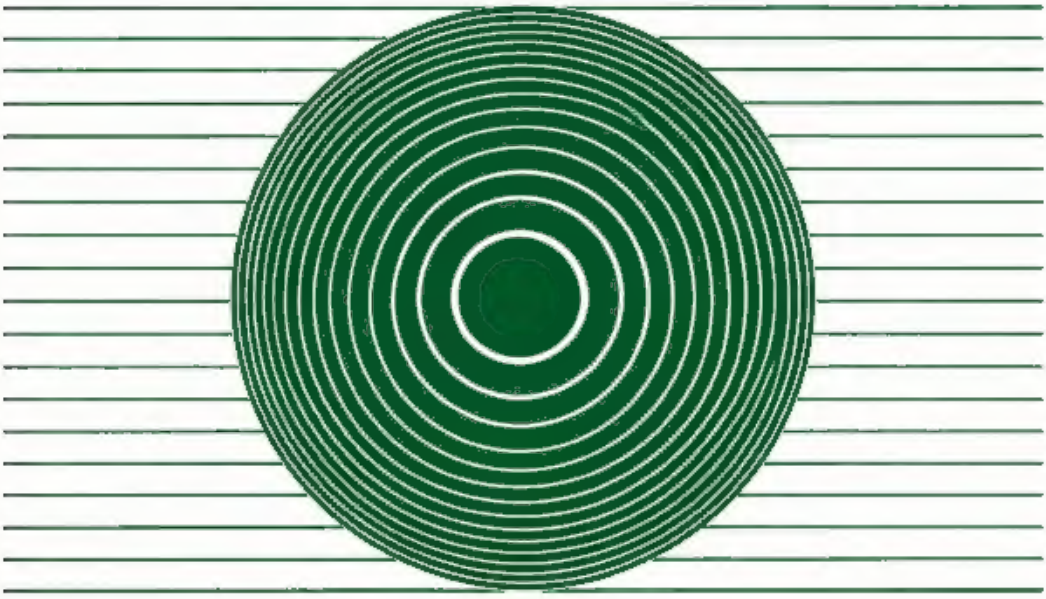
óptica



g.s. lándsberg

primer tomo

☐ interferencia de la luz ☐ difracción de la luz ☐ óptica geométrica (de rayos) ☐ polarización de la luz ☐ escala de ondas electromagnéticas

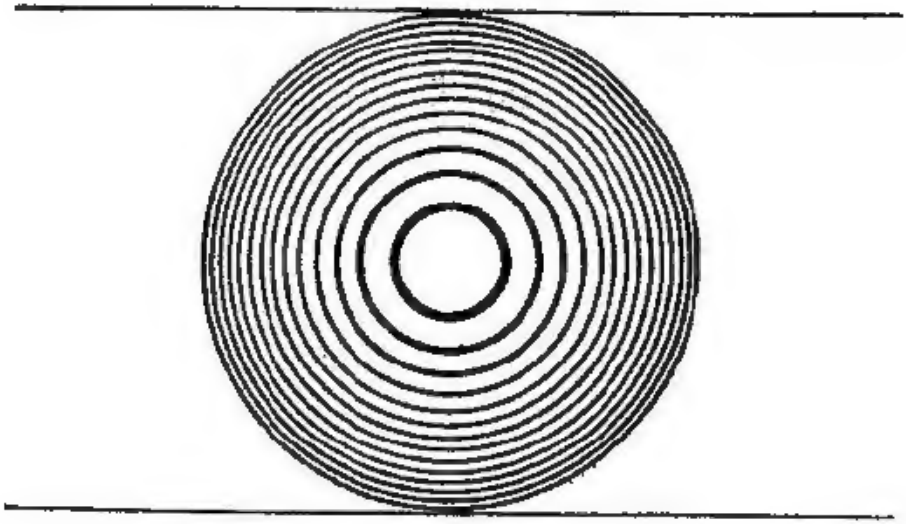
editorial mir moscú

En el libro se expone detalladamente, junto con los problemas de la óptica clásica del período anterior al descubrimiento del láser, los principios físicos y el empleo de la holografía, y, por supuesto, la estructura y la teoría de los láseres, la óptica no lineal y su empleo en diversas ramas de las ciencias naturales. Es esencial que los capítulos de la óptica, nuevos en principio, no están adicionados formalmente a los principios clásicos, sino que la exposición de estos últimos ha sido revisada y puesta en concordancia con las modernas nociones de la naturaleza de la luz y su interacción con su sustancia, siendo las intensidades luminosas grandes y pequeñas y diferentes los grados de su coherencia. Desde este punto de vista, o sea, de la síntesis orgánica de la óptica clásica y ultramoderna, el libro de G. Landsberg aún no tiene analogía entre los manuales de óptica en el mundo.

El manual está provisto de una enorme cantidad de problemas actuales de la óptica física, que representan sus principios físicos, lo suficientemente completo, y estimulan el trabajo independiente de los lectores del libro. El libro está destinado a los estudiantes de los centros de enseñanza superior.

ÓPTICA

Г. С. Ландсберг
ОПТИКА
Издательство «Наука»



óptica

G. S. Landsberg

Primer tomo

Editorial MIR Moscú

Traducido del ruso por Amado Augusto Espinosa Garrido
Licenciado en Ciencias Físicas

Impreso en la URSS

На испанском языке

© Издательство «Наука». 1976
© Traducción al español. Editorial Mir. 1983

INDICE

INTRODUCCION

1. Breve introducción histórica 9

§ 1. Leyes fundamentales de la óptica (9). § 2. Etapas más importantes del desarrollo de las teorías ópticas (13).

2. Ondas 22

§ 3. Formación de ondas. Ecuación de la onda (22). § 4. Oscilaciones y ondas monocromáticas. Concepto sobre el desarrollo de Fourier (28). § 5. Energía transmitida por la onda electromagnética (34). § 6. Clasificación de las ondas. Concepto de la polarización de las ondas (37).

3. Conceptos fotométricos y unidades 41

§ 7. Conceptos fundamentales (41). § 8. Paso de las magnitudes energéticas a las luminosas (49). § 9. Unidades de mediciones fotométricas (51). § 10. Mediciones fotométricas (fotometría) (55)

INTERFERENCIA DE LA LUZ

4. Coherencia 61

§ 11. Introducción (61). § 12. Conceptos sobre la coherencia. Interferencia de oscilaciones (61). § 13. Interferencia de ondas (64). § 14. Obtención de ondas coherentes en la óptica (68). § 15. Características fundamentales de los esquemas interferenciales (71). § 16. Diferentes esquemas de interferencia (76). § 17. Importancia de las dimensiones de la fuente de luz. Coherencia espacial (81) § 18. El rol de la polarización en la interferencia de ondas transversales (87). § 19. Paradojas aparentes en los fenómenos de interferencia de ondas (88). § 20. Camino óptico. Tautocronismo de los sistemas ópticos (90). § 21. Interferencia de haces luminosos no monocromáticos (94). § 22. Luz parcialmente coherente (95).

5. Ondas luminosas estacionarias 115

§ 23. Formación de ondas estacionarias. Experimentos de Wiener (115). § 24. Fotografía en colores según el método de Lippmann (121).

6. Localización de las franjas de interferencia 123

§ 25. Colores de las láminas delgadas (123). § 26. Los anillos de Newton (129). § 27. Interferencia en láminas planoparalelas. Franjas de igual inclinación (131).

7. Interferómetros y aplicación de la interferencia 135

§ 28. Interferómetro de Jamin (135). § 29. Interferómetro de Michelson (139). § 30. Interferómetros con haces luminosos reiteradamente divididos (140). § 31. Interferencia en el caso de una gran diferencia de recorrido (147). § 32. Algunas aplicaciones de los métodos interferenciales de investigación (150).

DIFRACCIÓN DE LA LUZ

8. El principio de Huygens y su aplicación 156

§ 33. El principio de Huygens—Fresnel (156). § 34. Placa zonal (162). § 35. Cálculo gráfico de la amplitud resultante (165). § 36. Problemas elementales de difracción (168). § 37. La espiral de Cornu y su utilización para la resolución gráfica de los problemas de difracción (174). § 38. Observaciones sobre el principio de Huygens—Fresnel (177).

9. Difracción de haces paralelos (difracción de Fraunhofer) 181

§ 39. Difracción de Fraunhofer por una rendija (181). § 40. Influencia del ancho de la rendija en el cuadro de difracción (188). § 41. Influencia de las dimensiones de la fuente de luz (189). § 42. Difracción por orificios circulares y rectangulares (191). § 43. Los haces de Gauss (194). § 44. Difracción por dos rendijas (202). § 45. Interferómetro de Rayleigh. Medición del diámetro angular de las estrellas (204). § 46. Red de difracción (210). § 47. Incidencia oblicua de los rayos sobre la red (216). § 48. Redes fásicas (218). § 49. Escalón de Michelson (221). § 50. Características de los aparatos espectrales, sus semejanzas y diferencias (224). § 51. Rol del aparato espectral en el análisis del impulso luminoso (232).

10. Difracción en estructuras multidimensionales 237

§ 52. La red de difracción como una estructura unidimensional (237). § 53. Difracción en estructuras bidimensionales (238). § 54. Fenómenos de difracción en estructuras tridimensionales (240). § 55. Difracción de rayos X (244). § 56. Difracción de ondas luminosas por ondas ultraacústicas (245).

11. Holografía 249

§ 57. Introducción (249). § 58. Holografía de una onda plana (251). § 59. Holografía de una onda esférica (253). § 60. Hologramas de Fresnel de objetos tridimensionales (256). § 61. Holograma como elemento de un sistema óptico ideal. Obtención de imágenes ampliadas (263). § 62. Hologramas de Fourier (269). § 63. Poder separador de los sistemas holográficos (272). § 64. Calidad de las imágenes holográficas (275). § 65. Hologramas estereoscópicos (método de Denisiuk) (278). § 66. Imágenes holográficas en colores (281). § 67. Aplicación de la holografía. Interferometría holográfica (282).

OPTICA GEOMÉTRICA (DE RAYOS)

12. Fundamentos de la óptica de rayos 288

§ 68. Introducción (288). § 69. Principio de Fermat (290). § 70. Definiciones fundamentales. Ley de refracción y reflexión. El principio de reciprocidad (293). § 71. Refracción (y reflexión) en una superficie esférica (297). § 72. Focos de la superficie esférica (299). § 73. Imagen de objetos pequeños obtenida en el caso de refracción en una superficie esférica (301). § 74. Aumento. Teorema de Lagrange—Helmholtz (302). § 75. Sistema óptico centrado (305). § 76. Refracción en la lente. Fórmula general de la lente (306). § 77. Distancias focales de la lente delgada (308). § 78. Construcción de la imagen en la lente delgada. Aumento (310). § 79. Sistemas ópticos ideales (312).

13. Aberraciones de los sistemas ópticos 321

§ 80. Introducción (321). § 81. Superficie cáustica. Carácter de su simetría (322). § 82. Aberraciones originadas por haces anchos de rayos (322). § 83. Aberraciones producidas por finos haces oblicuos extraxiales de rayos (326). § 84. Astigmatismo producido por la asimetría del sistema (329). § 85. Aplanatismo. Condición de los senos (330). § 86. Aberraciones originadas por la variación del índice de refracción en función de la longitud de onda (aberraciones cromáticas) (333).

14. Instrumentos ópticos 340

§ 87. El rol del diafragma (340). § 88. Diafragma de apertura, pupila de entrada y de salida (341). § 89. Diafragma del campo visual. Escotillas (344). § 90. Aparato fotográfico. § 91. El ojo como sistema óptico (348). § 92. Instrumentos ópticos que mejoran la visión (352). § 93. Instrumentos de proyección (359). § 94. Aparatos espectrales (360). § 95. Percepción de la luz. «Anteojo videonocturno» de M. V. Lomonósov (364).

15. Teoría de difracción de los instrumentos ópticos 370

§ 96. Poder separador del objetivo (370). § 97. Poder separador del microscopio (373). § 98. Microscopio electrónico (382). § 99. Método del campo oscuro (ultramicroscopia). Método de contraste fásico (382). § 100. Fenómenos de difracción en los espectrógrafos (poder separador cromático) (392).

POLARIZACIÓN DE LA LUZ

16. Luz natural y polarizada 395

§ 101. Carácter transversal de las ondas luminosas (395). § 102. Propagación de la luz a través de la turmalina (397). § 103. Polarización de la luz en el caso de reflexión y refracción en el límite de dos dieléctricos (400). § 104. Orientación del vector eléctrico en la luz polarizada (402). § 105. Ley de Malus (404). § 106. Luz natural (405).

17. Polarización en el caso de birrefringencia 406

§ 107 Birrefringencia y polarización de la luz al pasar ésta a través del cristal de espato de Islandia (406). § 108. Dispositivos de polarización (410).

18. Interferencia de rayos polarizados 415

§ 109 Experimentos de Fresnel y Arago y su importancia para la teoría elástica de la luz (415). § 110. Polarización elíptica y circular de la luz (416). § 111. Estructura interna de la luz natural (420). § 112. Descubrimiento y análisis de la luz polarizada elíptica y circularmente (423).

ESCALA DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

19. Rayos infrarrojos, ultravioletas y Roentgen 427

§ 113. Rayos infrarrojos y ultravioletas (427). § 114. Descubrimiento de los rayos Roentgen (X), métodos de su obtención y observación (430). § 115. Absorción de la emisión Roentgen (432). § 116. Naturaleza de los rayos Roentgen (434). § 117. Difracción de rayos Roentgen en una red cristalina (435). § 118. Espectrografía de los rayos Roentgen (437) § 119. Espectro continuo de rayos Roentgen. Concepto acerca de los rayos característicos (440). § 120. Optica de los rayos Roentgen (441). § 121. Escala de ondas electromagnéticas (443).

Ejercicios 445

INTRODUCCIÓN

1. BREVE INTRODUCCION HISTÓRICA

§ 1. Leyes fundamentales de la óptica

Ya en el inicio de las investigaciones ópticas fueron establecidas experimentalmente las siguientes cuatro leyes fundamentales de la óptica

1. Ley de propagación rectilínea de la luz.
2. Ley de independencia de los haces luminosos.
3. Ley de reflexión de la luz en la superficie de un espejo.
4. Ley de refracción de la luz en el límite de dos medios transparentes.

El estudio posterior de estas leyes mostró, en primer lugar, que ellas tienen un sentido mucho más profundo que lo que puede parecer a primera vista y, en segundo lugar, que la aplicación de éstas es limitada y que son leyes aproximadas. El establecimiento de las condiciones y de los límites de aplicación de las leyes fundamentales de la óptica significó un gran progreso en la investigación de la naturaleza de la luz

La esencia de estas leyes se reduce a lo siguiente:

1. *Ley de propagación rectilínea de la luz.* En un medio homogéneo la luz se propaga en línea recta.

Esta ley ya se encuentra en una obra sobre óptica, que se le atribuye a Euclides (300 años antes de nuestra era), y posiblemente era conocida y utilizada mucho antes.

Las observaciones de las sombras bien marcadas, producidas por fuentes puntuales de luz, o la obtención de imágenes con ayuda de pequeños agujeros pueden servir como demostración experimental de esta ley La relación entre el contorno del objeto y su sombra al ser alumbrado éste por una fuente puntual (o sea una fuente cuyas dimensiones son muy pequeñas con relación a su distancia hasta el

objeto) corresponde a la proyección geométrica hecha con ayuda de líneas rectas (fig. 1.1). En forma análoga, la fig. 1.2 muestra el modo de obtener una imagen con ayuda de un pequeño agujero, además la forma y el tamaño de la imagen muestran que la proyección se efectúa con ayuda de rayos rectilíneos.

La ley de propagación rectilínea se puede considerar sólidamente establecida en el experimento. Ella tiene un sentido muy profundo debido a que el concepto mismo de la línea recta, según parece, se desprendió como consecuencia de las observaciones ópticas. El concepto geométrico de la recta, como línea que representa la distancia mas corta entre dos puntos, surgió de la observación de la trayectoria de la luz al propagarse ésta en un medio homogéneo. Así nace el método practicado desde tiempos inmemorables de controlar la rectitud de los objetos con ayuda del rayo visual.

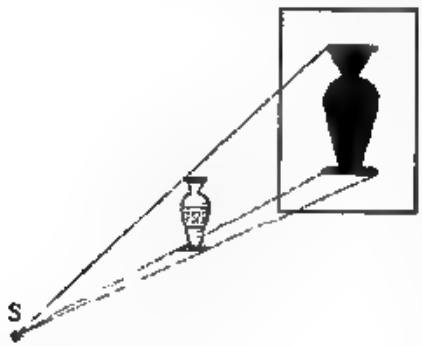


Fig. 1.1. Propagación rectilínea de la luz: formación de la sombra en el caso de una fuente puntual.

Una investigación más detallada de los fenómenos descritos muestra que la ley de propagación rectilínea de la luz deja de ser válida en el caso de agujeros muy pequeños. Así, por ejemplo, en el experimento ilustrado en la fig. 1.2 nosotros obtendremos una buena imagen cuando la dimensión del agujero sea próxima a 0,5 mm; la imagen será muy imperfecta al ser el agujero del orden de 0,02—0,03 mm. No se obtendrá ninguna imagen y prácticamente la pantalla quedará alumbrada de modo uniforme cuando las dimensiones del agujero sean alrededor de 0.5—1 μm. La divergencia de la ley de propagación rectilínea de la luz se expone en el estudio de la difracción.

2. *Ley de independencia de los haces luminosos.* Un flujo luminoso se puede descomponer en varios haces de luz separándolos, por ejemplo, con ayuda de diafragmas. La acción de cada uno de estos haces luminosos resulta ser independiente, o sea, el efecto producido por uno de ellos no depende de si actúan o no simultáneamente los otros haces o éstos están ausentes. De esta manera, si sobre el objetivo de una cámara fotográfica cae la luz de un extenso paisaje y nosotros evitamos que parte de los rayos luminosos llegue a ésta, no cambiaremos la imagen dada por el resto de los rayos.

Al estudiar los fenómenos de la interferencia de la luz (principio de superposición, véanse §§ 4 y 12) se aclarará el contenido mucho más profundo de esta ley.

3. *Ley de reflexión de la luz.* El rayo incidente, la normal a la superficie reflectora y el rayo reflejado se encuentran en un mismo plano (fig. 1.3), con la particularidad de que los ángulos entre los rayos y la normal son iguales entre sí: el ángulo de incidencia i es igual al ángulo de reflexión i'. Esta ley también se cita en la obra de Euclides. Su establecimiento está relacionado con el uso de superficies metálicas pulimentadas (espejos), conocidas ya en épocas muy lejanas.

4. *Ley de refracción de la luz.* El rayo incidente y el rayo refractado se encuentran en un mismo plano con la normal a la superficie de separación. El ángulo de incidencia i y el ángulo de refracción r (fig. 1.4) están relacionados entre sí por la fórmula

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = n, \tag{1.1}$$

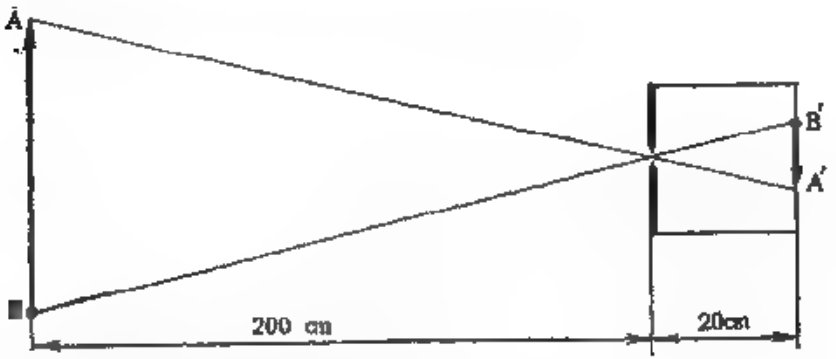


Fig. 1.2. Propagación rectilínea de la luz: obtención de la imagen con ayuda de un pequeño agujero.

donde n es una constante que no depende de los ángulos i y r. La magnitud n, o índice de refracción, se define por las propiedades de ambos medios cuya superficie de separación atraviesa la luz y depende también del color de la luz.

El fenómeno de la refracción ya era conocido por Aristóteles (350 a.n.e.). El intento de establecer la ley cuantitativa pertenece al famoso astrónomo Ptolomeo (año 120), el cual emprendió la medición de los ángulos de incidencia y de refracción. Los resultados de las mediciones, obtenidos por él, son muy exactos. Ptolomeo tomaba en cuenta la influencia de la refracción en la atmósfera sobre la posición de los astros (refracción atmosférica) e inclusive elaboró una tabla de ángulos de refracción. Sin embargo, las mediciones de Ptolomeo se referían a ángulos relativamente pequeños y por eso él llegó a la con-

clusión errónea acerca de la proporcionalidad entre el ángulo de refracción y el de incidencia. Mucho más tarde (aproximadamente en el año 1000) el óptico árabe Algazén (Aljaytam) descubrió que la relación entre los ángulos de incidencia y de refracción no permanece constante, pero él no pudo dar una expresión correcta de esta ley. La formulación correcta de la ley de refracción pertenece a Snell (1591—1626), el cual, en su obra no publicada mostró, que la relación de las cosecantes de los ángulos de incidencia y refracción permanece constante, y también a Descartes, que dio en su «Dióptrica» (1637) la formulación actual de la ley de refracción. Descartes enunció su ley aproximadamente en el año 1630; no está claro si él conocía o no las investigaciones de Snell.

La ley de reflexión y la de refracción también son válidas sólo si se cumplen determinadas condiciones. En el caso cuando las dimen-

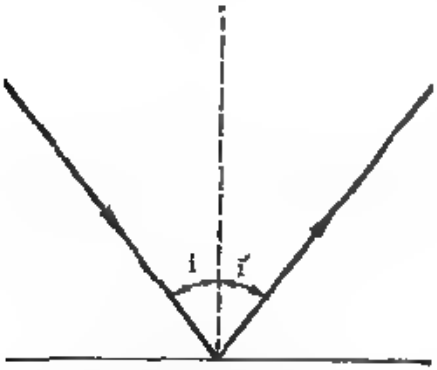


Fig. 1.3. Ilustración a la ley de reflexión

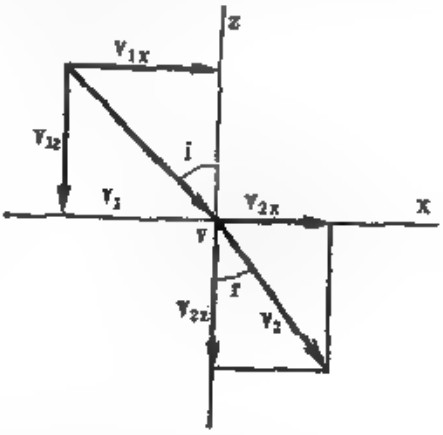


Fig. 1.4. Ilustración a la ley de refracción.

siones del espejo reflector o de la superficie que separa los dos medios es pequeña, nosotros observamos una desviación notoria de las leyes mostradas anteriormente (véase los capítulos dedicados a la difracción).

Además de los fenómenos de difracción, las leyes fundamentales, expuestas anteriormente, también pueden alterarse en el caso de fenómenos no lineales, que tienen lugar cuando la intensidad de los haces luminosos es lo suficientemente grande (véanse caps. XL y XLI).

Sin embargo para la mayoría de los fenómenos observados en los aparatos ópticos comunes, las leyes enumeradas se cumplen con suficiente rigurosidad. Por eso en el estudio de los aparatos ópticos, parte muy importante desde el punto de vista práctico de la óptica,

estas leyes pueden considerarse completamente aplicables. Toda la primera etapa del estudio de la luz consistía en investigaciones encaminadas al establecimiento de estas leyes y la aplicación de éstas, es decir creó los fundamentos de la óptica *geométrica* u óptica de los *rayos*.

§ 2. Etapas más importantes del desarrollo de las teorías ópticas

Como ya hemos visto, las leyes fundamentales de la óptica fueron establecidas mucho tiempo atrás. Sin embargo, las opiniones sobre éstas últimas han ido cambiando en el transcurso de las épocas posteriores.

Según parece, la propagación rectilínea de la luz, su propiedad fundamental, obligó a Newton (finales del siglo XVII) a mantenerse dentro de los marcos de la teoría corpuscular que considera la luz como un flujo de partículas luminosas, que vuelan rectilíneamente de acuerdo con las leyes de la mecánica (ley de inercia). Los colosales éxitos alcanzados por Newton en la mecánica, ejercieron una influencia radical en sus puntos de vista en lo que se refiere a los fenómenos ópticos. La reflexión de la luz se comprendía de manera análoga a como se comprendía el rebote de una bolita elástica que choca contra una superficie plana, donde rige la ley: $\angle i = \angle i'$. Newton explicaba la refracción, al igual que Descartes, como la atracción de las partículas luminosas por el medio refringente, gracias a lo cual cambia la velocidad de las partículas luminosas al pasar la luz del primer medio al segundo.

Descompongamos la velocidad v_1 de la partícula en el primer medio en sus componentes v_{1x} y v_{1z} (véase fig. 1.4), entonces la velocidad de las partículas que pasan del primer medio al segundo cambia, debido a la atracción entre las partículas luminosas y las del medio. Estas fuerzas de atracción están orientadas según la normal a la superficie de separación de ambos medios y por eso cambian correspondientemente las componentes normales de la velocidad ($v_{1z} \neq v_{2z}$), siendo invariables las componentes tangenciales ($v_{1x} = v_{2x}$). Si el segundo medio es ópticamente más denso, entonces $v_{2z} > v_{1z}$ y por consiguiente $v_2 > v_1$; en virtud de que $v_{1x} = v_1 \operatorname{sen} i$ y $v_{2x} = v_2 \operatorname{sen} r$, de la igualdad $v_{1x} = v_{2x}$ obtenemos que la relación

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{v_1}{v_2} = n$$

es una constante independiente del ángulo de incidencia, debido a que las velocidades v_1 y v_2 no dependen de la dirección de propagación de la luz (medios isótropos), pero que depende de su color.

La teoría mencionada introduce un determinado sentido físico en el índice de refracción: n es la relación de velocidades de las partí-

culas luminosas en el segundo y en el primer medio, con la particularidad de que la velocidad de la luz en el medio ópticamente más denso resulta ser mayor que en el menos denso.

En los tiempos de Newton todavía no se habían hecho mediciones directas de la velocidad de la luz en varios medios. Por eso la conclusión obtenida no podía ser comprobada de manera inmediata. Posteriormente estas mediciones fueron realizadas (Foucault, 1850) y demostraron que la velocidad de la luz en los medios densos (por ejemplo, en el agua) es *menor* que en el aire, mientras que el índice de refracción al pasar la luz del aire al agua es de 1,33, o sea mayor que la unidad. De esta manera la interpretación del índice de refracción, dada por Newton, resulta ser incorrecta. Sin embargo, un análisis mucho más profundo del mecanismo de propagación de la luz en una sustancia muestra que este problema no es tan fácil.

En la época de Newton fue hallada la velocidad, con la cual la luz se propaga en el espacio interplanetario (Romer, 1676). Esta determinación dio una magnitud próxima a 300 000 km/s. Este enorme valor de la velocidad de propagación de la luz hizo que muchos de los contemporáneos de Newton consideraran inadmisibles sus ideas acerca de la luz, debido a que resultaba muy difícil aceptar la existencia de partículas que vuelan a tal velocidad.

Puede ser no esté de más indicar, que en nuestros días esta objeción ha perdido su valor: nosotros conocemos corpúsculos (rayos β y rayos cósmicos), cuya velocidad de vuelo es muy próxima a la velocidad de la luz.

De igual manera, para nosotros tampoco es válida la otra objeción, planteada un poco más tarde (1746) por Euler. Según Euler la concepción newtoniana sobre la teoría corpuscular debe parecer audaz y extraña, porque si el Sol emite continuamente y en todas las direcciones flujos de sustancia luminosa a gran velocidad, entonces debería esperarse que se agote en poco tiempo o en caso extremo sufriese notorios cambios en el transcurso de tantos siglos. La concepción contemporánea acerca de la interrelación entre la masa y la energía nos obliga a reconocer la continua disminución de la masa del Sol en el proceso de emisión. Muchos aspectos de las ideas de Newton, acerca de la naturaleza de la luz, se encuentran entre las concepciones modernas, que, sin embargo, son en su esencia, completamente nuevas y se fundan en una base experimental completamente distinta.

Huygens, contemporáneo de Newton, presentó otra teoría de la luz («Tratado sobre la luz», escrito en el año 1678 y publicado en 1690). Él partió de la analogía, existente entre muchos fenómenos acústicos y ópticos, y suponía que las perturbaciones luminosas deben observarse como impulsos elásticos que se propagan en un medio especial, el *éter*, que llena todo el espacio tanto dentro de los cuerpos materiales como fuera de ellos. La enorme velocidad de propagación de

la luz se debe a las propiedades del éter (su elasticidad y densidad) y no presupone rápidos desplazamientos de las partículas del éter. De las observaciones hechas sobre la propagación de ondas en la superficie del agua, ya entonces era conocido que unos movimientos, relativamente lentos, de las partículas arriba y abajo, pueden originar ondas que se propagan rapidamente en la superficie del agua.

Es necesario señalar que a pesar de que Huygens hablaba de ondas luminosas, el no le daba a este concepto el contenido que mas tarde recibio aquél y que nosotros aceptamos ahora. Él decía que la luz se propaga en forma de superficies esféricas y añadía. «Yo llamo a estas superficies ondas de acuerdo a su parecido con las ondas que se observan en el agua, al caer en éste una piedra». Huygens no sólo no proponía la periodicidad de los fenómenos luminosos sino que directamente indicaba: «... no es necesario imaginarse que estas mismas ondas se desplazan una tras otra a igual distancia». De acuerdo con esto, él nunca utiliza el concepto de longitud de onda y considera que la luz se propaga rectilineamente por muy pequeño que sea el agujero a través del cual pasa, debido a que «el agujero siempre es lo suficientemente grande para contener una gran cantidad de partículas inconcebiblemente pequeñas de éter». De esta manera, él no presta atención al fenómeno de difraccion, observado por Grimaldi (véase la obra posturas de Grimaldi, publicada en el año 1665) y por Hooke (en el período entre 1672—1675). De igual manera el no menciona en su tratado los anillos de Newton, fenómeno en el cual el mismo Newton veía la demostracion de la periodicidad de los procesos luminosos.

De esta manera, la opinión, ampliamente difundida, de que Huygens es el fundador de la desarrollada teoría ondulatoria de la luz, que puede ser contrapuesta a la teoria corpuscular de Newton, no es exacta. En tiempos de Huygens y Newton la teoría ondulatoria fue trazada sólo muy esquemáticamente. Mientras tanto, el elemento más importante de su concepción, la periodicidad de los fenómenos luminosos, fue reconocida mucho más claramente por Newton, el cual, experimentando con los llamados anillos de Newton (véase § 26), inclusive realizó mediciones, a base de las cuales nosotros podemos calcular con suficiente exactitud las longitudes de onda de las emisiones de diferentes colores.

De las ideas de Huygens mayor valor ofrece el principio general, que lleva su nombre y que fue expuesto por él como método para encontrar la direccion de propagación de los impulsos luminosos. Con ayuda de este principio Huygens explicaba no sólo las leyes generales de reflexion y refracción, sino que inclusive el fenómeno de birrefringencia de los rayos de luz en el espato de Islandia, descubierto en el año 1670 por Bartolinus.

El principio de Huygens se puede formular de la siguiente manera:

Cada punto al cual llega la perturbación luminosa es a su vez un centro de ondas secundarias; la superficie que en determinado momento de tiempo contornea estas ondas secundarias señala la posición en este momento del frente de la onda que verdaderamente se propaga.

En esta forma inicial, el principio de Huygens habla sólo sobre la dirección de propagación del *frente* de onda, el cual formalmente se identifica con la superficie geométrica, que contornea las ondas secundarias. De esta manera, se tiene en cuenta la propagación de esta superficie y no la de las ondas, y las conclusiones de Huygens se refieren sólo a la dirección de propagación de la luz. Expuesto de esta manera, el principio de Huygens es, en esencia, un principio de la *óptica geométrica* y, hablando rigurosamente puede utilizarse sólo en condiciones en que es válida la óptica geométrica, es decir, cuando la longitud de la onda luminosa es infinitamente pequeña en comparación con las dimensiones del frente de onda. En estas condiciones este principio permite obtener las leyes fundamentales de la óptica geométrica (leyes de refracción y reflexión). A título de ejemplo, veamos la refracción de una onda plana en el límite de dos medios y simbolicemos la velocidad de onda en el primer medio con v_1 y en el segundo con v_2.

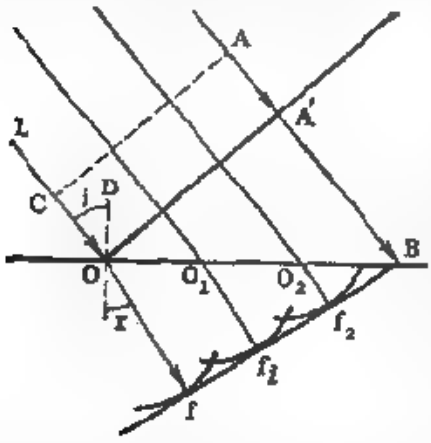


Fig. 1.5. Construcción de la onda refractada según Huygens.

Sea i (fig. 1.5) el ángulo entre el segmento CO perpendicular al frente de onda y OD perpendicular a la superficie refractora del medio. Supongamos que en el momento $t = 0$ el punto C del frente de onda llegó al medio refractor y coincidió con el punto O; entonces durante el tiempo τ, necesario para que el punto A' del frente de onda alcance (en el punto B) el segundo medio, la onda secundaria se propagará desde el punto O, como si partiera desde este centro, a cierta distancia Of. Las ondas secundarias que tienen sus centros en los puntos O_1, O_2 etc. se propagan en el tiempo indicado hasta las correspondientes distancias, dando en el segundo medio las ondas esféricas elementales f_1, f_2, ... Según el principio de Huygens la verdadera posición del frente de onda está indicada por la superficie, que contornea a estas ondas elementales, o sea por el plano Bf_2f_1f. Por supuesto

$$OB = \frac{Of}{\operatorname{sen} r} = \frac{A'B}{\operatorname{sen} i}$$

al sustituir sus valores $A'B = v_1\tau$, $Of = v_2\tau$, obtendremos:

$$v_1\tau \operatorname{sen} r = v_2\tau \operatorname{sen} i,$$

o la expresión equivalente

$$\operatorname{sen} i/\operatorname{sen} r = v_1/v_2 = n.$$

Podemos ver que la teoría de Huygens da una explicación de la ley de refracción, además resulta que es fácil de hacer concordar el valor del índice de refracción con los resultados del experimento de Foucault, realizado 150 años más tarde (véase § 125).

Con la misma naturalidad se puede explicar, desde el punto de vista del principio de Huygens, la ley de reflexión de las ondas (véase ejercicio 1).

De esta manera, el principio de Huygens se reduce a un método *geométrico* de construcción. En él no se usa el concepto de longitud de onda, debido a lo cual quedan sin interpretación los fenómenos relacionados con agujeros de pequeñas dimensiones que limitan el paso de la luz; tampoco existe explicación del hecho que las ondas sonoras, hablando en forma general, no cumplen con la ley de propagación rectilínea. El principio de Huygens en esta forma inicial, por consiguiente, es válido solamente en el campo de la óptica geométrica.

Durante el siglo XVIII la teoría corpuscular de la luz ocupaba una posición dominante en la ciencia, sin embargo la aguda lucha entre ésta y la teoría ondulatoria de la luz no cesaba. Enemigos declarados de la teoría corpuscular fueron Euler («Nueva teoría de la luz y de los colores», 1746) y Lomonosov («Una palabra acerca de la naturaleza de la luz, que constituye una nueva teoría sobre los colores», 1756); ambos defendían y desarrollaban la concepción de la luz como oscilaciones ondulatorias del éter.

A principios del siglo XIX empezó a formarse un sistema consecuente y desarrollado de la óptica ondulatoria. Gran importancia tuvieron los trabajos de Young y Fresnel. Fresnel (1815) precisó el principio de Huygens complementándolo con el principio de interferencia de Young, con ayuda del cual este último dio en 1801 una interpretación satisfactoria a la coloración de las láminas finas observadas en la luz reflejada. El principio de Huygens y Fresnel no sólo explicó satisfactoriamente la propagación rectilínea de la luz, sino que permitió resolver el problema de la distribución de la intensidad de la luz, al pasar ésta cerca de algún obstáculo, o sea observar el fenómeno de la difracción.

El posterior estudio de los fenómenos de la polarización de la luz y de la interferencia de los rayos polarizados (Fresnel y Arago) permitió establecer algunas particularidades de las ondas luminosas que fueron explicadas por Young y Fresnel con ayuda de la suposición de que las ondas luminosas son *transversales*, o sea que la dirección

de las oscilaciones en ellas es perpendicular a la dirección de propagación.

Sin embargo, las ondas transversales elásticas son posibles sólo en los cuerpos sólidos, por eso se tuvo que atribuir al éter algunas propiedades de éstos. La velocidad de propagación de las ondas transversales elásticas en un cuerpo sólido ilimitado se define con ayuda de la fórmula

$$c = \sqrt{N/\rho}, \tag{2.1}$$

donde N es el módulo de cizallamiento y ρ, la densidad. Debido a que según las observaciones astronómicas el éter no obstaculiza el movimiento de los cuerpos sólidos (los planetas), ρ debe ser extraordinariamente pequeño; para obtener los valores necesarios de c es imprescindible, al mismo tiempo, atribuir a N valores muy grandes. Para dar una explicación a la diferencia de las velocidades de la luz en medios distintos era necesario considerar que las propiedades del éter son diferentes en las distintas sustancias, y para las sustancias no isótropas se tenían que hacer suposiciones mucho más complicadas.

Por fin, le tuvieron que atribuir al éter elástico propiedades especiales para poder explicar la total ausencia de oscilaciones longitudinales en las ondas luminosas, establecida por el experimento, antes mencionado, de Fresnel y Arago. La confrontación de todas estas particularidades del éter sólido y elástico muestra las serias dificultades de la teoría elástica de la luz, la cual, además, no establece ninguna relación entre la óptica y los demás fenómenos físicos y no permite relacionar las constantes ópticas, que caracterizan la sustancia, con algún otro de sus parámetros.

Mientras tanto Faraday logró demostrar que los fenómenos ópticos no son una clase aislada de procesos y que, en particular, existe una relación entre los fenómenos ópticos y magnéticos; en el año 1846 Faraday descubrió el fenómeno de la rotación del plano de polarización en el campo magnético. Por otro lado, fue descubierto otro hecho importante, resultaba que la relación entre la unidad electromagnética de la corriente eléctrica y la electrostática era igual a $3 \cdot 10^8$ m/s, o sea igual a la velocidad de la luz (Weber y Kohlrausch, 1856). Por fin, las investigaciones teóricas de Maxwell mostraron que las alteraciones de campo electromagnético no quedan localizadas en el espacio, sino se propagan en el vacío con una velocidad igual a la relación entre las unidades electromagnética y electrostática de la corriente eléctrica, o sea con la velocidad de la luz. Esta conclusión fue comprobada más tarde por los experimentos de Hertz (1888). Basándose en sus investigaciones, Maxwell (1865) llegó a la conclusión de que *la luz es un fenómeno electromagnético*.

Según Maxwell

$$c/v = \sqrt{\varepsilon\mu}, \tag{2.2}$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío y v, la velocidad en el medio de una permeabilidad dieléctrica ε y magnética μ. Debido a que $c/v = n$ (índice de refracción), entonces

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{2.3}$$

Esta correlación enlaza las constantes ópticas, eléctricas y magnéticas de la sustancia.

Sin embargo, de (2.3) no se desprende que n debe depender de la longitud de onda λ de la luz, mientras que del experimento se sabe que existe la *dispersión* de la luz, o sea que n cambia al variar la longitud de onda de la luz: $n = f(\lambda)$ *). La teoría de Maxwell, que se limitaba a caracterizar las propiedades electromagnéticas de las sustancias solo con parámetros macroscópicos (ε, μ), no pudo dar explicación a este hecho. Era necesario un análisis más detallado de los procesos de interacción de la sustancia y la luz, basada en una concepción profunda acerca de la estructura de las sustancias. Esto fue hecho por Lorentz, el creador de la *teoría electrónica* (1896). La idea acerca de los electrones, que entran en la estructura del átomo y que son capaces de oscilar en ellos con un determinado período, permitió explicar los fenómenos de emisión y absorción de la luz por las sustancias, al igual que las particularidades de la propagación de la luz en las sustancias. En particular, se comprendieron también los fenómenos de la dispersión de la luz, debido a que la permeabilidad dieléctrica ε resultaba, dentro de los marcos de la teoría electrónica, dependiente de la frecuencia del campo electromagnético, o sea de la longitud de onda λ.

Paralelamente al desarrollo de la teoría ondulatoria de la luz evoluciona también el concepto del éter. En la concepción de Huygens éste es todavía muy vago e indeterminado; Lomonósov trata de precisarlo y profundizarlo, observando los diferentes tipos de posibles movimientos del éter (corriente, remolino y marejada) y relaciona la luz con el movimiento «de mareas» (oscilaciones) del éter. Es increíblemente interesante hacer notar, que Lomonósov consideraba posible relacionar con el éter también la explicación de los fenómenos eléctricos. En «La teoría de la electricidad», libro empezado en el año 1756, pero no concluido, él escribió: «Debido a que estos fenómenos (eléctricos) se realizan en el espacio privado de aire y que la luz y el fuego aparecen en el vacío y dependen del éter, parece verosímil que esta materia eléctrica sea idéntica al éter». Más adelante «Para aclarar esto, es necesario estudiar la naturaleza del éter; si ella es útil para la explicación de los fenómenos eléctricos, entonces habrá una su-

*) La explicación de la dispersión en los marcos de la teoría del éter elástico fue dada con ayuda de suposiciones especiales (*Cauchy*, 1836; *Sellmeyer*, 1871).

ficiente probabilidad de que ellos se originen a partir del movimiento del éter. Por último, si no se encontrase ninguna otra materia, entonces la causa más cierta de la electricidad será el éter en movimientos. Uno de los experimentos propuestos en «La teoría de la electricidad» es el que conteste «que refractará de otra manera el rayo de luz en el agua o en el vidrio electrizados», es decir, uno de los principales experimentos electroópticos, realizado solo a finales del siglo XIX.

En el siglo XVIII en mayor desarrollo alcanzaron las ideas acerca de la naturaleza ondulatoria de la luz en la teoría de Euler. Según Euler la luz constituye unas oscilaciones del éter al igual que el sonido son las oscilaciones del aire, además, a sus diferentes colores les corresponden las oscilaciones de diferente frecuencia. La comparación de la velocidad de la luz con la del sonido permitió a Euler afirmar que el éter es una sustancia «mucho más fina y elástica que el aire». Euler, al igual que Lomonósov, expuso la idea de que este mismo éter, agente luminoso, sirve de fuente de todos los fenómenos eléctricos. Según Euler la electricidad no es otra cosa que la violación del equilibrio del éter: los cuerpos en los cuales la densidad del éter se hace mayor, que en los cuerpos que le rodean resultan electrizados positivamente, la electrización negativa está relacionada con la disminución de la densidad del éter. Euler no extendió su teoría a los fenómenos magnéticos, por cuanto la naturaleza eléctrica del magnetismo todavía no era conocida. Estas ideas fueron desarrolladas por Euler en sus famosas «Cartas a una princesa alemana», escritas en 1760—1761 y publicadas en Petersburgo (1768—1772) cuando Euler por segunda vez visitaba Rusia, adonde llegó ya después de la muerte de Lomonósov, con el cual él mantenía una constante correspondencia científica y amistosa. Por eso no está descartada la posibilidad, de que las concepciones antes señaladas se formaron en Euler bajo la influencia de las ideas de Lomonósov.

El éter de Fresnel y Joung (comienzos del siglo XIX), a diferencia del éter de Lomonósov y Euler, está relacionado sólo con la interpretación de fenómenos ópticos. Un poco más tarde, para la interpretación de las interacciones eléctricas y magnéticas, Faraday introdujo también el concepto de un medio sustancial hipotético, el estado del cual (su tensión elástica) debería explicar los efectos de la interacción entre las cargas y las corrientes eléctricas, observados en el experimento. Las ideas de Maxwell sobre la naturaleza electromagnética de la luz permitieron unificar el éter luminoso y el electromagnético, al hacerlo agente de todos los fenómenos electromagnéticos. La aparición del campo electromagnético así como su propagación, se comprendían como un cambio de estado del éter, capaz de propagarse de un punto a otro con determinada velocidad.

El desarrollo posterior de la electrodinámica de los medios móviles trajo consigo la idea de que el éter, al atravesar todos los cuerpos, queda inmóvil cuando estos se mueven (Lorentz, véase § 130).

De esta manera las características físicas del éter se hacen cada vez menos reales. En la concepción de Lorentz (últimos años del siglo XIX), el éter es un medio ilimitado e inmóvil, cuya única característica es la velocidad de propagación en él de las perturbaciones electromagnéticas y, en particular, de la luz ($c = 2{,}998 \cdot 10^8$ m/s).

Sin embargo, la idea de considerar al éter como un medio inmóvil, el cual podría, por consiguiente, ser elegido como sistema de referencia, permitiendo de esta manera destacar un movimiento absoluto, entró en contradicción con el experimento (por ejemplo, el experimento de Michelson, véase § 131) y no podía ser conservada. La electrodinámica relativista que vino a sustituir la electrodinámica de Lorentz (véase § 131), negó por completo la concepción del éter, como agente material de los procesos electromagnéticos. El hecho de que la luz (campo electromagnético) y la sustancia son dos formas diferentes de materia, en la forma más evidente se revela en la transformación de los cuantos de luz en pares electrón—positrón y viceversa, en la formación de los cuantos de luz como resultado de la unión del positrón con el electrón.

Conjuntamente con esas dificultades, a las cuales conducía la teoría electrónica de Lorentz, basada en la concepción del éter inmóvil, se hicieron evidentes también otras dificultades de esta teoría. Ella no esclarecía muchas particularidades de los fenómenos, relacionados con la interacción de la luz y la sustancia. En particular, no fue resuelto satisfactoriamente el problema de la distribución de la energía, según las longitudes de onda, en la radiación de un cuerpo negro incandescente. Las dificultades acumuladas obligaron a Plank a formular la teoría de los cuantos (año 1900), la cual transpone la idea de la discontinuidad, tomada de la teoría de la estructura molecular de la sustancia, a los fenómenos electromagnéticos, entre ellos al proceso de la emanación de luz. La teoría de los cuantos eliminó las dificultades relacionadas con la emanación de luz por parte de cuerpos calientes; ella planteó de otra manera todo el problema de la interacción de la luz y la sustancia, cuya comprensión es imposible sin la interpretación cuántica. Una serie de fenómenos ópticos, en particular, el efecto fotoeléctrico y los problemas relacionados con la difusión de la luz, pusieron en primer plano las particularidades corpusculares de la luz. El proceso de desarrollo de la teoría de los cuantos, que se ha convertido en la base de los estudios contemporáneos sobre la estructura de los átomos y moléculas, continúa hasta nuestros días.

El cuadro de desarrollo de las principales teorías ópticas, expuesto brevemente por nosotros, muestra cómo se reflejó en la historia de la óptica la lucha de dos (a primera vista completamente opuestas) concepciones acerca de la naturaleza de la luz, es decir, de las concepciones ondulatoria y corpuscular.

En el primer período (Newton—Huygens, hasta el comienzo del

siglo XIX), la contraposición de estas concepciones tenía un carácter de exclusión mutua y el progreso científico consistía en buscar la base experimental, en la creación de una teoría desarrollada, que permitiera, al ahondar esta contraposición, comprender más claramente la naturaleza de aquéllas. El segundo período, desde Fresnel y Joung hasta la aparición de la concepción de los cuantos de luz (1905), fue un período de desarrollo multilateral de las concepciones ondulatorias, que parecía haber alcanzado una victoria definitiva sobre las concepciones corpusculares.

El siguiente período consiste en la acumulación de nuevos y precisos datos experimentales, que fueron posibles gracias al progreso de los métodos experimentales; al mismo tiempo se lleva a cabo el desarrollo de las concepciones teóricas más profundas, relacionadas con la creación de la teoría de los cuantos. En este período no sólo se logra argumentar los puntos de vista corpusculares, al lado de los ondulatorios ya establecidos, sino incluso aparecen intentos exitosos de sintetizar ambas concepciones.

La etapa actual de desarrollo de la óptica, cuyo comienzo se puede considerar el año 1960, se caracteriza por unos rasgos nuevos y bastante específicos. Las propiedades fundamentales de la luz —las ondulatorias, cuánticas, su naturaleza electromagnética — encuentran confirmación y aplicación cada vez más profundas y diferentes, y continúan sirviendo de base para la comprensión de todo el conjunto de fenómenos ópticos. Sin embargo, el número de estos fenómenos ha crecido considerablemente. A comienzos de los años 60 fueron creados los llamados máseres ópticos o láseres, que son fuentes con un alto grado de monocromaticidad y direcividad de la luz emitida por ellos. La propagación de los rayos láser y su interacción con la sustancia en muchos casos transcurre en condiciones radicalmente diferentes que en el caso de la emisión de fuentes comunes y los fenómenos concretos adquieren rasgos antes no conocidos y completamente nuevos. Lo dicho se refiere a la reflexión, refracción, difracción, difusión, absorción y a otros fenómenos ópticos fundamentales (véanse cap. XL y XLI).

---

2. ONDAS

§ 1. Formación de ondas. Ecuación de la onda

Los procesos ondulatorios pertenecen a una clase muy general de fenómenos. La formación de onda está supeditada a la presencia de enlaces entre las diferentes partes del sistema, debido a lo cual el concepto de proceso aislado es, por supuesto, una abstracción muy lejana. Son relativamente raros los casos cuando el proceso, que

transcurre en alguna parte del espacio, puede considerarse como aislado. Generalmente él ocasiona los correspondientes cambios en los puntos vecinos del sistema, transmitiéndoles cierta cantidad de energía. De estos puntos la perturbación pasa a otros adyacentes a ellos y así sucesivamente, propagándose de un punto a otro, es decir creando una onda. En dependencia de la naturaleza de los enlaces que condicionan la interacción señalada, surgen ondas de una u otra naturaleza. Las fuerzas elásticas que actúan entre los elementos de los cuerpos sólidos, líquidos o gaseosos ocasionan la aparición de ondas elásticas (acústicas) en los cuerpos. La perturbación de la superficie horizontal del agua se convierte en fuente de ondas superficiales como resultado de los enlaces existentes entre las partes vecinas del agua, condicionados por la fuerza de gravedad y la movilidad de las partículas del líquido. Una pequeña deformación de la superficie de un líquido puede dar comienzo a ondas capilares, provocadas por la acción de las fuerzas moleculares que condicionan los fenómenos en la capa superficial. La perturbación electromagnética, aparecida en alguna parte del espacio, debido a los enlaces electromagnéticos que se expresan mediante las leyes de electromagnetismo y de inducción electromagnética, se convierte en fuente de estas mismas perturbaciones en las partes adyacentes del espacio de las cuales ella se transmite cada vez más y más adelante: aparece la onda electromagnética, la cual (según Maxwell) debe propagarse con la velocidad de la luz.

A pesar de la infinidad de formas de los procesos físicos que provocan ondas, la formación de estas últimas ocurre siempre de la misma manera. La perturbación ocurrida en algún punto, en un momento de tiempo determinado, se manifiesta después de algún tiempo a cierta distancia del punto inicial, o sea se transmite con determinada velocidad. Veamos un caso simple de propagación de una perturbación a lo largo de una dirección cualquiera x; nosotros podemos representar la perturbación s como una función de la coordenada x y del tiempo t: $s = f(x, t)$. Es fácil ver que la propagación con la velocidad v de la perturbación a lo largo de la dirección x se representará por la misma función en cuyo argumento t y x entran como la combinación $(vt - x)$ o $(t - x/v)$. En realidad, tal aspecto del argumento muestra, que el valor de la función, que ella posee en el punto x y en el momento t, se repetirá en un punto algo más alejado $x + dx$ y en un momento de tiempo posterior $t + dt$, sólo si

$$vt - x = v(t + dt) - (x + dx). \tag{3.1}$$

De esta manera, la perturbación en el tiempo dt se trasladará a una distancia dx, propagándose con la velocidad dx/dt. De la relación (3.1) se obtiene que $dx/dt = v$, o sea esta velocidad es igual a v.

Así, *cualquier* función de argumento $vt - x$ expresa la propagación de la perturbación a lo largo de x, en el sentido de los valores ascen-

dentes de x, con una velocidad constante v. De manera análoga, cualquier función de argumento $vt + x$ describe la propagación del impulso con la velocidad v, pero en sentido contrario. El tipo de función f permite definir la *forma* de perturbación en cualquier momento t y depende de las condiciones, que han ocasionado su aparición.

No es difícil demostrar que la ecuación diferencial que describe el movimiento ondulatorio, o sea la ecuación, cuya solución es una función cualquiera de argumento $(vt - x)$ ó $(vt + x)$, será del siguiente tipo

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}. \tag{3.2}$$

En efecto, simplemente reemplazando, es fácil convencerse de que la perturbación s definida por la relación

$$s = f_1 (vt + x) + f_2 (vt - x), \tag{3.3}$$

donde f_1 y f_2 son funciones *arbitrarias*, es la solución de (3.2). Debido a que esta ecuación es diferencial y de segundo grado, la solución encontrada, por contener *dos* funciones arbitrarias, es su solución *general*. Esta solución representa el conjunto de dos ondas, que se propagan al encuentro una a la otra con una velocidad v. Por supuesto se sobreentiende que, a partir de una misma ecuación diferencial, nunca se puede deducir la forma especial de las funciones f_1 y f_2. Por eso la ecuación diferencial de tipo (3.2) describe matemáticamente los posibles procesos de propagación de ondas (a lo largo del eje x). Veamos, por ejemplo, la formación y propagación de ondas electromagnéticas, que se estudian en los cursos de electricidad.

Como es conocido, la aparición de una corriente eléctrica alterna en alguna parte del medio va acompañada por el surgimiento en el espacio circundante de un campo magnético alterno (electromagnetismo); este último da origen a un campo eléctrico alterno (inducción electromagnética) que condiciona las corrientes alternas de desplazamiento en el espacio circundante. Las corrientes de desplazamiento conllevan a la aparición de un campo magnético de la misma manera como las corrientes de conducción comunes en los conductores crean a su alrededor un campo magnético. De esta manera cada vez más regiones del espacio se convierten en regiones de acción de los campos electromagnéticos: la oscilación eléctrica aparecida en alguna parte no queda localizada, sino se apodera paulatinamente de más y más partes del espacio, propagándose en forma de onda electromagnética.

Los fenómenos de electromagnetismo e inducción electromagnética, que condicionan este proceso tienen su expresión matemática breve en las ecuaciones de Maxwell, que establecen la relación entre las alteraciones de intensidad de los campos eléctrico (E) y magnético (H). Los razonamientos de Maxwell en correspondencia con los datos experimentales muestran, que las direcciones de los vectores eléc-

trico y magnético resultan ser perpendiculares uno al otro y a la dirección de propagación de la onda electromagnética. En el caso más simple de onda plana, cuando la dirección de los ejes de las coordenadas es tal, que el campo eléctrico E está dirigido a lo largo del eje z, y el campo magnético H, a lo largo del eje y, las ecuaciones de Maxwell tienen la forma

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial x}, \tag{3.4}$$

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{3.5}$$

donde μ y ε son respectivamente la permeabilidad magnética y dieléctrica del medio, y c es la relación entre las unidades electromagnética y electrostática de la corriente eléctrica, la cual, como muestran las mediciones, es igual a la velocidad de la luz, o sea, $3 \cdot 10^8$ m/s.

De estas ecuaciones, necesariamente, se deduce que el campo eléctromagnético aparecido en alguna parte se propaga en el espacio con una velocidad de $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Efectivamente, al derivar la ecuación (3.4) respecto a x y la ecuación (3.5) respecto a t, y eliminando H de ellas encontraremos:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}, \tag{3.6}$$

o sea la ecuación diferencial de las ondas que muestra que el campo eléctrico E se propaga en el espacio a lo largo del eje x con una velocidad $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. De esta manera, la solución de esta ecuación puede ser expresada como $E = f(x - vt)$, donde f es una función arbitraria

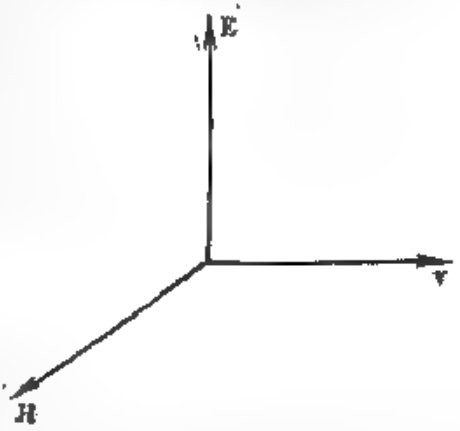


Fig. 2.1. Disposición mutua de los vectores de intensidad de los campos eléctrico E y magnético H y del vector velocidad v en la onda electromagnética.

Una conclusión análoga puede ser obtenida también para la magnitud del campo magnético H.

No es difícil establecer la relación entre E y H; por ejemplo, propongamos $E = f(x - vt)$ y encontraremos de la ecuación (3.4)

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = -f'(x - vt) = \frac{1}{v}\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\frac{\partial E}{\partial t},$$

o

$$\sqrt{\mu}\frac{\partial H}{\partial t} = \sqrt{\varepsilon}\frac{\partial E}{\partial t},$$

o bien

$$\sqrt{\mu}\,H = \sqrt{\varepsilon}\,E + \text{const.} \tag{3.7}$$

Debido a que en todos los procesos electrodinámicos (y por consiguiente, en los ópticos) el campo constante no desempeña ningún papel, la constante en la última relación sin restringir la generalidad puede proponerse en caso general igual a cero. De esta manera, tenemos

$$\sqrt{\mu}\,H = \sqrt{\varepsilon}\,E. \tag{3.8}$$

La relación (3.8) muestra que E y H están ligados entre sí linealmente; E y H cambian de tal manera, que ellos pasan simultáneamente por el máximo o por el mínimo. Así para las ondas electromagnéticas (así como para las ondas elásticas) nosotros tenemos un conjunto de *dos vectores relacionados entre sí* que se propagan de manera ondulatoria con una velocidad común $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. La disposición mutua de los tres vectores E, H y v, mostrada en la figura 2.1, corresponde a la regla de la mano derecha.

§4. Oscilaciones y ondas monocromáticas. Concepto sobre el desarrollo de Fourier

Tenemos que la onda que se propaga con una velocidad v a lo largo de x puede describirse con la relación

$$s = f(t - x/v). \tag{4.1}$$

Al fijar el valor de x, encontraremos que el tipo de función f muestra la ley, según la cual cambia con el tiempo la magnitud s que caracteriza la perturbación, por ejemplo, la intensidad del campo eléctrico o magnético. Como ya se mencionó, f puede ser una función arbitraria. Como veremos ahora, el caso, cuando f es una función sinusoidal o cosinusoidal, tiene un significado especial. En este caso

$$s = a \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right), \tag{4.2}$$

donde a es la *amplitud*, T, el *período* de la onda y el argumento de la función sinusoidal $\frac{2\pi}{T}(t - \frac{x}{v})$ lleva el nombre de *fase*. El valor de s depende, lógicamente, de la elección del momento inicial de tiempo, t y de la coordenada inicial x. Por eso para varias ondas, poseedoras de una misma amplitud y período, el valor de s en cada punto x y en cada momento de tiempo t puede ser diferente. Para considerar este hecho, resulta cómodo escribir la expresión para la onda sinusoidal en una forma más general

$$s = a \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi\right], \tag{4.3}$$

donde φ lleva el nombre de *fase inicial*. Si las fases iniciales de todas las ondas coinciden o si tratamos sólo con una onda, entonces se puede proponer $\varphi = 0$ y conservar la expresión (4.2) para la onda sinusoidal.

La forma de la expresión (4.2) muestra que ella es periódica en el tiempo, con un período T. Aparte de esto, ella también posee periodicidad con respecto al argumento x. Si se da a x el incremento $\lambda = vT$, entonces el valor de la función no cambiará. En efecto,

$$s = a \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x+\lambda}{v}\right) = a \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT} - 1\right) =$$

$$= a \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

por consiguiente, la distancia a lo largo del eje x, igual a $\lambda = vT$, separa los puntos en los cuales las oscilaciones se realizan en un momento dado de tiempo en una misma fase. La magnitud $\lambda = vT$ se llama *longitud de onda*.

La expresión (4.2) se puede transcribir como

$$s = a \operatorname{sen} 2\pi\,(t/T - x/\lambda). \tag{4.4}$$

Designemos $\frac{2\pi}{T} = \omega$, *frecuencia angular* y $\frac{2\pi}{\lambda} = k$, *número de onda*. Entonces (4.4) tomará la siguiente forma:

$$s = a \operatorname{sen} (\omega t - kx). \tag{4.5}$$

Si introducimos en lugar de la frecuencia angular el número de oscilaciones por segundo (frecuencia) $\nu = 1/T = \omega/2\pi$, entonces

$$s = a \operatorname{sen} (2\pi\nu t - kx). \tag{4.6}$$

Por último, se pueden introducir las funciones exponenciales en vez de las trigonométricas, lo que frecuentemente facilita la interpretación matemática de muchos problemas en la teoría de oscilaciones y ondas. Esto se basa en la fórmula de Euler,

$$\exp(i\psi) = \cos\psi + i \operatorname{sen}\psi.$$

La parte real Re ($\exp i\psi$) e imaginaria Im ($\exp i\psi$) de esta expresión representan las funciones trigonométricas $\cos\psi$ y $\operatorname{sen}\psi$, respectivamente. Debido a que la mayoría de las operaciones matemáticas son más fáciles de realizar con las funciones exponenciales que con las trigonométricas, es racional hacer los cálculos de la siguiente manera: introducir en lugar del seno o del coseno la función exponencial, realizar con ella todos los cálculos necesarios y al final regresar, si esto es deseable, a las funciones trigonométricas, tomando correspondientemente la parte real o imaginaria.

Si $\psi = \omega t$, entonces $a \exp(i\omega t)$ describe la oscilación armónica con la amplitud a y la frecuencia angular ω (con período $T = 2\pi/\omega$). Si la fase inicial de la oscilación es igual a δ, entonces la expresión

será $a \exp [i(\omega t + \delta)] = a \exp (i\delta) \cdot \exp (i\omega t)$. Designando $a \exp (i\delta) = C$, nosotros introducimos la amplitud compleja C en la expresión en la cual entra tanto la amplitud común a, como la fase inicial δ de la oscilación. De esta manera,

$$C = a \exp (i\delta) = a \cos \delta + ia \operatorname{sen} \delta.$$

Para determinar la amplitud de oscilaciones, más exactamente, su cuadrado a^2, es necesario multiplicar C por conjugada a su C^*:

$$a^2 = CC^* = a \exp (i\delta)\, a \exp (-i\delta).$$

Utilizando la función exponencial, nosotros podremos escribir la expresión (4.5) en la forma

$$s = a \exp [i(\omega t - kx)] = a \exp (-ikx) \cdot \exp (i\omega t), \qquad (4.7)$$

y (4.6) en la forma

$$s = a \exp [i(2\pi\nu t - kx)] = a \exp (-ikx) \cdot \exp (i2\pi\nu t). \qquad (4.8)$$

A la onda expresada en una de las formas (4.2)—(4.8), la llamaremos *onda monocromática*.

Conforme a la terminología introducida, se puede decir que la velocidad de propagación de la onda monocromática es la velocidad con la cual se transmite de un punto a otro la fase monocromática de la oscilación. En efecto, la velocidad de propagación de la fase se define con ayuda de aquella relación entre x y t, cuando la fase no cambia, es decir para $(2\pi/T)(t - x/v) = \text{const}$. Al derivar esta relación, encontramos que la velocidad de propagación de la fase $dx/dt = v$. Por eso v lleva el nombre de *velocidad de fase* de la onda monocromática. Al utilizar otra expresión para la onda monocromática, se puede encontrar otra expresión para la velocidad de fase. Así, de la relación (4.5) encontramos la condición para determinar la velocidad de fase: $\omega t - kx = \text{const}$., es decir $dx/dt = \omega/k$, la cual, por supuesto, coincide con la obtenida anteriormente.

En efecto

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \frac{T\nu}{T} = v.$$

El experimento muestra que, al parecer, sólo en el vacío la velocidad de propagación de la fase de las ondas luminosas es la misma para ondas de cualquier período *). En todos los demás medios la velocidad de propagación de la fase de la onda monocromática luminosa depende de su longitud, es decir $v = \Phi(\lambda)$. A estos medios se acostumbra llamarlos *dispersantes*. Este hecho tiene un gran significado en el caso de propagación de un impulso de tipo complejo. Este impulso se expresa con una función de forma arbitraria $f(t)$. En muchos problemas acústicos y ópticos $f(t)$ es una función periódica del tiempo, aunque con mayor frecuencia ella suele ser no periódica.

*) Véase más detalladamente el capítulo XXVIII.

El estudio del problema general acerca de la propagación de un impulso de tipo arbitrario se simplifica mucho, debido a que cualquier función puede representarse como la suma (hablando en general, con una cantidad infinita de términos) de ciertas funciones determinadas. Físicamente esto significa que un impulso *arbitrario* puede ser representado como la suma (de un número infinitamente grande) de impulsos de *determinado* tipo. La gran mayoría de aparatos receptores se subordina al *principio de la superposición* el cual significa que el resultado de varias acciones simultáneas se manifiesta simplemente como la suma de los resultados, ocasionados por cada una de las acciones por separado. El principio de la superposición es aplicable en el caso, cuando las propiedades del sistema receptor no dependen de si éste se encuentra o no bajo la acción de la perturbación captada, y esta independencia siempre tiene lugar *si la acción no se hace demasiado fuerte* *). Por cuanto el principio de la superposición es aplicable, nosotros podemos sustituir un impulso arbitrario por la suma de sus componentes y observar la acción de cada sumando por separado. Una elección racional de estos sumandos, es decir una elección racional del método de desarrollo del impulso complejo, permite simplificar considerablemente el estudio del problema observado. Uno de estos métodos racionales de desarrollo es el de desarrollo en *ondas monocromáticas*, es decir la representación, introducida por Fourier, de una función arbitraria en forma de un conjunto de cosenos y senos. De acuerdo con el teorema de Fourier, cualquier función **), puede ser representada con la exactitud requerida, como la suma de funciones sinusoidales y cosinusoidales con amplitudes, períodos y fases iniciales debidamente escogidos. Ahora, si la función inicial es periódica (con período T), entonces los períodos de los sumandos senos y cosenos se relacionarán como múltiplos simples: $T, \frac{1}{2}T, \frac{1}{3}T, \frac{1}{4}T, \ldots$ (representación en *serie de Fourier*). Pero si la función no es periódica, entonces en el desarrollo estarán presentes no sólo los múltiplos simples, sino todos los posibles períodos (representación en *integral de Fourier*). En la práctica, generalmente, se obtiene una aproximación bastante buena, si nos limitamos a una cantidad no muy grande de términos en la serie de Fourier.

Utilizando el desarrollo de Fourier, nosotros podemos representar el impulso como un conjunto de ondas monocromáticas.

Si el medio no posee dispersión, es decir, si todas las ondas monocromáticas se propagan con la misma velocidad de fase, entonces el

---

*) Los fenómenos, que tienen lugar al propagarse en unas sustancias las ondas luminosas con gran intensidad del campo eléctrico, son descritos más abajo (véase caps. XL, XLI).

**) Las condiciones matemáticas, que deben ser satisfechas por la función, para que ésta pueda ser aproximada según el método de Fourier, se cumplen en todos los problemas físicos.

conjunto de oscilaciones en cualquier punto del medio, al sumarse, dará el impulso de la forma inicial. En este medio cualquier impulso se propaga entero, sin cambiar su forma, de tal manera que la velocidad de fase es al mismo tiempo la velocidad del impulso. Pero si el medio posee dispersión, entonces las diferentes oscilaciones sinusoidales llegarán a un punto cualquiera x_1 en un instante dado t_1 con diferentes cambios en las fases, y al sumarse, darán un impulso con una forma modificada. El impulso, al propagarse en un medio dispersante, se deforma, y el concepto de la velocidad de su propagación se vuelve mucho más complicado. A este punto regresaremos en el capítulo XX.

De esta manera, en los medios dispersantes, a los cuales pertenecen todos los medios (a excepción del vacío), sólo las ondas sinusoidales infinitas (monocromáticas) se propagan sin deformarse y a una velocidad determinada. Precisamente en esto se manifiesta el extraordinario significado que tiene para la óptica el desarrollo de Fourier a diferencia de los otros desarrollos matemáticos posibles.

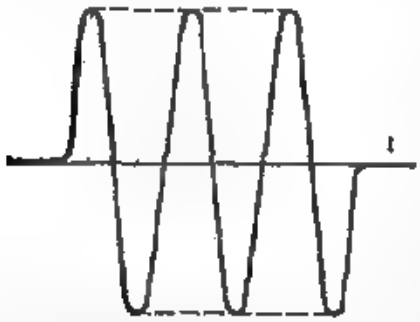


Fig. 2.2. Ejemplo de onda no monocromática: «fragmento» de sinusoide o tren de onda.

Es necesario subrayar, que las ondas se llaman monocromáticas, si no sólo el *período* T, sino también la *amplitud* a y la *fase inicial* φ son magnitudes independientes del tiempo t. Las ondas descritas por una de las expresiones (4.2)—(4.6) no serán monocromáticas, si a no es constante. Las ondas que aparecen al propagarse los impulsos representados en las figuras 2.2, 2.3, 2.4, la amplitud de las cuales cambia con el tiempo, son ejemplos de ondas no monocromáticas. Ninguna de las ondas representadas en las figuras 2.2—2.4 responde a la fórmula $s = a \operatorname{sen}(\omega t - kx)$, siendo $a = \text{const.}$, y por eso cualquiera de ellas puede ser representada, según el método de Fourier, como la suma de sinusoides y cosinusoides infinitamente duraderas. En otras palabras, las ondas observadas no son simplemente ondas monocromáticas, sino un conjunto de muchas ondas monocromáticas pero con diferentes períodos.

Especial interés ofrece el primer ejemplo (fig. 2.2). En él se supone que al principio la amplitud es igual a cero, después en el momento de tiempo t_1 se hace igual a a_1, se mantiene *constante* todo el tiempo desde t_1 hasta t_2 y después nuevamente se iguala a cero.

Se comprende que cualquier onda real, por muy cuidadosamente que se mantenga la amplitud constante, en el mejor de los casos corresponde al ejemplo observado, pues ninguna onda real puede prolongarse infinitamente, sino comienza y se extingue en determinados momentos de tiempo. Esto significa, que esta onda no es estrictamente monocromática, pues su amplitud es una función del tiempo.

Mientras más largo sea el intervalo $t_2 - t_1$, en comparación con el período T, es decir mientras más grande sea el número de ondas de un período dado que se emite durante el tiempo de trabajo de la fuente, más monocromática puede considerarse su emisión. En general, cuanto más despacio cambie la amplitud en el transcurso del tiempo, más monocromática será la onda.

Veamos el siguiente ejemplo que demuestra que la onda sinusoidal, con una amplitud variable, es equivalente a un conjunto de varias

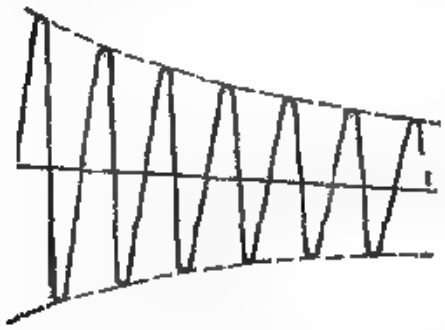


Fig. 2.3. Ejemplo de onda no monocromática: sinusoide amortiguada.

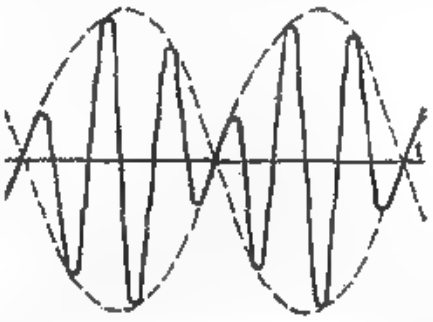


Fig. 2.4. Ejemplo de onda no monocromática; superposición de dos sinusoides de períodos próximos (pulsaciones).

ondas monocromáticas.

Supongamos que esté dada la onda, descrita por la relación

$$s = a \cos (2\pi nt - kx), \tag{4.9}$$

donde a es una magnitud que cambia con el tiempo según la ley

$$a = A\,(1 + \cos 2\pi\, mt),$$

es decir, que m veces en el transcurso de un segundo alcanza el valor $2A$, y tantas veces se convierte en cero, pasando por todos los valores intermedios según la ley señalada. En esta expresión A es cierta magnitud *constante*. En este caso tendremos

$$s = A(1 + \cos 2\pi mt)\cos (2\pi nt - kx) = A\cos (2\pi nt - kx) +$$

$$+ A\cos 2\pi mt\cos(2\pi nt - kx) = A\cos(2\pi nt - kx) +$$

$$+ \tfrac{1}{2} A\cos\{2\pi(n+m)t - kx\} + \tfrac{1}{2} A\cos\{2\pi(n-m)t - kx\}.$$

De esta manera, nuestra onda no es otra cosa que el conjunto de tres ondas estrictamente monocromáticas con amplitudes A, $\frac{1}{2}A$ y $\frac{1}{2}A$ y frecuencias n, $n+m$ y $n-m$. El conjunto de estas tres ondas monocromáticas compone la onda no monocromática dada y descrita por (4.9).

Utilizando las funciones exponenciales para la expresión de la onda, se pueden simplificar los cálculos. En efecto, la onda

$$s = a[i\exp(2\pi nt - kx)] =$$

$$= A\left\{1 + \tfrac{1}{2}\exp(i2\pi mt) + \tfrac{1}{2}\exp(-i2\pi mt)\right\}\exp[i(2\pi nt - kx)] =$$

$$= A\exp[i(2\pi nt - kx)] + \tfrac{1}{2}A\exp\{i[2\pi(n+m)t - kx]\} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}A\exp\{i[2\pi(n-m)t - kx]\}$$

constituye el conjunto de tres ondas monocromáticas con las frecuencias n, $(n+m)$ y $(n-m)$.

Hemos estudiado hasta el final el ejemplo, citado arriba, en vista de la extrema simplicidad del análisis matemático del problema. En el caso de una ley más complicada (periódica o no) de cambio de la amplitud en el tiempo, la esencia física del fenómeno permanece invariable, pero el análisis matemático para la búsqueda de las ondas monocromáticas integrantes, con las cuales se puede obtener la onda no monocromática dada, es mucho más complicado y exige, en general, la aplicación del teorema de Fourier.

El ejemplo examinado muestra claramente que el cambio de amplitud en el tiempo trae consigo la violación de la monocromaticidad de la onda y la aparición de nuevas frecuencias.

El cambio de la amplitud en el tiempo significa la variación de la intensidad y lleva el nombre de *modulación*. Se puede modular no sólo la amplitud, sino también la fase de la onda. La modulación de la fase significa también la violación de la monocromaticidad.

En el ejemplo citado, la modulación de la amplitud se realizó según una ley sinusoidal simple. En los fenómenos reales, generalmente, la modulación ocurre de una manera más complicada, por lo general, irregularmente (modulación caótica). Así, en cualquier fuente de luz la emisión de los diferentes átomos, componentes de la fuen-

te, cambia irregularmente tanto en su amplitud como en la fase, sufriendo modulación caótica*).

En el caso cuando la modulación transcurre según la ley escogida en nuestro ejemplo, ella expresa la transformación de la onda monocromática con frecuencia n en tres ondas monocromáticas con frecuencias n, $n + m$ y $n - m$ y con las amplitudes correspondientes. Este tipo de influencia sobre la intensidad de onda, es decir la modulación de la onda acompañada de la desintegración de la frecuencia de la onda monocromática, juega un gran papel en muchos fenómenos ópticos. Es necesario señalar la dificultad de la observación directa en los fenómenos ópticos de la influencia parecida a la descrita anteriormente, debido a que la frecuencia de las ondas ópticas es muy alta ($n \sim 10^{14}$Hz); por eso se requieren unos cambios muy rápidos de la intensidad que sucedan muchísimas veces por segundo, para que se pueda obtener un cambio notable de la frecuencia, es decir, para que $n + m$ y $n - m$ se diferencien notablemente de n.

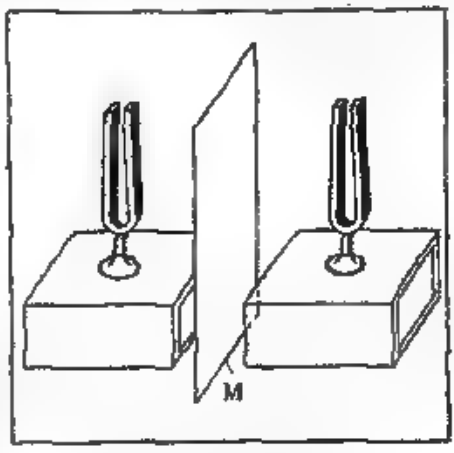


Fig. 2.5. Modulación de la onda emitida por un diapasón.

Técnicamente es muy difícil realizar una modulación tan frecuente, debido a lo cual los fenómenos de este tipo son difíciles de observar en la óptica. Sin embargo, ellos se realizan tanto en experimentos artificiales como en una serie de fenómenos naturales (véase sobre esto, por ejemplo, el capítulo XXIX).

El fenómeno citado es muy fácil de realizar en un experimento acústico, donde se trabaja con frecuencias no altas. Si tomamos un diapasón de una frecuencia de 100 Hz, es suficiente modular su intensidad sonora dos veces por segundo, según la citada ley, para obtener una onda compleja equivalente a tres ondas con frecuencias de 98, 100 y 102 Hz. Es fácil convencerse de esto con ayuda de un experimento sencillo. Coloquemos dos diapasones de frecuencia 100 y 98 Hz (ó 102 Hz) uno frente al otro (fig. 2.5). Ellos no están afinados al unísono, y las ondas emitidas por un diapasón no provocarán resonancia en el otro. Pero si al mismo tiempo que obligamos a sonar el primer diapasón, nosotros colocamos y retiramos la tapa M que cierra su cajón de resonancia, dos veces por segundo, es decir, modu-

*) Un análisis más detallado de los fenómenos de la modulación se puede encontrar en el libro de *G. S. Gorelik* «Oscilaciones y ondas», Fizmatguiz, 1959) (*Г. С. Горелик*, "Колебания и волны", Физматгиз, 1959).

lamos su intensidad sonora dos veces por segundo, entonces la onda modulada será equivalente (aproximadamente) al conjunto de tres ondas cuyas frecuencias son 100, 98 y 102 Hz, y el segundo diapasón repercutirá en una de ellas. Un experimento de este tipo se hace sin ninguna dificultad.

Otro experimento análogo de modulación de la corriente eléctrica es fácil de realizar, utilizando para el registro de la frecuencia un frecuencímetro de láminas vibrantes. Cuando la corriente sinusoidal de amplitud constante actúa sobre el frecuencímetro, vibra la lámina que responde a la frecuencia de la corriente (habitualmente $\omega = 50$ Hz). Pero si la corriente se interrumpe periódicamente Ω veces por segundo, o lo que es mejor, si la corriente se modula según una ley sinusoidal con frecuencia Ω, entonces, además de la lámina ω, vibrarán también las láminas correspondientes a las frecuencias $(\omega + \Omega)$ y $(\omega - \Omega)$

Hay que notar que nosotros hemos introducido el concepto de ondas monocromáticas en el ejemplo de la onda *plana*, para la cual la amplitud a no depende de las coordenadas. Sin embargo, esta restricción no es de importancia y las ondas seguirán siendo monocromáticas para cualquier a, sólo si a no depende del *tiempo*: $a = f(x, y, z)$. Así, por ejemplo, en el § 6 nosotros trataremos con onda esférica monocromática, cuya amplitud disminuye conforme se aleja del centro de emisión.

§ 5. Energía transmitida por la onda electromagnética

La onda electromagnética constituye una perturbación electromagnética que se propaga, como anotamos en el § 3, en el vacío con la velocidad c, y en el medio con la velocidad $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, donde ε es la permeabilidad dieléctrica de la sustancia, y μ, su permeabilidad magnética. Con esta perturbación electromagnética está relacionada la energía, cuya densidad, es decir la energía contenida en unidad de volumen, se expresa, para el campo eléctrico, mediante $(\varepsilon/8\pi)\,E^2$, y para el magnético, mediante $(\mu/8\pi)\,H^2$. En el caso de una onda monocromática $E = E_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx)$ y $H = H_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx)$, así que *la energía de la onda es proporcional al cuadrado de su amplitud*. Esta relación entre la energía y la amplitud es válida también para cualquier otro tipo de onda, por ejemplo, para las ondas elásticas que se estudian en la mecánica y, en particular, en la acústica.

Parecido a lo que sucede al propagarse las ondas elásticas, cuando se propaga la onda electromagnética se realiza una transmisión (corriente) de energía. El problema acerca de la corriente de energía en la onda elástica fue estudiado por primera vez (1874) por

N. A. Umov *), el cual demostró un teorema general sobre el flujo de la energía en cualquier medio. El flujo de energía en una onda elástica puede ser calculado mediante las magnitudes, que caracterizan la energía potencial de la deformación elástica y la energía cinética del movimiento de las partículas en un medio elástico. La densidad del flujo de energía se expresa con ayuda de un vector especial (vector Umov). Un estudio análogo resulta ser fructífero también para el caso de las ondas electromagnéticas. Hasta cierto punto se puede comparar la energía del campo eléctrico con la energía potencial de la deformación elástica, y la energía del campo magnético con la energía cinética del movimiento de las distintas partes del cuerpo deformado. Del mismo modo como en el caso de deformación elástica, en las ondas electromagnéticas la transmisión de energía de un punto a otro está relacionada con el hecho de que las ondas de intensidad eléctrica y magnética se encuentran en una misma fase. A estas ondas se les llama *móviles*. El movimiento de la energía en la onda elástica móvil, o en la electromagnética, se representa fácilmente con ayuda del vector S, al cual se le puede llamar vector *de flujo de energía* y el cual muestra qué cantidad de energía pasa en la onda por un segundo a través de 1 m². Para las ondas electromagnéticas este vector fue introducido por Poynting (1884) y se llama *vector Umov—Poynting*.

No es difícil hallar la expresión de este vector para el caso simple examinado ya en el § 3, que expresa la propagación de una onda electromagnética plana a lo largo del eje x. Si multiplicamos (3.4) por H y (3.5) por E y sumamos, obtendremos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{c}{4\pi}\frac{\partial (EH)}{\partial x},$$

donde $u = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)$ es la densidad de la energía. Examinando el flujo de energía S, que entra y sale de un volumen elemental, hallaremos la expresión para el cambio de la densidad de la energía en el tiempo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial S}{\partial x}.$$

De aquí

$$S = \frac{c}{4\pi}(EH), \tag{5.1}$$

*) *N. A. Umov*, Ecuaciones del movimiento de la energía en los cuerpos. Odesa, 1874; Obras escogidas, Gostejizdat, 1950, págs. 151—200 (*Н. А. Умов*, Уравнения движения энергии в телах, Одесса, 1874; Избранные сочинения, Гостехиздат, 1950, стр. 151—200).

lo que constituye la expresión numérica del vector Umov—Poynting, para la onda electromagnética *). En lo que respecta a la dirección del vector Umov—Poynting, éste resulta ser perpendicular al plano, en el cual se encuentran los vectores de intensidades eléctrica y magnética, es decir en forma vectorial se escribe de manera general como

$$S = \frac{c}{4\pi}[EH]. \tag{5.2}$$

El vector Umov—Poynting muestra la dirección en que se transmite la energía de la onda y puede ser en muchísimos casos tomada como dirección del rayo de luz. Sin embargo, no se debe olvidar que el concepto de rayo es un concepto de la óptica geométrica y no tiene una representación, correspondiente por entero, en las concepciones ondulatorias, para las cuales ha sido introducido el vector Umov—Poynting.

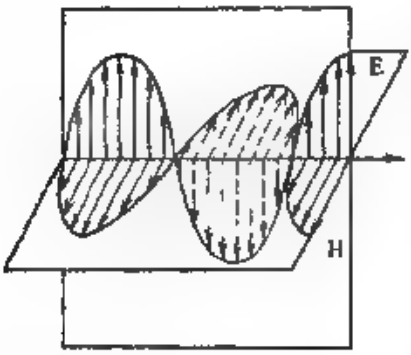


Fig. 2.6. En la onda móvil los vectores E y H se encuentran en fase.

La onda electromagnética monocromática que se propaga a lo largo de x constituye un campo electromagnético del tipo

$$E = \frac{a}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad \text{y}$$

$$H = \frac{a}{\sqrt{\mu}} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right) \tag{5.3}$$

de acuerdo con (3.8). Las ondas (5.3) están representadas (fig. 2.6) de tal manera que el vector E y el vector H simultáneamente alcanzan el máximo y el mínimo, es decir se encuentran en fase, y la energía corre a lo largo de x (vector v).

De la exposición breve de la teoría de Maxwell se puede deducir que la perturbación electromagnética debe propagarse en el dieléctrico a la velocidad $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Para el vacío $\varepsilon = \mu = 1$, es decir, en él la velocidad de propagación de la onda electromagnética es

*) El resultado citado no es aplicable a los medios dispersantes, a los ferromagnéticos y ferroeléctricos. Sin embargo, la expresión final (5.2) para el vector Umov—Poynting es válida también para estos casos, aunque deberá ser cambiada la expresión para la densidad de la energía electromagnética.

Es importante anotar que el teorema Umov—Poynting da una expresión correcta para el flujo de energía a través de una superficie *cerrada*. Por eso, para el caso general no puede ser formulada como la afirmación de que $S_n\,do$ da la cantidad de energía que pasa por unidad de tiempo a través del área do. Esta interpretación tiene sentido sólo cuando las dimensiones de do son grandes en comparación con la longitud de onda del campo alterno.

$c = 3 \cdot 10^8$ m/s, en otras palabras, coincide con la velocidad de la luz. Este resultado fundamental le dio a Maxwell la idea de que la luz constituye un fenómeno electromagnético. La relación escrita anteriormente de Maxwell $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ permite determinar también la velocidad de fase de la luz (de la perturbación electromagnética) en cualquier dieléctrico. Debido a que $c/v = n$ es el índice de refracción del medio, entonces según Maxwell $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$, es decir, el índice de refracción del medio resulta ser relacionado con las otras constantes, características del medio, más exactamente, con la permeabilidad dieléctrica ε (la permeabilidad magnética para la mayoría de los cuerpos es próxima a la unidad; aparte de esto, para los procesos de frecuencias tan altas, como lo son las ondas luminosas, nosotros podemos, como muestran las investigaciones, considerar la magnitud de la permeabilidad magnética igual a la unidad para cualquier medio).

Investigaciones posteriores mostraron, sin embargo, que el índice de refracción depende de la frecuencia (dispersión) y, por consiguiente, la teoría de Maxwell necesita ser perfeccionada: no se puede utilizar en forma inmediata el valor de la permeabilidad dieléctrica, obtenida del experimento con campos eléctricos constantes (permeabilidad estática), sino que es necesario tomar en cuenta el valor de la permeabilidad dieléctrica que caracteriza el medio bajo la acción del campo eléctrico rápidamente variable (acerca de la permeabilidad dieléctrica dinámica, véase más adelante).

En la actualidad disponemos de amplios datos que demuestran el sólido enlace entre los fenómenos ópticos y los electromagnéticos (electroóptica, magnetoóptica) y de esta manera la teoría electromagnética de la luz está sólidamente fundamentada, tanto desde el punto de vista teórico, como del punto de vista experimental.

§6. Clasificación de las ondas. Concepto de la polarización de las ondas

Al propagarse la onda monocromática nosotros siempre podemos encontrar el lugar geométrico de los puntos que se encuentran en *una* misma fase. Este conjunto de puntos constituye una superficie, que se denomina *frente* de onda. En particular, la superficie, todos los puntos de la cual sufren simultáneamente la perturbación, originada en la fuente en cierto momento t, también será una superficie de fase común, es decir un frente de onda. Es cómodo aplicar esta última definición del frente de onda también en el caso, cuando nosotros trabajamos con un conjunto de ondas monocromáticas salidas de una fuente con diferentes fases (por ejemplo, la emanación monocromática de muchos átomos independientes) o cuando la fuente envía una onda no monocromática (impulso).

Si la fuente de la perturbación es muy pequeña (un punto) y la velocidad de propagación de la perturbación es igual en todas las direcciones (medio isótropo), entonces, por supuesto, el frente de onda debe tener la forma de una superficie esférica con el centro en la fuente. En este caso la onda se llama *esférica*. La ecuación de esta onda monocromática esférica tiene la forma

$$s = \frac{a_0}{r} \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) = \frac{a_0}{r} \operatorname{sen} (\omega t - kr), \tag{6.1}$$

donde a_0 es la amplitud por unidad de distancia r a partir de la fuente. Esta expresión muestra que la amplitud de la onda esférica disminuye proporcionalmente con la distancia hasta la fuente y, por consecuencia, la intensidad de la onda, proporcional al cuadrado de la amplitud, disminuye como el cuadrado de la distancia hasta la fuente, pues la energía que transmite la onda se distribuye por toda el área creciente.

Hablando rigurosamente, la onda esférica corresponde a una fuente de dimensiones puntuales, es decir, constituye una abstracción. Sin embargo, inclusive cuando la fuente es de dimensiones finitas, el frente de onda a distancias r lo suficientemente grandes será, con buena aproximación, una superficie esférica.

En la óptica práctica para muchos problemas se puede considerar esférico al frente, si la distancia r sobrepasa las dimensiones lineales de la fuente diez o más veces. En este caso la ley de la disminución de la intensidad con el cuadrado de la distancia se cumple prácticamente con suficiente exactitud (véase § 7).

El frente de onda se traslada en dirección de la normal a éste. En el caso de la onda esférica, estas normales coinciden con los radio vectores, llamados *rayos*, trazados desde la fuente, a lo largo de los cuales se transmite la perturbación desde la fuente. De esta manera la propagación del frente de la onda esférica se realiza *a lo largo* de los rayos. La coincidencia de la dirección de propagación del frente de onda y de los rayos, que tiene lugar en los medios isótropos, no se observa, en general, en el caso de medios anisótropos (véase § 144)*).

---

*) Por dirección de propagación comprendemos la dirección, a lo largo de la cual se propaga el frente de onda, es decir, la dirección perpendicular a la superficie de fase constante. Comúnmente esta dirección coincide con la dirección de propagación de la energía (con el rayo o vector Umov—Poynting). Por eso, con frecuencia no diferencian estas dos direcciones. Sin embargo, en una serie de casos (por ejemplo, en la cristalocóptica, cuando hay reflexión interna completa) estas dos direcciones no coinciden. Debido a que los vectores de intensidad E y H son siempre perpendiculares al vector Umov—Poynting, entonces en los casos mencionados, por lo menos uno de estos vectores de intensidad no será perpendicular a la dirección de propagación, de manera que la onda electromagnética en el caso dado no es estrictamente transversal. Las investigaciones muestran que estos resultados se refieren al vector E.

Si r es lo suficientemente grande, es decir, si la fuente se encuentra muy lejos de la región de observación, entonces el frente de onda constituye parte de la superficie esférica de radio muy grande. Con una aproximación satisfactoria ésta puede considerarse plana. La onda, cuyo frente constituye un plano se llama onda *plana*. Si los ejes de coordenadas han sido escogidos de tal manera, que el plano del frente es paralelo al plano ZY, entonces la ecuación de esta onda monocromática plana será de la forma:

$$s = a \operatorname{sen} \omega (t - x/v). \tag{6.2}$$

En efecto, de (6.2) se tiene que una superficie de igual fase se define de la condición $x = \text{const}$, es decir, todos los puntos del plano, paralelo a ZY, se encuentran en igual fase.

El frente de la onda plana se desplaza paralelamente a sí mismo, razón por la cual los caminos de los diferentes sectores de la onda plana son paralelos entre sí: la onda plana caracteriza al haz paralelo de rayos.

De acuerdo con esto, la intensidad de onda, es decir la energía que pasa en 1 s a través de un m^2 de superficie, resulta invariable para todos los valores de la coordenada x, y por consiguiente, la amplitud a de onda tampoco depende de x. Es necesario señalar, que la onda plana también es una idealización. En efecto, para que una fuente emita una onda plana, es necesario que aquélla esté infinitamente lejos. Debido a que cualquier fuente real emite por 1 s una energía finita, entonces si la fuente está infinitamente alejada, a cada parte limitada de la onda le corresponderá una energía infinitamente peque-

Son posibles también otros métodos para la formación de una onda plana (de un haz paralelo). Para esto se puede, por ejemplo, colocar la fuente en el foco de algún sistema óptico, colimador. Sin embargo, en este caso tampoco es posible obtener una onda rigurosamente plana, que transmita una cantidad finita de energía. Para que un dispositivo colimador dé un haz estrictamente paralelo, es necesario que la fuente de luz coincida exactamente con el foco del sistema, es decir, que la fuente sea puntual en el sentido matemático de esta palabra. Las fuentes reales, que emiten una cantidad finita de energía, poseen ciertas dimensiones y no se les puede hacer coincidir con el foco de un sistema óptico. Por último, es imposible construir un sistema óptico, desprovisto de algún defecto. En particular, la presencia de la difracción, que en principio es imposible evitar, excluye la posibilidad de crear haces rigurosamente paralelos. El haz obtenido con ayuda de un dispositivo colimador no será, por consiguiente, paralelo en absoluto, y la onda se distinguirá de la plana. De esta manera, una onda rigurosamente plana no tiene sentido real. La onda luminosa, enviada por las estrellas, puede considerarse prácticamente plana: el Sol, cuyo diámetro angular visible es cercano a

0,5°, da una onda notablemente diferente de la plana; separando una parte de esta onda con ayuda de un diafragma, con unas dimensiones tan pequeñas como se quiera en comparación con su distancia hasta el Sol, cortaremos el haz, cuyos rayos extremos forman entre sí un ángulo próximo a 30' (la difracción no se toma en consideración). Un buen dispositivo colimador puede suministrar haces, con un ángulo de divergencia que no sobrepase unas fracciones de minuto, si como fuente se utiliza un agujero pequeño intensamente iluminado, con un diámetro menor que 0,1 mm. Este dispositivo colimador, da por supuesto, relativamente poca luz.

Las leyes generales del movimiento ondulatorio se refieren en igual medida, tanto a las ondas longitudinales, como a las transversales. Por eso muchos fenómenos tienen lugar para ambos tipos de ondas. Sin embargo, en un punto las ondas transversales se distinguen por una particularidad importante. Las oscilaciones longitudinales son simétricas con respecto a la línea de propagación, es decir, su acción sobre cualquier aparato receptor no cambia si este aparato gira alrededor de la dirección de propagación. En el caso de ondas transversales, la acción de las ondas sobre el aparato es diferente y depende del plano, que pasa a través de la línea de propagación, en el cual se efectúa la oscilación transversal. En la figura 2.7 se pueden ver algunas direcciones posibles para las oscilaciones de la onda transversal, que va desde el plano del dibujo hasta el observador.

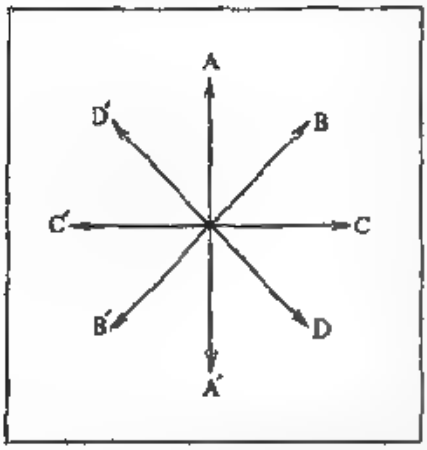


Fig. 2.7. Direcciones de las oscilaciones en una onda transversal natural.

La particularidad señalada de las ondas transversales lleva el nombre de *polarización*. Si la dirección de la oscilación transversal se mantiene en un plano, entonces a la onda la llaman *polarizada en el plano o linealmente*. Son posibles otros tipos más complicados de polarización de la onda transversal, en los cuales la oscilación del vector, a pesar de mantenerse en el plano perpendicular a la dirección de propagación, posee un carácter más complicado (el extremo del vector describe una elipse o una circunferencia, es decir tiene lugar una *polarización elíptica o circular*).

3. CONCEPTOS FOTOMÉTRICOS Y UNIDADES

§ 7. Conceptos fundamentales

La acción de la luz sobre el ojo o cualquier otro aparato receptor consiste antes que nada en la transmisión de la energía llevada por la onda luminosa a este aparato receptor. Por eso antes de estudiar las leyes y los fenómenos ópticos, debemos tener una idea clara acerca de la medición de la luz, o sea de la fotometría, la cual se reduce a la medición de la energía, traída por la onda luminosa, o a la medición de las magnitudes, relacionadas con esta característica energética de uno u otro modo. Ante todo es necesario dar definición a aquellas magnitudes, que figuran en la práctica experimental. La elección de éstas está condicionada por las particularidades de los aparatos receptores, que reaccionan de manera inmediata a algunas de estas magnitudes, y por la posibilidad de la construcción de patrones para la reproducción de estas magnitudes. Al formular las leyes teóricas o los resultados prácticos en los diversos campos (teoría de la radiación, luminotecnia, optotecnia, óptica fisiológica, etc.) frecuentemente resulta más cómoda la utilización de unas u otras de las magnitudes introducidas.

Esto explica la variedad de conceptos fotométricos, a cuyo estudio pasamos.

a. *Flujo de energía radiante* Φ. Imaginemos una fuente de luz con dimensiones tan pequeñas, que a cierta distancia de ella la superficie de la onda que se propaga puede considerarse esférica. Esta fuente comúnmente se llama *puntual*.

Coloquemos en el camino de la energía radiante, que va desde nuestra fuente L (fig. 3.1), alguna superficie pequeña σ y midamos la cantidad de energía Q que pasa a través de esta superficie en un tiempo τ. Con este fin se le puede cubrir con una sustancia que absorba toda la energía incidente (hollín) y medir la energía absorbida, por ejemplo, según el cambio de temperatura. La relación

$$\frac{Q}{\tau} = d\Phi \tag{7.1}$$

muestra la cantidad de energía radiante que pasa a través de la superficie σ por unidad de tiempo, es decir la *potencia* a través de la superficie σ y se llama *flujo* de energía radiante a través de la superficie σ.

Debido a que la energía radiante en un medio homogéneo se propaga en forma rectilínea, entonces al trazar desde el punto L el conjunto de rayos que se apoyan sobre el contorno de la superficie σ, obtendremos un cono, que limita parte del flujo que pasa a través de σ. Si dentro del medio no hay absorción de energía, entonces a

través de cualquier sección de este cono pasará un mismo flujo. La sección del cono de superficie esférica con su centro en L y radio igual a la unidad da la medida de $d\Omega$—ángulo sólido del cono. Si la normal n a la superficie σ forma un ángulo i con el eje del cono y la distancia desde L hasta la superficie es R, entonces

$$d\Omega = \frac{\sigma \cos i}{R^2}. \tag{7.2}$$

De esta manera, al ángulo sólido $d\Omega$ le corresponde la parte del flujo, separada por nosotros. Además consideramos, que las dimensiones lineales de la superficie σ son pequeñas en comparación con R, de manera que $d\Omega$ es una magnitud no grande y dentro de $d\Omega$ el flujo se puede considerar uniforme. El flujo total, que va de L en todas las direcciones, será

$$\Phi = \int d\Phi$$

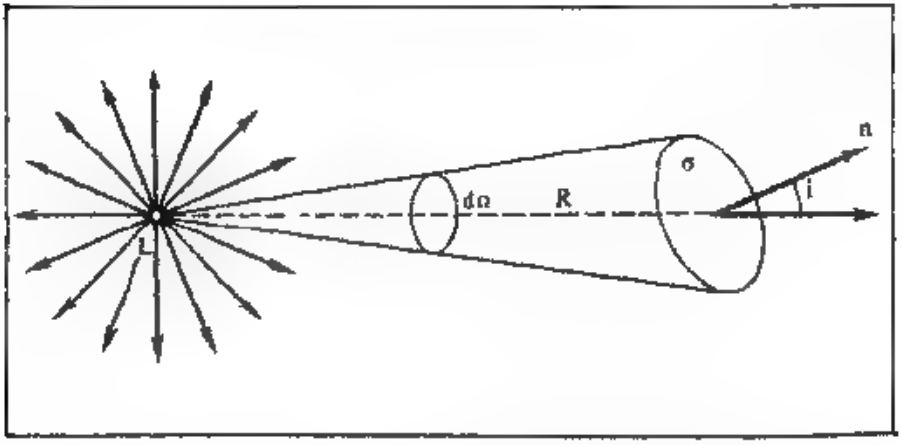


Fig. 3.1. Aclaración del concepto «flujo de energía radiante».

El flujo es un concepto fundamental, necesario para la valoración de la cantidad de energía, que penetra en nuestros aparatos. El conocimiento del flujo es esencialmente necesario en los cálculos de muchos aparatos ópticos. Un receptor como, por ejemplo, la fotocélula, reacciona de manera inmediata al flujo (véase § 95).

b. *Intensidad luminosa* J. La magnitud del flujo por unidad de ángulo sólido se denomina *intensidad luminosa*. Si el flujo Φ es emitido, por nuestra fuente, uniformemente en todas las direcciones, entonces

$$J = \frac{\Phi}{4\pi} \tag{7.3}$$

es la intensidad luminosa, igual para cualquier dirección. En el caso de un flujo no uniforme la magnitud $\Phi/4\pi$ constituye sólo la in-

tensidad media de luz y se llama *intensidad luminosa esférica media*. Para definir la verdadera intensidad de luz en alguna dirección es necesario separar a lo largo de ella un ángulo sólido elemental $d\Omega$, lo suficientemente pequeño, y medir el flujo luminoso $d\Phi$, correspondiente a este ángulo sólido.

La intensidad luminosa en determinada dirección se define por la relación

$$J = \frac{d\Phi}{d\Omega}, \tag{7.4}$$

Caracterizando la dirección escogida con los ángulos de latitud θ y longitud φ en el sistema polar de coordenadas (fig. 3.2), se puede designar la intensidad luminosa en determinada dirección $J_{\theta,\varphi}$. Esta magnitud es función de φ y θ. De la fig. 3.2 se ve, que

$$d\Omega = \operatorname{sen}\theta\, d\theta d\varphi$$

y, por consiguiente,

$$d\Phi = J_{\theta,\varphi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

y el flujo total

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} J_{\theta,\varphi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta. \tag{7.5}$$

Si J no depende de θ y φ (flujo homogéneo), entonces de la expresión general obtenemos

$$\Phi = 4\pi J \tag{7.6}$$

de acuerdo con la relación (7.3).

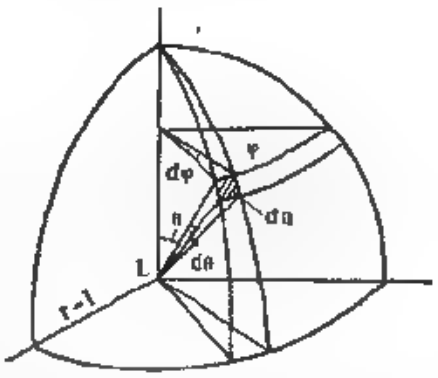


Fig. 3.2. Ilustración para deducir la expresión del ángulo sólido en coordenadas polares.

La magnitud del flujo luminoso completo caracteriza a la fuente radiante y no puede ser aumentada con ningún sistema óptico. La acción de estos sistemas puede reducirse solamente a la *redistribución* del flujo luminoso, por ejemplo, a su mayor concentración en algunas direcciones escogidas. De esta manera se logra aumentar la intensidad luminosa en ciertas direcciones con su correspondiente disminución en las demás direcciones. Así es la acción, por ejemplo, de los aparatos de señales o proyectores que permiten, con ayuda de fuentes poseedoras de una intensidad media esférica de unos cuantos cientos de candelas, crear en el eje del proyector una intensidad luminosa de millones de candelas (véase ejercicio 134).

El patrón fundamental en la técnica de alumbrado es el patrón de intensidad luminosa (véase § 9).

c. *Iluminación E.* Se llama *iluminación E* la magnitud del flujo por unidad de superficie. La iluminación de la superficie σ (las desig-

nociones son las mismas que en la fig. 3.1) es

$$E = \frac{d\Phi}{\sigma} = \frac{J\, d\Omega}{\sigma} = \frac{J \cos i}{R^2}, \qquad (7.7)$$

donde en las dos últimas igualdades ha sido introducida la intensidad luminosa J según (7.4) y se tiene en cuenta (7.2).

La expresión obtenida muestra que la iluminación creada por una fuente *puntual* *) es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde la fuente hasta la superficie y directamente proporcional al coseno del ángulo formado entre la dirección del flujo luminoso (el eje del angosto cono, dentro del cual se propaga el flujo) y la normal a la superficie iluminada. Esta es la ley fundamental para la iluminación creada por una fuente puntual (ley de la inversa de los cuadrados).

En el caso de fuentes *extendidas* podemos dividir la superficie de éstas en sectores elementales (lo suficientemente pequeños en comparación con R) y, después de determinar la iluminación creada por cada uno de ellos según la ley del inverso de los cuadrados, integrar por toda la superficie de la fuente, tomando, por supuesto, en consideración la dependencia de la intensidad luminosa de la dirección. La dependencia de la iluminación con respecto a R resultará entonces más complicada. Sin embargo, para distancias lo suficientemente grandes (en comparación con el tamaño de la fuente) se puede utilizar la ley de la inversa de los cuadrados, es decir, considerar la fuente puntual. Este cálculo simplificado en realidad da buenos resultados si las dimensiones lineales de la fuente no sobrepasan 1/10 de la distancia desde la fuente hasta la superficie iluminada. De esta manera, si un disco uniformemente iluminado de 50 cm de diámetro sirve de fuente, entonces en un punto situado en la normal al centro del disco el error de cálculo, a base de la fórmula simplificada, para una distancia de 50 cm alcanzará aproximadamente el 25%, para una distancia de 2 m no pasará del 1,5% y para una distancia de 5m formará un total de 0,25%.

Cambiando con ayuda de espejos y lentes la distribución del flujo luminoso, nosotros podemos concentrarlo en determinados sectores de la superficie y, de esta manera, aumentar la iluminación de éstos, disminuyendo simultáneamente la iluminación del resto de la superficie. En particular, justamente este fin tienen los diferentes accesorios (lámparas), los cuales generalmente acompañan a las fuentes de luz, destinadas a iluminar los locales, los escritorios, las calles, etc.

---

*) Es decir, por una fuente de dimensiones pequeñas en comparación con la distancia hasta la superficie iluminada, y de flujo uniforme en todas las direcciones.

Debido a que en la mayoría de los casos nosotros percibimos objetos no autoluminiscentes, el concepto de iluminación adquiere un gran significado. La mayoría de los problemas de la luminotecnia, se reduce a la creación de una iluminación favorable. En «Las normas de iluminación» se exponen las exigencias para una iluminación racional de los lugares de trabajo.

d. Luminancia (brillo fotométrico) de la fuente B. Para muchos cálculos luminotécnicos se puede, como hemos visto, considerar algunas fuentes como puntuales, es decir, despreciar sus dimensiones frente a las distancias, a las que se observa su acción. Sin embargo, muchas de estas fuentes son tan grandes, que nosotros, a simple vista, podemos ver su forma, en otras palabras, las dimensiones de la superficie de la fuente se encuentran dentro de los límites de la capacidad del ojo o del instrumento de diferenciar un cuerpo extendido de un punto. Con relación a estas fuentes, que constituyen la gran mayoría, se introduce el concepto de *luminancia de la superficie* (o simplemente *luminancia*), no aplicable a fuentes que están fuera de los límites del poder de resolución (por ejemplo, las estrellas) La luminancia B de una superficie es la magnitud característica de la radiación de la superficie luminosa en determinada dirección, definida por el ángulo i que forma esta dirección con la normal a la superficie luminosa.

Separemos el haz, que se apoya en la superficie elemental σ y que forma un ángulo sólido $d\Omega$; el eje del haz forma un ángulo i con la normal n a σ (fig. 3 3). La superficie visible del elemento en dirección del eje es $\sigma \cos i$. Sea el flujo, emitido por ella en el ángulo sólido $d\Omega$, igual a $d\Phi$. El flujo emitido es proporcional a la superficie *visible* $\sigma \cos i$ del emisor de radiaciones, y a la magnitud del ángulo sólido $d\Omega$. El coeficiente de proporcionalidad depende de las propiedades de la superficie emisora y puede ser distinta para diferentes ángulos i con la normal. Al designar B_i a este coeficiente, encontraremos

$$d\Phi = B_i \sigma \cos i d\Omega$$

o bien

$$B_i = \frac{d\Phi}{\sigma \cos i \, d\Omega}. \qquad (7.8)$$

El coeficiente B_i lleva el nombre de *luminancia* de la fuente en la dirección definida por el ángulo i. De esta manera, se llama luminancia en determinada dirección al flujo, emitido en una dirección dada por unidad de superficie visible dentro de la unidad del ángulo sólido.

La luminancia B_i es una magnitud que depende de la dirección, sin embargo para algunas fuentes puede no depender de ella. A estas fuentes se les llama fuentes que obedecen la *ley de Lambert*. Hablando estrictamente, sólo un cuerpo negro es una fuente de este tipo; una superficie mate o un medio turbio, cada sector de los cuales realiza una difusión uniforme de la luz en todas direcciones, son ejemplos

más o menos aceptables de fuentes de Lambert. Si tales medios se rigen por la ley de Lambert, se les puede llamar *difusores ideales*.

Una superficie iluminada, cubierta con óxido de magnesio, o una campana de cristal opalino iluminada por dentro son ejemplos de fuentes, lo suficientemente próximas a las de Lambert. La superficie del Sol irradia según una ley muy cercana a la de Lambert, aunque ya Bouguer estableció experimentalmente que la luminancia del Sol disminuye algo al alejarnos del centro hacia la periferia, teniendo a la distancia de 3/4 del radio una luminancia cercana al 80% de la del centro del disco.

Veamos un disco luminoso plano S (fig. 3.4) y una semiesfera luminosa S'. Supongamos que ambas superficies responden a la ley de Lambert y tienen igual luminancia B. Entonces los flujos luminosos, emitidos por los correspondientes sectores del disco y de

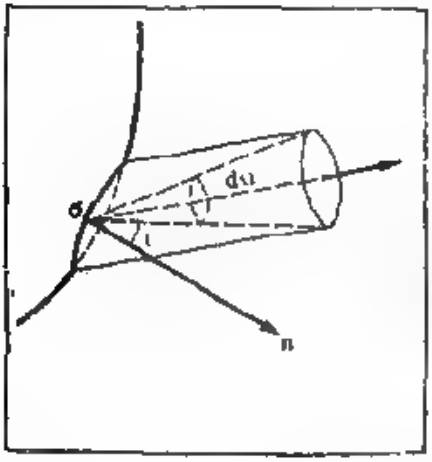


Fig. 3.3. Aclaración del concepto de luminancia de una fuente extendida.

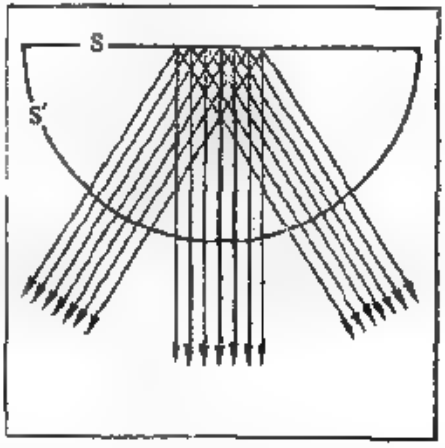


Fig. 3.4. Un disco plano y una semiesfera, que se subordinan a la ley de Lambert, parecen igualmente brillosos.

la esfera en cualquier dirección, serán iguales, puesto que la superficie visible de ellos es la misma y la luminancia según la condición inicial no depende de la dirección. De esta manera, si disco luminoso no se diferencia de la semiesfera luminosa, si ambos se rigen por la ley de Lambert. Por ejemplo, el Sol, observado de manera no muy escrupulosa, nos parece un disco plano con luminancia uniforme; esto demuestra que el Sol es una fuente que obedece lo suficientemente bien a la ley de Lambert.

El conocimiento de la luminancia es esencialmente necesario para investigar los objetos autoluminiscentes, en particular, las fuentes de luz. Nuestra vista reacciona de manera inmediata a la

luminancia de la fuente (véase § 10). El concepto luminancia se utiliza también en la teoría de radiación (véase cap. XXXVI).

e *Luminosidad* S. Al concepto luminancia está íntimamente ligado el concepto *luminosidad* (o emitancia luminosa) S, que constituye una magnitud integral, es decir, el flujo total emitido por una unidad de superficie al exterior *en todas las direcciones* (dentro del ángulo sólido 2π). De esta manera,

$$S = \frac{\Phi}{\sigma}, \tag{7.9}$$

si Φ es el flujo total enviado por la superficie luminosa al exterior en todas las direcciones.

La luminosidad y la luminancia están relacionadas entre sí por una expresión muy simple. El flujo, dentro del ángulo sólido $d\Omega$, en la dirección i será

$$d\Phi = B_i \sigma \cos i d\Omega = B_i \sigma \operatorname{sen} i \cos i \, di \, d\varphi,$$

pues

$$d\Omega = \operatorname{sen} i \, di \, d\varphi,$$

donde φ es el ángulo azimutal. Para calcular el flujo, emitido por la superficie σ, es necesario integrar esta expresión por todos los valores de i y φ, que definen la dirección dentro de la semiesfera, es decir, respecto a i entre los límites cero y $\frac{\pi}{2}$, y por φ entre cero y 2π. De esta manera, el flujo total (se supone la independencia de B_i de φ)

$$\Phi = \int d\Phi = \sigma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} B_i \operatorname{sen} i \cos i \, di = 2\pi\sigma \int_0^{\frac{\pi}{2}} B_i \operatorname{sen} i \cos i \, di.$$

Al mismo tiempo, el mismo flujo puede ser expresado a través de la luminosidad S:

$$\Phi = \sigma S.$$

De esta manera, la relación entre la luminosidad y la luminancia se expresa por la fórmula

$$S = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} B_i \cos i \operatorname{sen} i \, di. \tag{7.10}$$

Para las fuentes que obedecen a la ley de Lambert $B_t = B$, es decir, no depende de t. En este caso tenemos

$$S = 2\pi B \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \operatorname{sen} t \, dt = \pi B. \tag{7.11}$$

La luminosidad es un concepto muy cómodo para muchos cálculos. Nosotros trataremos de ella en la teoría de radiación.

La relación $\Phi = \sigma S$ muestra, que la luminosidad tiene las mismas unidades de medida, que la iluminación E, y representa el flujo por unidad de superficie. La luminosidad caracteriza la *luminiscencia* de la superficie, es decir, el flujo que *se aleja* de una unidad de superficie; a su vez la iluminación E caracteriza el *alumbramiento* de la superficie, es decir, el flujo que *llega* a una unidad de superficie.

f. *Intensidad del flujo luminoso* R. Para caracterizar el campo luminoso se puede también introducir el concepto *intensidad del flujo luminoso* por la cual se comprende la magnitud del flujo luminoso que pasa a través de una unidad de sección visible en la dirección, definida por el ángulo t formado por la dirección del flujo y la normal a esta sección, dentro de una unidad de ángulo sólido:

$$R = \frac{d\Phi}{\sigma \cos t \, d\Omega}. \tag{7.12}$$

De esta manera, la intensidad del flujo luminoso como característica del campo luminoso, desempeña el mismo papel, que la luminancia como característica de la superficie luminosa. Por eso a ella la llaman frecuentemente *luminancia del flujo luminoso*.

De lo dicho anteriormente debe quedar claro, que una gran cantidad de conceptos, relacionados con la energía transmitida por la luz, está condicionada, en última instancia, por la ley de propagación rectilínea de la luz, según la cual la energía luminosa puede transmitirse de diferentes maneras en distintas direcciones y a través de elementos de superficie situados en diferentes puntos. La luminancia (o intensidad) que define la potencia propagada en cierta dirección cerca de un punto determinado del espacio, representa la característica más diferenciada del campo luminoso. La intensidad luminosa caracteriza la potencia, que también se propaga en determinada dirección, pero de toda la superficie de la fuente extendida. La iluminación y la luminosidad son medidas de la potencia que se propaga cerca de algún punto determinado del espacio en todas las direcciones. Por último, el flujo, como potencia transmitida en todas las direcciones a través de cierta superficie, es la característica más integral. Las ideas expuestas se ilustran con mucha claridad mediante

las relaciones entre las magnitudes introducidas y la luminancia:

$$I = \int B_l \cos i \, d\sigma, \quad E = \int B_l \cos i \, d\Omega, \quad \Phi = \int\int B_l \cos i \, d\sigma \, d\Omega.$$

En dependencia de la destinación y estructura del aparato registrador, los resultados de las mediciones pueden ser expresados, de manera natural, a través de una u otra magnitud fotométrica.

Al observar, por ejemplo, las estrellas, el ojo reacciona a la luz emitida en dirección del observador por toda la superficie de la estrella; por consiguiente, en este caso es cómodo hablar de la intensidad luminosa de la estrella. En los aparatos fotográficos no importa, de dónde llegó la luz a tal o cual punto de la película y ocasionó su ennegrecimiento, es decir, la película realiza la integración de energía respecto a los ángulos; por eso en ellos se registra la iluminación. En los aparatos con receptores fotoeléctricos o térmicos de radiación se mide, por regla general, el flujo total incidente en toda la superficie del receptor por todas las direcciones

Las unidades energéticas de medición de las magnitudes fotométricas introducidas dependen, como es natural, de la elección del sistema de unidades En el sistema SI el flujo se mide en vatios, la iluminación y la luminosidad en W/m^2, la intensidad luminosa en W/sr, la luminancia y la intensidad en $W/(m^2 \cdot sr)$. Hacemos notar, sin embargo, que en los experimentos ópticos rara vez surge la necesidad de calcular el flujo, que pasa a través de una superficie de dimensiones lineales cercanas al metro Por regla general, se trata de superficies con dimensiones de orden de centímetros (lentes, espejos y otros elementos de los aparatos) o de milímetros (la imagen). Por eso no es cómodo relacionar la potencia a 1 m^2, y en la literatura científica frecuentemente se utilizan las unidades $W/cm^2 = 10^4 W/m^2$ y $W/mm^2 = 10^6 W/m^2$.

§ 8. Paso de las magnitudes energéticas a las luminosas

Hasta ahora hemos expresado el flujo y todas las magnitudes relacionadas con él en unidades comunes de energía y potencia, por ejemplo, julio y vatio. Mediciones energéticas de este género se realizan cuando el receptor de luz es un receptor universal, por ejemplo, el termoelemento, el cual se basa en la transformación de la energía luminosa absorbida en calorífica. Sin embargo, es necesario tener en cuenta, que con mayor frecuencia utilizamos como receptores aparatos especiales, que reaccionan no sólo a la energía transportada por la luz, sino también a su composición espectral. Estos receptores *selectivos*, bastante difundidos, son la placa fotográfica, la fotocélula

y, en particular, el ojo humano, que desempeña un papel excepcionalmente importante en la percepción diaria de la luz y como receptor de la radiación que entra en muchos aparatos ópticos. De acuerdo con esto en numerosas mediciones fotométricas es necesario tener en cuenta las particularidades del ojo que separan un reducido sector de longitudes de onda de toda la variedad de oscilaciones electromagnéticas. Frecuentemente, al utilizar el término «luz», se tiene en cuenta justamente este reducido intervalo de ondas, comprendido aproximadamente entre 400 y 800 nm. Desde este punto de vista adquiere importancia no tanto la percepción de la energía, sino que su *percepción luminosa*. Por eso es necesario establecer el paso de las magnitudes energéticas a las magnitudes características de la percepción luminosa e introducir racionalmente un sistema especial de unidades, adaptado a las propiedades del ojo humano.

La sensibilidad del ojo a la luz de diferente longitud de onda se puede caracterizar por *la curva de sensibilidad relativa*. Como abscisa de esta curva se emplean las longitudes de onda λ y como ordenada, las sensibilidades relativas del ojo v_λ, es decir, las magnitudes inversamente proporcionales a las potencias de radiación monocromática, que producen igual sensación visual. A pesar de la subjetividad de estas apreciaciones, la reproducción de éstas es suficientemente buena, y la curva de sensibilidad relativa, según muestran las mediciones, no cambia sensiblemente para diferentes observadores. Sólo en muy pocas personas la vista diverge notoriamente de la norma.

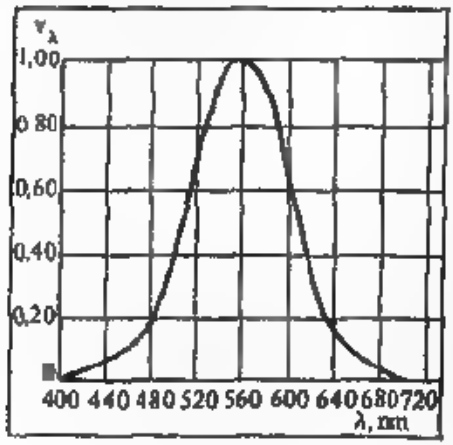


Fig. 3.5. Curva de sensibilidad relativa.

Basándose en numerosas mediciones fue establecida la forma de la curva de sensibilidad relativa, que caracteriza el ojo normal medio. Esta curva tiene su máximo cuando $\lambda = 555$ nm, condicionalmente tomado por unidad. La curva, confirmada por la Comisión Internacional de Iluminación, está representada en la fig. 3.5. Los valores numéricos de las ordenadas de esta curva se dan en la tabla 3.1. De esta tabla se desprende que, por ejemplo, para ocasionar una sensación visual de igual intensidad para $\lambda = 760$ nm se requiere una intensidad aproximadamente 20 000 veces mayor que para $\lambda = 550$ nm.

Tabla 3.1. Valores de la sensibilidad relativa

λ, nm	v_λ	λ, nm	v_λ	λ, nm	v_λ
400	0,0004	520	0,710	640	0,175
410	0,0012	530	0,862	650	0,107
420	0,0040	540	0,954	660	0,061
430	0,0116	550	0,995	670	0,032
440	0,023	560	0,995	680	0,017
450	0,038	570	0,952	690	0,0082
460	0,060	580	0,870	700	0,0041
470	0,091	590	0,757	710	0,0021
480	0,139	600	0,631	720	0,00105
490	0,208	610	0,503	730	0,00052
500	0,323	620	0 381	740	0,00025
510	0,503	630	0,265	750	0,00012
				760	0,00006

2. Unidades de mediciones fotométricas

Considerando el ojo como receptor de energía luminosa la Comisión Internacional de Iluminación (CIE) definió *el flujo luminoso como un flujo de energía radiante valorizada según la sensación visual.*

De esta manera, a pesar de la introducción del concepto visión media, el método existente de valorización conserva todavía cierto enlace con los conceptos sicofisiológicos, pues en la medición se hace participar la sensación visual. La sustitución de la visión media por un receptor físico equivalente, por ejemplo, una fotocélula con una curva de sensibilidad correspondientemente escogida, permitiría realizar estas mediciones con una total objetividad por la corriente fotoeléctrica aparecida.

Para la realización de un determinado flujo luminoso y de otras magnitudes fototécnicas se emplea un patrón condicional. Por un acuerdo internacional del 1 de enero de 1948 ha sido introducido un nuevo patrón reproducible, a base de un cuerpo negro (véase § 197), que se emplea a la temperatura de solidificación del platino puro (2046,6 K). El patrón debe hacerse por un determinado esquema con observación de ciertas exigencias para la pureza del platino. En la URSS este patrón fue hecho por el laboratorio fotométrico del Instituto de Investigación Científica de Metrología.

La estructura y las dimensiones del emisor de radiaciones, que sirve de patrón luminoso, se muestran en la fig 3 6 El calentamiento y la fundición del platino se realiza por corrientes de alta frecuencia. El emisor de luz es el tubito 2, cuyas paredes tienen en toda su lon-

gitud igual temperatura gracias a su contacto con el platino caliente.*)

La unidad de *intensidad* luminosa es la *candela* (cd) que es igual a la intensidad de luz emitida, en la dirección normal, desde cada 1/60 cm^2 de superficie del patrón luminoso indicado.

Antes de la introducción del nuevo patrón como principal unidad de intensidad luminosa se utilizaba la *bujía internacional*, que se confeccionaba con lámparas eléctricas de especial estructura y era igual a 1,005 cd**).

La unidad de *flujo luminoso* es el *lumen* (lm), es decir el flujo emitido por una fuente de luz de 1 cd dentro del ángulo sólido de 1 estereorradián. Si la fuente posee una intensidad de luz de 1 cd en *cualquier* dirección, entonces ella crea un flujo luminoso total igual a 4π lm = 12,5 lm. El nuevo patrón luminoso emite en dirección normal desde un cm^2 un flujo igual a 60 lm/sr.

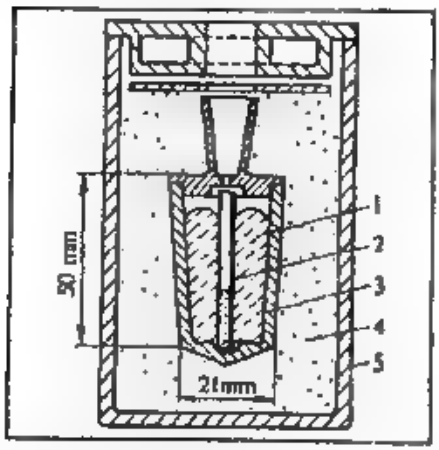


Fig. 3.6. Patrón estatal de la URSS.
1—platino; 2—tubito de óxido fundido de torio, 3—recipiente de óxido fundido de torio; 4—relleno de óxido de torio, 5—recipiente de cuarzo.

La unidad de *iluminación*, el *lux* (lx), es la iluminación correspondiente al flujo de 1 lumen, uniformemente distribuido en una superficie de 1 m^2:

1 lx = 1 lm/1 m^2.

De esta manera, 1 lx es la iluminación creada en la superficie de una esfera de 1 m de radio, en cuyo centro se encuentra una fuente de 1 cd de intensidad que emite la luz uniformemente en todas direcciones.

La luminosidad, al igual que la iluminación, se expresa en lm/m^2, pero en este caso esta magnitud se refiere al flujo *emitido* y no al *recibido*.

Como unidad de *luminancia* se emplea la luminancia de una superficie, cada m^2 de la cual emite lux con una intensidad luminosa de

*) Este mismo patrón fue admitido como base de las unidades fotométricas en el Sistema Internacional de Unidades (SI), que rige desde el 1 de enero de 1963.

**) La lámpara de mecha de determinada construcción, en la cual arde amilacetato puro y que se utiliza en algunas mediciones de laboratorio, no puede servir de patrón de intensidad luminosa. La llamada bujía de Heiner es de cerca de 0,90 cd. La distribución de energía de la bujía de Heiner, según las longitudes de onda, está bien estudiada; justamente por eso ella ofrece interés para fines experimentales como una fuente de luz relativamente fácil de reproducir y con características bien conocidas.

1 cd en dirección perpendicular a sí misma. De esta manera la unidad de luminancia es la «candela por metro cuadrado».

Junto a la unidad cd/m² en la literatura científica se utilizan muchas otras unidades, enumeradas a continuación.

Nombre	Símbolo	Valor en cd/m²
nit	nt	1
stilb	sb	10^4
apostilb	asb	$1/\pi$
lambert	lb	$10^4/\pi$

El nit es, por supuesto, otro nombre de cd/m². El stilb responde a la luminancia de una superficie, que da una intensidad luminosa de 1 cd por cada cm². El sentido físico de las magnitudes apostilb y lambert está relacionado con la luminancia de una superficie difusora ideal, en la cual ha sido creada determinada iluminación.

Se llama superficie difusora ideal a aquélla que difunde en su totalidad el flujo incidente sobre ella uniformemente en todas las direcciones, de tal manera que su luminancia no depende de la dirección (se cumple la ley de Lambert). Un difusor ideal, la iluminación del cual se reduce a 1 lux, de cada metro cuadrado y en todas direcciones realiza una difusión completa del flujo que incide sobre él, es decir, 1 lumen por cada metro cuadrado. De esta manera, basándose en la relación $S = \pi B$ (§ 7) él posee una luminancia de $1/\pi = 0{,}318$ cd/m². Así, 1 apostilb = 0,318 cd/m² es la luminancia de un difusor ideal, en el cual ha sido creada una iluminación de 1 lux.

Tabla 3.2. Luminancia de diferentes cuerpos luminosos

Fuente	Luminancia, cd/m²
Cielo nocturno sin luna	cerca de $1 \cdot 10^{-4}$
Lámpara de neón	$1 \cdot 10^3$
Luna llena vista a través de la atmósfera	$2{,}5 \cdot 10^3$
Llama de una vela esteárica	$5 \cdot 10^3$
Cielo diurno despejado	$1{,}5 \cdot 10^4$
Lámpara de descarga luminiscente	$5\ 10^4$
Filamento metálico de una bombilla	$1{,}5\text{-}2\ 10^6$
Espiral de una lámpara llena de gas	$5 \cdot 10^6$
Cráter de un arco de carbón	$1{,}5 \cdot 10^8$
Sol	$1{,}5 \cdot 10^9$
Arco capilar al mercurio de presión superalta	$4 \cdot 10^8$
Lámpara esférica de mercurio a presión superalta	$1{,}2 \cdot 10^9$
Tubo estroboscópico de impulsos	$1 \cdot 10^{11}$

El lambert responde, lógicamente, a la luminancia de un difusor ideal, en el cual ha sido creada una iluminación de 10^4 lx = 1 lm/cm^2.

Las luminancias de diferentes cuerpos luminosos se diferencian mucho. La tabla 3.2 da una idea acerca de esta diversidad.

La intensidad, así como la luminancia, se expresa en cd/m^2.

Disponiendo de un patrón, que dé determinado flujo luminoso, expresado en lumen, se podría definir este flujo en vatios y determinar la relación entre las unidades fotométricas y energéticas. Sin embargo, conviene tener en cuenta que, a consecuencia de la marcada diferencia de sensibilidad del ojo a las diferentes longitudes de onda, la comparación podría caracterizar solamente el rendimiento económico del patrón utilizado y no diría nada acerca de la sensibilidad energética del ojo. Por eso el factor de conversión, que representa, en vatios, la potencia necesaria para provocar la sensación luminosa ocasionada por el flujo de 1 lumen, se acostumbra medir para un intervalo pequeño de longitudes de onda, correspondiente al máximo de sensibilidad del ojo, que es justamente $\lambda = 555$ nm. Este factor A lleva el nombre de *equivalente mecánico de la luz*. Según las últimas mediciones es

$$A = 0{,}00160 \text{ W/lm}.$$

Debido a la dificultad de la medición de esta magnitud y a la necesidad de promediar los resultados de muchos observadores, la exactitud de A no sobrepasa el 2—3%.

Para mayor comodidad nosotros comparamos todas las unidades fotométricas y energéticas en la tabla 3.3.

Tabla 3.3. Unidades fotométricas y energéticas

Magnitudes	Designaciones	Unidad fotométrica	Símbolo	Unidad energética
Flujo luminoso	Φ	lumen	lm	vatio
Intensidad luminosa	J	candela	cd	vatio/estereorradián
Luminancia	B	candela/m^2	cd/m^2	vatio/(estereorradián·m^2)
Luminosidad	S	lumen/m^2	lm/m^2	vatio/m^2
Iluminación	E	lux	lx	vatio/m^2

El conjunto de conceptos y magnitudes fotométricos establecidos en calidad de unidades para las correspondientes mediciones darán la posibilidad de caracterizar la acción de la luz sobre nuestros aparatos e instalaciones.

§ 10. Mediciones fotométricas (fotometría)

Las mediciones fotométricas se subdividen en *objetivas* (realizadas con ayuda de aparatos y que no exigen la intervención del ojo, por ejemplo, con ayuda de fotocélulas) y las *subjetivas*, o *visuales*, en las cuales las mediciones se basan en la indicación del ojo.

En los últimos años los fotómetros objetivos (fotoeléctricos) tienen cada vez mayor desarrollo, desplazando progresivamente los aparatos basados en los métodos visuales de medición. Nosotros estudiaremos más detalladamente estos aparatos en el capítulo dedicado al fotoefecto. Señalemos solamente que todos ellos están basados en la proporcionalidad directa existente entre la corriente fotoeléctrica y el flujo luminoso absorbido por la fotocélula. Por eso la escala del aparato eléctrico de medición, unido con la fotocélula, puede ser graduada inmediatamente en cualquier unidad fotométrica, por ejemplo en lux.

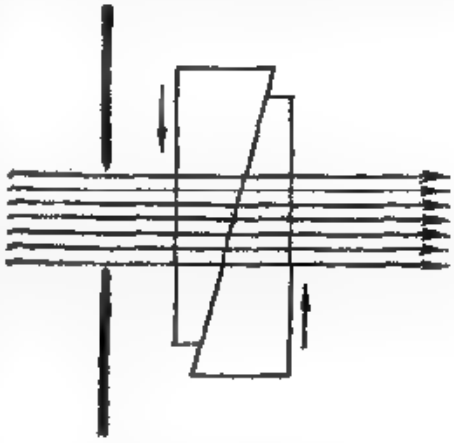


Fig. 3.7. Debilitador fotométrico: cuña absorbente.

Las mediciones visuales se llevan a cabo directamente con ayuda del ojo. Pero se debe tener en cuenta, que el ojo establece muy bien la *igualdad* de iluminación de dos superficies cualesquiera que se encuentran en contacto, pero no puede valorar bien, cuántas veces la iluminación de una superficie sobrepasa la de la segunda. Por eso todos los aparatos, que sirven para la comparación de dos fuentes (los llamados fotómetros), están construidos de tal manera, que el papel que desempeña el ojo se reduce al establecimiento de la igualdad de la iluminación de dos campos en contacto, alumbrados por las fuentes que se comparan. Para alcanzar la igualdad de las iluminaciones se utiliza una serie de métodos, que debilitan la iluminación creada por la fuente más fuerte. En principio el método más sencillo consiste en cambiar la distancia entre la fuente y el fotómetro y utilizar la relación

$$J_1/J_2 = r_1^2/r_2^2. \qquad (10.1)$$

La imposibilidad de variar la relación de las distancias dentro de unos límites más amplios obliga a recurrir a otros métodos para el debilitamiento del flujo. Entre ellos: la absorción de la luz por un filtro de espesor variable (cuña) (fig. 3.7) o por redes con mayor

o menor relacion entre el área de sus agujeros y el de los alambres, la introducción en el haz de un círculo giratorio con un corte sectorial de mayor o menor área (fig. 3.8) y también el debilitamiento de la luz mediante un sistema de prismas de polarización (fig. 3 9)

La utilización de todos estos mecanismos exige cierta precausión La ley de la inversa de los cuadrados es válida sólo para las fuentes puntuales (véase § 7) los filtros deben absorber, en igual medida, la luz de diferente longitud de onda (filtros neutrales); las redes no deben dar sombra y por eso se utilizan preferentemente en unión con lentes, cerca de los cuales se sitúan. Por último, los sectores giratorios no cambian, en esencia, el flujo sino el *tiempo* de su acción y, por consiguiente, son útiles sólo cuando la disminución del valor medio del flujo en el tiempo es equivalente a la disminución de la magnitud del flujo; esto ocurre, como muestran las investigaciones

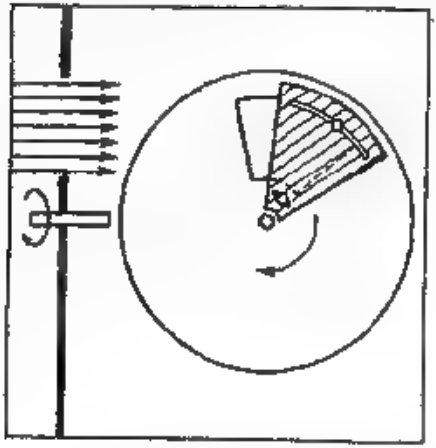


Fig. 3.8. Debilitador fotométrico: disco giratorio seccionado

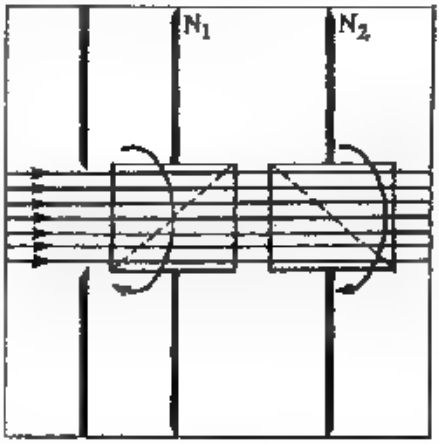


Fig. 3.9. Debilitador fotométrico. sistema de dos prismas polarizadores.
La luminancia de la luz transmitida depende del ángulo de giro de los prismas alrededor del eje horizontal.

psicofisiológicas, solamente cuando es suficiente la frecuencia de la discontinuidad (ley de Talbot).

Igualando con algún método las iluminaciones, creadas por las fuentes en comparación, nosotros encontraremos la relación de las intensidades luminosas de las fuentes

$$J_1/J_2 = k.$$

Si la intensidad de alguna de las fuentes es conocida (fuente patrón), se puede valorar la intensidad de la segunda fuente en una dirección escogida. Habiendo medido la intensidad de la fuente en diferentes direcciones, se puede calcular el flujo luminoso, la ilumi-

nación, etc. La comprobación de la igualdad de las iluminaciones se hace a ojo con suficiente exactitud, si ambos campos tienen el mismo color. En caso contrario la comparación no sólo se dificulta, sino que a veces no tiene sentido. Para comparar fuentes de diferente color (fotometría heterocromática) se parte del establecimiento de igualdad de las iluminaciones, basándose en diferentes observaciones psicofisiológicas, las cuales sirven de base para las mediciones (por ejemplo, la desaparición del fenómeno de centelleo al iluminar con luz discontinua de diferente intensidad y diferente color).

Existen también fotómetros, que permiten de manera inmediata determinar el flujo luminoso total y, por consiguiente, la intensidad media esférica luminosa de la fuente (fotómetro esférico o integrador), la iluminación de la superficie (luxímetro), la luminancia de la fuente, etc.

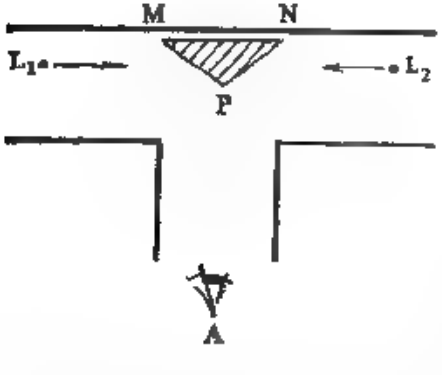


Fig. 3.10. Esquema del fotómetro más simple

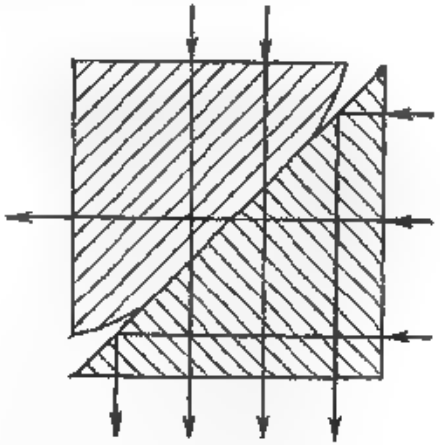


Fig. 3.11. Cubo fotométrico de Lummer.

En todo fotómetro se observa cierto campo, parte del cual está iluminada sólo por una fuente y la otra, solamente por otra fuente. Por lo tanto, es necesario lograr que ambas partes del campo del fotómetro, que se comparan, se iluminen por las correspondientes fuentes bajo un mismo ángulo; el ojo del observador también debe ver ambos campos bajo ángulos iguales. La fig. 3.10 muestra cómo se realiza este principio en uno de los modelos más simples de fotómetros.

La estructura de este fotómetro es extremadamente simple: el ojo A del observador mira al prisma blanco triangular MPN ubicado dentro del tubo ennegrecido y alumbrado por las fuentes L_1 y L_2. Variando las distancias entre las fuentes y el prisma, se puede igualar la iluminación de las superficies MP y PN. Para medir có-

modamente las distancias L_1P y L_2P los aparatos se fijan en un banco óptico

El fotómetro de Lummer—Brodhum tiene una construcción más perfecta. La parte esencial del fotómetro la compone el cubo de Lummer, que es también parte componente de muchos otros aparatos fotométricos. El cubo de Lummer (fig. 3.11) consta de dos prismas rectangulares, en uno de los cuales la arista correspondiente a la hipotenusa es plana sólo en el centro, los bordes están rebajados por rectificación. Los prismas se esmerilan cuidadosamente y se adhieren fuertemente el uno contra el otro, de tal manera, que en el lugar de contacto se comportan como si fuera un solo cuerpo transparente (contacto óptico).

El esquema del fotómetro con la utilización del cubo de Lummer se puede ver en la fig. 3.12. Aquí L_1 y L_2 son las dos fuentes luminosas en comparación; S, la pantalla blanca de esparción difusa de la luz, completamente idéntica por ambos lados; S_1 y S_2, dos espejos auxiliares; P_1P_2, el cubo de Lummer; A, el ojo del observador y V, la lupa que permite visar la superficie de separación del cubo. Al observar el cubo vemos su centro alumbrado por rayos que van desde la fuente L_1, y la parte externa del campo es alumbrada por los rayos de L_2 que sufren reflexión interna total en el borde P_1P_2. Si la iluminación de la pantalla S es igual por ambos lados, el límite entre ambos campos desaparece. Al medir las distancias correspondientes L_1S y L_2S, encontraremos la relación de las intensidades luminosas de las fuentes.

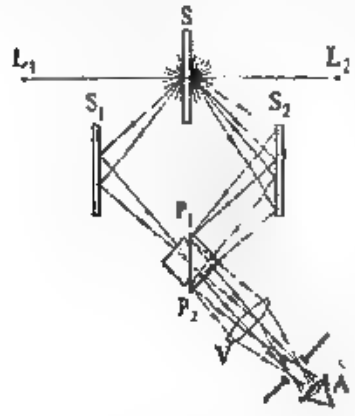


Fig. 3.12. Esquema del fotómetro de Lummer—Brodhum.

Para la técnica de alumbrado tiene mucha importancia cuán intensa debe ser la *iluminación* en determinado plano o en determinado lugar del local de trabajo para distinto género de ocupaciones: lectura, dibujo, costura, etc.

Como mencionamos anteriormente la iluminación se mide en lux. Las instrucciones de la inspección de protección del trabajo establecen un número determinado de lux para la iluminación del lugar de trabajo. Para cualquier clase de trabajo la iluminación de la superficie de trabajo (la mesa) no debe ser menor de 10 lx. La iluminación con la cual se cose igual de cómodo que con luz diurna difusa, es de 60 lx. Con una iluminación del orden de un lux se lee con dificultad.

La Luna llena en un cielo despejado da una iluminacion de una a dos décimas de lux. Esta iluminación resulta suficiente al piloto para un bombardeo de precisión; por consiguiente, esta iluminación no se debe permitir en un fotocamuflaje. Una iluminación de centésimas de lux (luna nueva) permite ejecutar ciertos tipos de trabajo por la noche, por ejemplo, trabajos de excavación. Una iluminación de milésimas de lux (cielo estrellado), al parecer, es admisible para el fotocamuflaje y de diezmilésimas de lux permite orientarse con dificultad por la noche.

Existen modelos especiales de fotómetros, adaptados para una inmediata determinación de la iluminación (luxímetros). En los últimos años, como luxímetros se emplean con éxito fotocélulas, con escalas adecuadamente graduadas.

Sólo una fuente puntual puede dar en cualquier dirección la misma intensidad luminosa y, por consiguiente, para caracterizarla es suficiente realizar una medición en el banco óptico. Para fuentes reales la intensidad de la luz en diferentes direcciones es distinta, de manera, que para caracterizar totalmente la distribución de la luz de la fuente es necesario realizar mediciones en diferentes azimutes. Los diagramas de este tipo (en coordenadas polares) son extraordinariamente demostrativos (fig. 3.13). En los casos, cuando la fuente es una bombilla colocada en su respectiva armadura (lámpara), los diagramas pueden adquirir formas bastante asimétricas (por ejemplo para los faros automovilísticos).

En muchos casos es suficiente saber la intensidad *media esférica* luminosa, es decir, el valor del flujo total emitido por la fuente y no su distribución en las diferentes direcciones. Esta medición puede ser realizada mediante *fotómetros integrales*. El fotómetro *esférico* de Ulbricht es uno de estos fotómetros. La fuente a investigar se cuelga dentro de la esfera hueca K (fig. 3.14), cuya superficie interna está cubierta de una pintura blanca mate. La pantalla blanca mate S protege el agujero O, en la superficie de la esfera, de la acción de los rayos directos de la fuente. Si la reflexión de la luz en la superficie interna de la esfera K se rige por la ley de Lambert, entonces la iluminación E del agujero O es proporcional al flujo luminoso total Φ de la lámpara:

$$E = c\Phi, \tag{10.2}$$

donde c es el factor de proporcionalidad, dependiente de las dimensiones de la esfera y de su coloración. Este factor se termina experimentalmente cambiando la lámpara que se investiga por otra ya investigada. El agujero O está cubierto por un disco de vidrio opalino.

Para medir E se determina la luminancia de este disco con un fotómetro común en el banco óptico o con cualquier otro. Generalmente se emplean las esferas Ulbricht con un diámetro no menor de 1 m. Con frecuencia también se utilizan esferas más grandes.

El método elaborado por el académico S. I. Vavílov y conocido con el nombre de «método de extinción» es una variedad particular del método visual empleado para la medición de pequeñas luminancias. S. I. Vavílov consideraba a Francois Marie (1700) como el creador de este método, pero es necesario señalar que sólo después de unas cuidadosas investigaciones de S. I. Vavílov este método adquirió el carácter de importante procedimiento para valorar intensidades débiles. El método se basa en la capacidad del ojo de apreciar correctamente el valor *umbral* de la luminancia, es decir, la mínima luminancia todavía perceptible por el ojo descansado. Este valor umbral resulta ser para cada observador muy estable. El método de extinción consiste en debilitar de alguna manera la luminancia hasta su valor umbral. Sabiendo, en cuantas veces se ha tenido que realizar

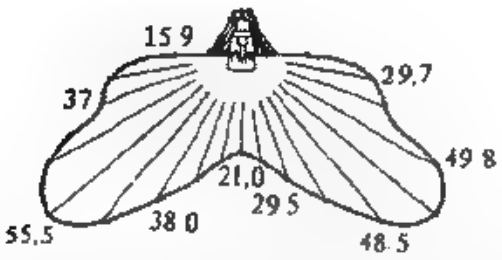


Fig. 3.13. Diagrama polar de la intensidad de la lux de una lámpara incandescente en la armadura.

(Las cifras expresan la intensidad de la lux en determinada dirección en unidades condicionales).

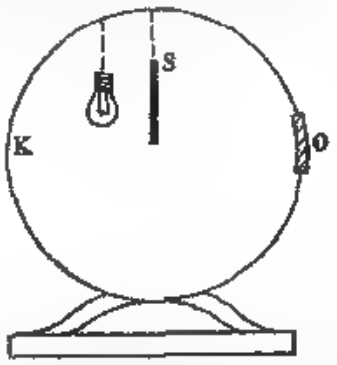


Fig. 3.14. Esfera fotométrica, representación esquemática de su sección.

la debilitación, el observador puede determinar la luminancia inicial. De esta manera se logra valorar una luminancia de diezmilésimas de cd/m² y hasta más pequeñas, lo cual es casi inalcanzable por otros métodos.

INTERFERENCIA DE LA LUZ

4. COHERENCIA

§ 11. Introducción

La ley de la independencia de los haces luminosos, mencionada en el § 1, indica que los haces luminosos al encontrarse no interaccionan uno sobre el otro. Este hecho fue claramente formulado por Huygens, el cual escribió en su «Tratado»: «Una de las propiedades más maravillosas de la luz consiste en que, cuando ella viene de lados diferentes e inclusive opuestos sus rayos actúan independientemente, pasando uno a través del otro, sin ningún obstáculo. Esto trae como consecuencia, que varios espectadores pueden ver simultáneamente a través de un mismo agujero diferentes objetos...» El propio Huygens añade, que esta deducción no es difícil de comprender desde el punto de vista de las ideas ondulatorias. Ella es consecuencia del principio de superposición (véase § 4), según el cual el vector luminoso de una onda luminosa simplemente se suma con el vector de otra onda, sin sufrir ninguna deformación. Sin embargo, si se acepta esto surge el siguiente problema. Según el principio de superposición, al sumar los vectores de diferentes ondas puede obtenerse una onda, la amplitud de la cual es igual, por ejemplo, a la suma de las amplitudes de las ondas que se suman. Y debido a que la intensidad de la onda es proporcional al cuadrado de la amplitud, la intensidad de la onda resultante, no será, por lo general, igual a la suma de las intensidades de las ondas que se suman, pues el cuadrado de la suma de varias magnitudes no es igual a la suma de sus cuadrados. Un experimento común muestra, que la iluminación creada por dos o más haces de luz, constituye una simple suma de las iluminaciones, creadas por cada uno de los rayos por separado. De esta manera, parece, á primera vista, que los resultados experimentales comunes contradicen las ideas ondulatorias.

§ 12. Conceptos sobre la coherencia. Interferencia de oscilaciones

Para aclarar este problema fundamental recordemos algunos conocimientos, relacionados con la suma de ondas y oscilaciones.

Al sumar dos oscilaciones armónicas de un mismo período

$$s_1 = a_1 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_1) \text{ y } s_2 = a_2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_2), \tag{12.1}$$

que se propagan en una misma dirección, se obtendrá una nueva oscilación armónica del mismo período

$$s = s_1 + s_2 = A \operatorname{sen}(\omega t + \theta), \tag{12.2}$$

la amplitud A y la fase θ de la cual se determinan a partir de las siguientes relaciones:

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2), \tag{12.3}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a_1 \operatorname{sen}\varphi_1 + a_2 \operatorname{sen}\varphi_2}{a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2} \tag{12.4}$$

(véanse los ejercicios 13 y 14)

La expresión (12.3) muestra que el cuadrado de la amplitud de la oscilación resultante no es igual a la suma de los cuadrados de las amplitudes de las oscilaciones que se suman, es decir, la energía de la oscilación resultante no es igual a la suma de las energías de las oscilaciones que se suman. El resultado de la suma depende de la *diferencia de fases* $(\varphi_1 - \varphi_2)$ de las oscilaciones iniciales y puede tener cualquier valor desde $A^2 = (a_1 - a_2)^2$ (cuando $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$) hasta $A^2 = (a_1 + a_2)^2$ (cuando $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$).

Sin embargo, en la práctica nosotros nunca trabajamos con oscilaciones rigurosamente armónicas que pueden ser descritas por (12.1), es decir, con oscilaciones eternamente duraderas de amplitud invariable. Generalmente las oscilaciones de tiempo en tiempo se interrumpen y aparecen de nuevo con otra fase, irregularmente cambiada, es decir, no son rigurosamente armónicas. En este caso la intensidad resultante ($I \sim A^2$) también cambia con el tiempo*).

Observando esta intensidad, nosotros podríamos percibir unos valores variables; sin embargo, en este caso sería necesario utilizar para la observación un aparato, que reaccione con suficiente rapidez, para captar los cambios de I. En caso contrario, no podremos observar todos los cambios de I y registraremos solamente cierto valor *medio* de la intensidad *I en el tiempo*, denotado por $\overline{I}$, del mismo modo como el ojo no está en condiciones de captar las oscilaciones

*) Las particularidades de los fenómenos de interferencia, expuestas aquí y más adelante, en igual medida se refieren a cualquier magnitud fotométrica (flujo, luminancia, iluminación). Por eso no tiene sentido concretar la magnitud fotométrica de la cual se habla y el término «intensidad» será utilizado para cualquier magnitud energética, proporcional al cuadrado de la amplitud de oscilación de la intensidad del campo.

de la luminancia de una lámpara incandescente de corriente alterna y percibe cierta luminancia *media* constante

Simbolicemos $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ y calculemos el cuadrado medio de la amplitud de la oscilación resultante en el intervalo de tiempo τ, comparativamente mayor que el tiempo de cambios irregulares de la fase ψ:

$$\overline{A^2} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} A^2\,d\tau = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}(a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\psi)\,d\tau =$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\cos\psi\,d\tau. \qquad (12.5)$$

Si ψ no cambia durante el tiempo de observación τ, entonces

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\cos\psi\,d\tau = \cos\psi;$$

por consiguiente,

$\overline{A^2} = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\psi$, es decir, $\overline{I} \neq I_1 + I_2$.

Cuando las oscilaciones se interrumpen y se reestablecen aleatoriamente, la diferencia de fase cambia en forma completamente desordenada, tomando reiteradamente todos los valores, entre cero y 2π. Por eso $\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\cos\psi d\tau$ tiende a cero, y nosotros tendremos

$\overline{A^2} = a_1^2 + a_2^2$, es decir, $\overline{I} = I_1 + I_2$.

De esta manera, cuando sumamos dos oscilaciones de un mismo período es necesario diferenciar dos casos.

1. La diferencia en fases de las oscilaciones se conserva invariable en el tiempo τ, suficiente para la observación. La energía media de la oscilación resultante difiere de la suma de las energías medias de las oscilaciones iniciales y puede ser mayor o menor que ésta, dependiendo de la diferencia de fases. En este caso las oscilaciones se llaman *coherentes*. Llamemos a la adición de oscilaciones, cuando *no* tiene lugar la sumación de intensidades, *interferencia de oscilaciones*.

2. La diferencia en fases de oscilaciones cambia desordenadamente en el tiempo de observación. La energía media de la oscilación resultante es igual a la suma de las energías medias de las oscilaciones iniciales. Las oscilaciones en este caso se llaman *incoherentes*. Al combinarse éstas siempre se realiza la sumación de las intensidades, es decir *no* tiene lugar la interferencia

Como se señalaba más arriba, las oscilaciones rigurosamente armónicas de *igual frecuencia* siempre son completamente coherentes entre sí, pues, por cuanto ellas no se interrumpen, la diferencia en

fases existente entre ellas se conserva sin cambios todo el tiempo necesario. Por eso al sumar este tipo de oscilaciones armónicas siempre aparece la interferencia.

En resumen, el resultado de la adición de *dos* oscilaciones armónicas de igual frecuencia depende de la interrelación entre sus fases. Al sumar un número grande N de oscilaciones de igual frecuencia, con fases arbitrarias, el resultado dependerá, por supuesto, de la ley de distribución de las fases. Suponiendo, para simplificar, que todas las oscilaciones tienen amplitudes iguales (iguales a a), encontraremos que la intensidad resultante puede estar entre N^2a^2 y cero. Como demostró Rayleigh*), en la distribución de las fases, expuestas a cambios aleatorios, la energía *media* de la suma de estas oscilaciones en un tiempo que cubre un número suficientemente grande de cambios de fase, es igual a Na^2, es decir, en este caso general tiene lugar la sumación de intensidades. Esta conclusión tiene una relación muy directa con las fuentes reales de luz. La oscilación resultante de diferentes centros (átomos) emisores, que componen las fuentes, crea una iluminación, cuya magnitud en un momento determinado y en un punto dado depende de la interrelación de fases entre las oscilaciones de los diferentes centros. Pero nuestro ojo capta solamente la iluminación media en cierto intervalo de tiempo, suficiente para la percepción y sobre una superficie iluminada de suficiente área. Este hecho conduce a una promediación completa de las interrelaciones de fases, como resultado de la cual la iluminación percibida resulta ser simplemente la suma de las iluminaciones, creadas por cada uno de los centros luminosos de nuestra fuente. Por eso podemos decir que dos velas iguales dan una iluminación dos veces mayor que la de una.

§ 13. Interferencia de ondas

Según la definición del parágrafo anterior nosotros hablaremos de *interferencias de ondas*, cuando al actuar ellas conjuntamente no tiene lugar la sumación de intensidades. La coherencia de ondas de una misma frecuencia, es decir, la conservación de una diferencia constante en fases durante un tiempo suficiente para la observación, es condición de su interferencia. En particular, las *ondas monocromáticas*, es decir las ondas engendradas por oscilaciones armónicas, son coherentes y pueden interferir (si, por supuesto, ellas tienen igual período). La capacidad de las ondas coherentes para la interferencia significa que en cualquier punto, alcanzado por estas ondas, tienen lugar oscilaciones coherentes que podrán interferir. Para simplificar supongamos que ambas ondas están de igual manera lineal-

*) *J. W. Strutt* (Rayleigh). Teoría ondulatoria de la luz. Gostejizdat, 1940, § 4. La exposición de las ideas de Rayleigh se puede encontrar en el libro: *G. S. Gerdik*, Oscilaciones y ondas, Fizmatgiz, 1959, cap. X, § 2.

mente polarizadas. El resultado de la interferencia se define por la diferencia en fases de las ondas que interfieren en el lugar de observación; a su vez esta diferencia depende de la diferencia inicial en las fases de ondas y también de la *diferencia de las distancias* que separan el punto de observación de las fuentes de estas ondas.

Supongamos que dos ondas coherentes parten de las fuentes S_1 y S_2 (fig. 4.1); las oscilaciones en ellas están dirigidas perpendicularmente al plano del dibujo y la observación se realiza en el punto M. Consideramos, para simplificar, que ambas ondas tienen iguales amplitudes, entonces encontramos que las oscilaciones en M, ocasionadas por la primera y segunda ondas, se expresan como

$$s_1 = a \cos 2\pi (t/T - d_1/\lambda),$$
$$s_2 = a \cos [2\pi (t/T - d_2/\lambda) - \varphi],$$

donde $d_1 = S_1M$ y $d_2 = S_2M$, λ es la longitud de onda y φ, la diferencia inicial de fases.

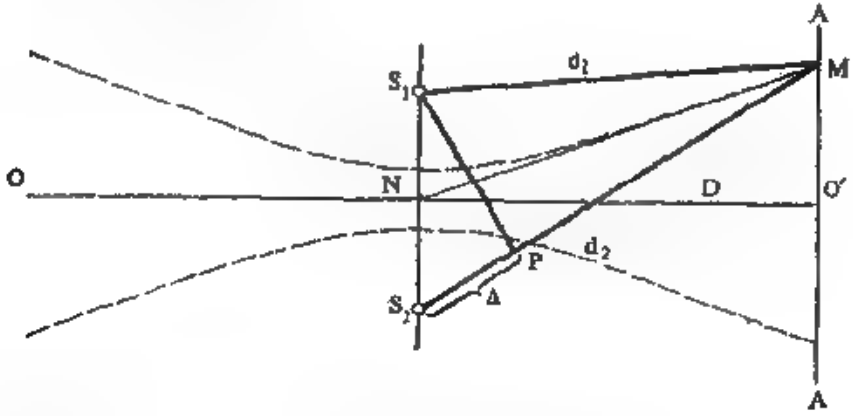


Fig. 4.1. Cálculo de la diferencia de fase de las ondas provenientes de dos fuentes coherentes.

Sumándose en el punto M, las oscilaciones darán

$$s = s_1 + s_2 = 2a \cos \left[\pi (d_2 - d_1)/\lambda + \frac{1}{2}\varphi\right] \times$$
$$\times \cos \left[2\pi (t/T - (d_2 + d_1)/2\lambda) - \frac{1}{2}\varphi\right]. \qquad (13.1)$$

De esta manera, la oscilación en el punto M tiene una amplitud, igual a $2a \cos [\pi (d_2 - d_1)/\lambda + \frac{1}{2}\varphi]$ y una intensidad proporcional a

$$4a^2 \cos^2 \left[\pi (d_2 - d_1)/\lambda + \frac{1}{2}\varphi\right].$$

Para las ondas coherentes φ es constante, y por consiguiente, la distinción de la intensidad de luz en los diversos puntos depende sólo de la distinción en la diferencia de las distancias d_2 y d_1. Gracias a esta diferencia de distancias, o como se acostumbra a hablar, a la *diferencia de recorrido* de dos ondas, las oscilaciones ocasionadas por estas ondas en el punto de su encuentro, poseen una *diferencia en fase* inclusive en el caso, cuando las fases iniciales de ambas ondas son iguales. La diferencia en fase ψ surgida por causa de la diferencia de recorrido de las ondas es igual a

$$\psi = 2\pi (d_2 - d_1)/\lambda.$$

Expresemos la diferencia de recorrido a través de la longitud de onda $\Delta = d_2 - d_1 = m\lambda$, donde m es cualquier número (entero o quebrado). La correspondiente diferencia en fase será $\psi = 2\pi m$. Si las fases iniciales son iguales ($\varphi = 0$) la intensidad de las ondas interferentes, con iguales amplitudes, se escribe como

$$I \sim A^2 = 4a^2 \cos^2 [\pi (d_2 - d_1)/\lambda] = 4a^2 \cos^2 m\pi. \qquad (13.2)$$

A los valores enteros de m les corresponde una diferencia en fase de $2\pi m$ y una intensidad, proporcional a $4a^2$. Cuando m es semientero, las fases de las oscilaciones que se suman son opuestas y la intensidad es igual a cero. En el caso general m es un número quebrado. Cuando las amplitudes no son iguales, la intensidad se expresa con la relación:

$$I \sim A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos 2\pi m = (a_1 - a_2)^2 + 4a_1a_2 \cos^2 \pi m. \qquad (13.3)$$

Cuando m es un número entero obtenemos los valores máximos $A^2 = (a_1 + a_2)^2$ y cuando es semientero, mínimos $A^2 = (a_1 - a_2)^2$.

De esta manera el lugar geométrico de los puntos del espacio, que se caracterizan por tener amplitudes (e intensidades) iguales, satisface la condición $(d_2 - d_1)/\lambda = \text{const}$, es decir, representa la superficie de un hiperboloide de rotación con el eje S_1S_2, cuyos focos son los puntos S_1 y S_2 (en la *fig.* 4.1, el corte de uno de estos hiperboloides por el plano del dibujo está representado con líneas punteadas). En particular, el plano medio, representado en el dibujo con la línea OO', corresponde al plano de mayor intensidad.

La distribución de intensidades descrita constituye el cuadro de interferencia, correspondiente a la interferencia de dos ondas coherentes con una diferencia inicial en fases igual a cero. Si la diferencia inicial de fases fuera diferente de cero, entonces tendríamos el mismo cuadro en el cual, sin embargo, las franjas claras y oscuras ocuparían cierta posición intermedia, dependiente de φ. En realidad en este caso general la condición, por ejemplo, del máximo de intensidad en el cuadro de interferencia es del tipo

$$(d_2 - d_1)/\lambda + \varphi/2\pi = m.$$

Por consiguiente, la diferencia de φ de cero es equivalente a que $(d_2 - d_1)/\lambda$ no es igual a un número entero como sería si $\varphi = 0$.

En el caso de ondas incoherentes, a cada valor de φ le corresponderá su propio cuadro de interferencia, el cual en el transcurso del tiempo será sustituido por otro. Si el cambio ocurre lo suficientemente rápido, nosotros no estaremos en condiciones de observar estos cuadros *instantáneos* de interferencia y percibiremos cierto estado medio, el cual corresponde a una distribución monótona de la intensidad.

Como se ve de los ejemplos observados de superposición de ondas con amplitudes *iguales* y *desiguales*, la relación entre sus amplitudes influye de modo esencial en la calidad del cuadro de interferencia. En el primer caso los máximos de iluminación en el cuadro de interferencia se alternan con las regiones, en las cuales ésta cae hasta cero, en el segundo caso, el cuadro de interferencia se superpone sobre un fondo iluminado uniformemente. Su iluminación es proporcional a la magnitud $(a_1 - a_2)^2$ (compárese (13.3)).

La posibilidad de observación de la distribución alterna de las franjas claras y oscuras en el campo de interferencia depende sustancialmente de la iluminación de este fondo. Por eso para valorar la visibilidad o el contraste del cuadro de interferencia en un punto dado del campo de interferencia Michelson introdujo el parámetro de visibilidad V, definido de la siguiente manera:

$$V = \frac{E_{\text{máx}} - E_{\text{mín}}}{E_{\text{máx}} + E_{\text{mín}}},$$

donde $E_{\text{máx}}$ y $E_{\text{mín}}$ son las iluminaciones máxima y mínima de las franjas de interferencia cerca del punto escogido del campo. El parámetro V puede variar entre 1 y cero. El primer valor corresponde al cuadro de interferencia de mayor contraste y el segundo, a su total desaparición.

Para que el ojo humano pueda diferenciar con seguridad la alternación de las franjas claras y oscuras en el cuadro interferencial, el valor de V debe ser no menor de 0,1 ó $E_{\text{mín}} \approx 0{,}82 E_{\text{máx}}$.

En el caso elemental, examinado por nosotros, el valor del parámetro V se define sólo por la interrelación entre las amplitudes de las ondas interferentes

$$V = \frac{2a_1a_2}{a_1^2 + a_2^2} = \frac{2a_2/a_1}{1 + (a_2/a_1)^2}. \qquad (13.4)$$

Sin embargo, el valor de V puede depender de la diferencia en los estados de polarización de las ondas interferentes, de la presencia de luz incoherente en la composición de los haces luminosos interferentes, etc. El problema acerca de la influencia del estado de polarización de las ondas interferentes en el parámetro de visibilidad del cuadro de interferencia se examina detalladamente en el § 18.

A menudo se presentan casos, donde se realiza la interferencia de haces luminosos, en la composición de los cuales entra luz incoherente. En el lugar, donde se superponen estos haces luminosos, las partes incoherentes de las oscilaciones por la definición misma, crean un fondo iluminado uniformemente, y esto trae consigo la disminución de visibilidad (del contraste) del cuadro de interferencia.

Veamos el caso de interferencia de dos haces de este tipo, de igual intensidad total, en la composición de los cuales entra una parte γ de luz coherente. La intensidad de cada haz luminoso se puede escribir de la forma $I_1 = \gamma I_1 + (1 - \gamma) I_1$. Aquí el primer sumando en el segundo miembro de la igualdad expresa la intensidad de la luz coherente que compone estos haces, y el segundo, la intensidad de la luz incoherente. La componente variable de la iluminación del cuadro de interferencia es creada solamente por la parte coherente de las oscilaciones y por eso en lugar de (13.3) obtendremos

$$I \sim 2I_1 [1 + \gamma \cos 2\pi ml] = 2I_1 [1 - \gamma + 2\gamma \cos^2 \pi ml]. \qquad (13.5)$$

De acuerdo con lo dicho anteriormente, la parte incoherente de la luz $(1 - \gamma)$ crea un fondo uniformemente iluminado como en el caso de haces completamente coherentes con diferentes amplitudes (compárese (13.3)). La visibilidad del cuadro de interferencia de acuerdo con (13.5) se expresa:

$$V = \frac{E_{máx} - E_{mín}}{E_{máx} + E_{mín}} = \gamma. \qquad (13.6)$$

De esta manera, el parámetro de visibilidad del cuadro de interferencia resulta ser igual a la fracción de luz coherente, presente en los haces luminosos interferentes. Por consiguiente, la medición de la visibilidad del cuadro permite en estos casos determinar la fracción de intensidad de las componentes coherentes de estos haces luminosos. De una forma mucho más general este problema, acerca de la luz parcialmente coherente, es estudiado en el § 22.

§ 14. Obtención de ondas coherentes en la óptica

El experimento muestra que cuando dos fuentes de luz independientes, por ejemplo dos velas o inclusive dos sectores diferentes de un mismo cuerpo luminoso, emiten ondas luminosas a una región del espacio, nosotros no observamos interferencia y registramos la suma de intensidades. Después de lo expuesto en los parágrafos anteriores no podemos, por supuesto, considerar los resultados del experimento como demostración de la inconsistencia de las ideas ondulatorias de la luz. La ausencia de un cuadro estable de interferencia (observable) puede significar solamente que nuestras fuentes no envían ondas co-

herentes. Por consiguiente, esto significa que las ondas enviadas por las fuentes no son monocromáticas (véase § 12). El hecho de que, inclusive con las mejores, en el sentido de su monocromaticidad, fuentes (luminiscencia de gases enrarecidos), no podemos obtener interferencia de fuentes independientes, es demostración de que ninguna de las fuentes emite luz estrictamente monocromática. Lo dicho se refiere a todas las fuentes de luz a excepción de los láseres.

Sin embargo, la alta monocromaticidad de la irradiación del láser permite la observación de la interferencia de haces luminosos emitidos por *dos láseres diferentes*. En la fig. 4.2 se presenta la microfotograma del cuadro interferencial, creado por rayos de dos distintos láseres; claramente se ve la distribución periódica de los máximos y mínimos de la intensidad de la luz.

No es difícil comprender la causa física de la no monocromaticidad de las radiaciones de las fuentes reales no láseres y por lo tanto de la incoherencia de las ondas, emitidas por dos fuentes independientes de luz. En efecto, la emisión de luz se realiza como consecuencia de procesos atómicos y en dos fuentes independientes de luz investigamos la emisión de átomos, no relacionados unos con otros. En cada uno de estos átomos el proceso de emisión se prolonga un tiempo muy corto, interrumpiéndose a consecuencia de la pérdida de energía como resultado de la emisión o de las perturbaciones e interacciones con los átomos circundantes. Inclusive en las condiciones más favorables, cuando las acciones perturbadoras de los átomos circundantes se reducen al mínimo (luminiscencia de gases fuertemente enrarecidos), la prolongación de la emisión «correcta» no sobrepasa unas cienmillonésimas de segundo. Después del cese de la luminiscencia, el átomo puede volver a emitir ondas luminosas, pero, por supuesto, con una fase inicial nueva. Por eso la diferencia en fase entre las emisiones de dos átomos independientes cambia al iniciar cualquier otro nuevo acto de emisión, es decir al pasar intervalos de tiempo extraordinariamente pequeños: estas fuentes emiten ondas incoherentes y los cuadros instantáneos de interferencia, creados por ellos, se intercambian tan rápida y desordenadamente que podemos observar solamente el cuadro promediado, es decir, una distribución uniforme de iluminación.

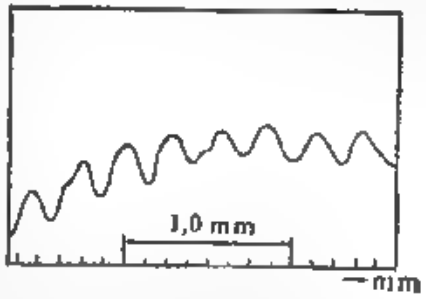


Fig. 4.2. Cuadro de interferencia obtenido con dos haces luminosos de dos láseres diferentes.

De esta manera, la emisión de *diferentes* átomos *independientes* no sirve para obtener dos ondas coherentes. Fresnel (1816) demostró

que se puede alcanzar este fin, utilizando la emisión de sólo un átomo (o de un grupo muy compacto de átomos)*) para obtener *dos sistemas* de ondas, las cuales, por supuesto, a consecuencia de su origen común, son coherentes. Para esto es necesario dividir la emisión despedida en dos flujos (con ayuda de la reflexión o de la refracción) y obligarlos a encontrarse después de que hayan recorrido diferentes caminos d_1 y d_2. De esta manera nosotros hacemos encontrarse a las ondas, que salen de una misma fuente (átomo), pero en diferentes momentos y además con un retardamiento tan pequeño, que tiene lugar la coherencia (ambos grupos de ondas pertenecen a un acto de emisión del átomo).

Fresnel realizó prácticamente este método obligando a la luz de una fuente a reflejarse en dos espejos, dispuestos bajo un ángulo próximo a 180° (espejo doble de Fresnel). El camino de los rayos se muestra en la fig. 4.3. Los rayos rectos de S no llegan hasta la pantalla AA, pues son detenidos por el biombo KK. De cada átomo de la fuente S a la pantalla AA llegan ondas, que van por dos caminos de diferente longitud y que por eso van retardadas una respecto a la otra. Las ondas que van de S y que se reflejan en los espejos I y II constituyen dos sistemas de ondas coherentes, como si partieran de las fuentes S_1 y S_2, que son imágenes virtuales de S en los espejos I y II. A los distintos puntos de la pantalla AA estas ondas llegan con cierta diferencia de fase, condicionada por la diferencia en el camino desde S_1 y S_2 hasta el punto correspondiente de la pantalla. Por eso la iluminación de la pantalla en diferentes puntos es distinta, como se muestra condicionalmente en la fig. 4.3.

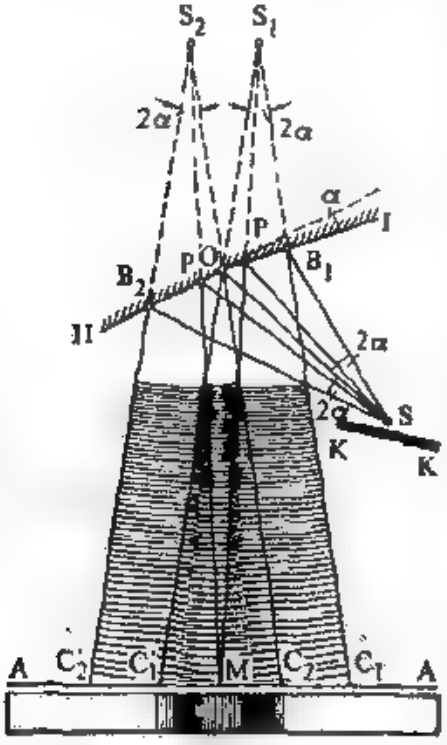


Fig. 4.3. Espejo doble de Fresnel.

*) Si dos átomos luminosos se encuentran muy cerca (a una distancia pequeña en comparación con la longitud de onda) el uno del otro, no son independientes: la emisión de uno puede influir sobre el otro, y sus emisiones, en cierta medida, pueden resultar coherentes, pero en este caso los átomos prácticamente coinciden por su posición.

§15. Características fundamentales de los esquemas interferenciales

No sólo en el experimento descrito, sino en muchos otros esquemas de interferencia el asunto se reduce a la obtención de dos fuentes de ondas coherentes con ayuda de dispositivos, que dan dos imágenes de un mismo centro emisor. Observemos más detalladamente un esquema, en el cual se revelan claramente todos los detalles esenciales.

Este esquema, conocido con el nombre de *bilente de Billet*, se realiza con ayuda de una lente, cortada a la altura del diámetro;

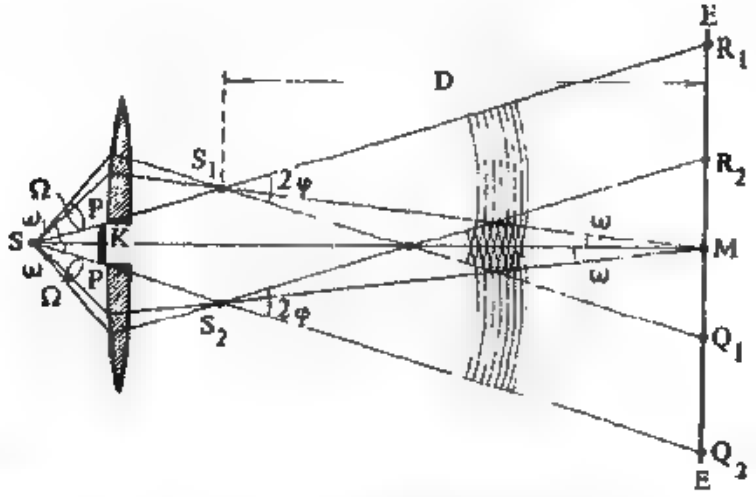


Fig. 4.4. Bilente de Billet.

El ángulo $2\varphi = \angle R_1S_1Q_1 = \angle R_2S_2Q_2$ es la apertura de los haces, que se intersecan, para la pantalla infinitamente alejada; $2\omega = \angle PSP$ es la apertura de la interferencia para el punto central M de la pantalla EE

ambas mitades se separan ligeramente, gracias a lo cual se obtienen dos imágenes reales S_1 y S_2 del punto luminoso S. El espacio entre las semilentes se tapa con la pantalla K*) (fig. 4.4).

La interferencia se observa en la región, donde se sobreponen ambos flujos luminosos, que van de S_1 y S_2. El punto M del campo interferencial tiene una iluminación dependiente de la diferencia de recorrido de los dos rayos interferentes. En este esquema se ve claramente que los flujos luminosos interferentes se definen por las dimensiones de los ángulos sólidos Ω, la magnitud de los cuales de-

*) La bilente de Billet se puede utilizar también de tal manera, que S_1 y S_2 resultan imágenes virtuales de S. Para que los haces que salen de las imágenes virtuales se sobrepongan, es necesario cortar un pedazo del centro de la lente y juntar las partes restantes.

ponde del ángulo $2\varphi = \angle Q_1S_1R_1 = \angle Q_2S_2R_2$ entre los rayos que limitan las partes superpuestas de los haces. Al ángulo 2φ lo llamaremos *apertura de los haces superpuestos*. El valor máximo de ángulo 2φ corresponde a la condición $SQ_1 \parallel S_2Q_2$ y $S_1R_1 \parallel S_2R_2$ se considera que la pantalla está colocada en el infinito. Generalmente el ángulo 2φ es algo menor, debido a que la pantalla se coloca a una distancia finita D, aunque grande en comparación con S_1S_2. La magnitud de la apertura 2φ define las dimensiones angulares del campo de interferencia, la iluminación *media* del cual depende de la luminancia y de las dimensiones angulares de las imágenes S_1 y S_2 de la fuente. El flujo total, que pasa a través del campo de interferencia es proporcional al área de este campo y, por lo tanto, al ángulo 2φ. Gracias a la interferencia en el campo interferencial ocurre una redistribución de intensidad, es decir, se forman franjas de interferencia.

El ángulo 2ω, entre los rayos correspondientes que van de S a través de cada una de las partes del interferómetro hacia M, constituye el ángulo de apertura de los rayos, que define el efecto de interferencia en el punto M. Prácticamente el mismo valor tiene este ángulo para cualquier otro punto del campo de interferencia. A este ángulo le vamos a llamar *apertura de la interferencia*. A él le corresponde, en el campo de interferencia, el *ángulo de convergencia de los rayos* $2w$, cuya magnitud está ligada al ángulo 2ω por las reglas de construcción de imágenes. Cuando la distancia hasta la pantalla es invariable, $2w$ es tanto mayor, cuanto mayor es 2ω.

La magnitud de la apertura de interferencia 2ω está intrínsecamente ligada a las dimensiones tolerables de la fuente. La teoría y el experimento (véase § 17) demuestran que con el aumento de la apertura de interferencia, disminuyen las dimensiones tolerables del ancho de la fuente, con las cuales todavía se tiene un claro cuadro de interferencia. Debido a que la iluminación es proporcional al ancho de la fuente, el aumento de la apertura de interferencia lleva a la disminución de la iluminación del cuadro interferencial. Al mismo tiempo, la magnitud de los flujos luminosos interferentes, ligada con las dimensiones del campo interferencial, se define, de acuerdo con § 7, por la expresión $\Phi = B\sigma\Omega$ (consideramos que la fuente emite en la dirección normal a su superficie). Para una luminancia determinada B de la fuente, la magnitud del flujo depende del producto $\sigma\Omega$, siendo σ, de acuerdo con lo dicho, mayor, cuando la apertura de la interferencia es menor y Ω mayor, cuando la apertura de los haces superpuestos también es mayor. Al discutir el problema, de si puede dado esquema de interferencia proporcionar grandes dimensiones y buena iluminación del cuadro de interferencia, es necesario considerar, si es posible realizar simultáneamente una gran apertura de los haces superpuestos (2φ) y una pequeña apertura de interferencia (2ω).

Los rasgos fundamentales del interferómetro de Billet se repiten en cualquier esquema de interferencia, y en su forma más general puede ser representado por la figura 4.5.

Los puntos S_1 y S_2 son las imágenes del centro emisor S, obtenidos con ayuda del sistema óptico del interferómetro que no se muestra en el dibujo*). Estos puntos pueden ser tanto imágenes reales como virtuales del punto S. En particular, S puede coincidir con uno de estos puntos (esquema de Lloyd, véase abajo fig. 4.8). La apertura de interferencia 2ω y el ángulo $2w$ relacionado con ella definen la dimensión tolerable de la fuente de luz, cuyo ancho es $2b$ (véase fig. 4.5). Para los cálculos del cuadro interferencial en cualquier interferómetro, es suficiente saber la disposición mutua de S_1 y S_2 y sus posiciones respecto a la pantalla EE. Si la pantalla EE es perpendicular a la línea S_1S_2, entonces, como se ve de § 13, las franjas

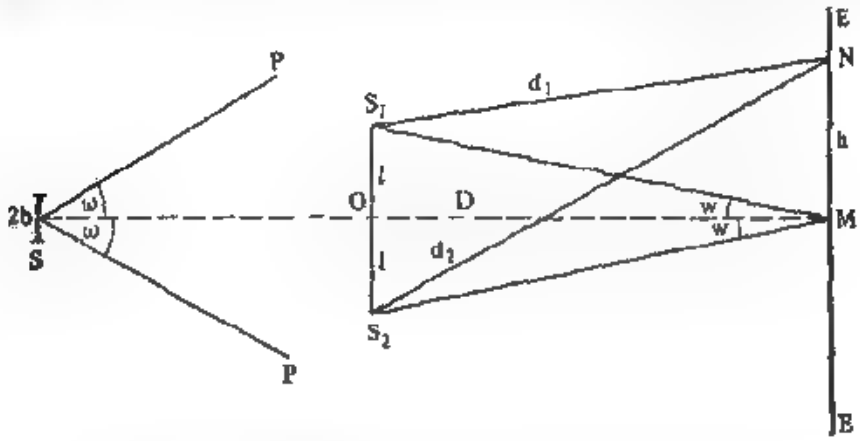


Fig. 4.5. Esquema general de interferencia.
$2\omega = \angle PSP$ es la apertura de la interferencia, $2w = \angle S_1MS_2$ es el ángulo de convergencia de los rayos SP; $S_1S_2 = 2l$; $MN = h$; $OM = D$. Para el punto N la diferencia de recorrido $\Delta = d_2 - d_1 = 2h\ 2l/(d_1 + d_2)$.

de interferencia constituirán círculos concéntricos (cortes de hiperboloides de rotación con sus focos S_1 y S_2 por el plano, perpendicular al eje). Al colocar la pantalla EE paralelamente a la línea S_1S_2 las franjas tendrán forma de hipérbolas que, en el caso de una fuente puntual (onda esférica), se diferencian poco, debido a la condición $OM \gg S_1S_2$, de las rectas paralelas. Generalmente en calidad de fuente se emplea una angosta ranura claramente iluminada, paralela

*) El método de estudio de los esquemas de interferencia con ayuda de las reglas de construcción de imágenes es muy útil en los cálculos de interferómetros complicados. Su desarrollo consecutivo pertenece al catedrático A. N. Zajarievski y está expuesto en el libro: *A. N. Zajarievski*, Interferómetros, 1952.

al plano de simetría del sistema (al corte del bilente de Billet, a la arista del espejo doble de Fresnel, etc.). Disponiendo de tal fuente lineal (onda cilíndrica), los cuadros interferenciales de sus puntos diferentes estarán desplazados uno respecto al otro perpendicularmente al plano del dibujo (a lo largo de la fuente) produciendo en la pantalla EE franjas de interferencia paralelas a la ranura, y para la solucion del problema acerca de la distribución de los máximos y mínimos podemos limitarnos al estudio del plano del dibujo. Calculemos este último caso (véase fig 4.5).

Sea la distancia $S_1S_2 = 2l$, la distancia desde S_1S_2 hasta pantalla $OM = D$ y la distancia desde S_1 y S_2 hasta algún punto cualquiera N de la pantalla, d_1 y d_2 respectivamente Si S_1 y S_2 son cofásicos ($\varphi = 0$), entonces el máximo central estará en el punto M ($S_1M - S_2M = 0$) de la línea media.

Valiéndose de la fig. 4.5 no es difícil hallar la diferencia de recorrido $\Delta = d_2 - d_1$ para cualquier punto N de la pantalla, separado de M por la distancia h:

$$d_2^2 = D^2 + (h + l)^2, \quad d_1^2 = D^2 + (h - l)^2,$$
$$d_2^2 - d_1^2 = (d_2 + d_1)(d_2 - d_1) = 2h2l,$$

o sea

$$\Delta \equiv d_2 - d_1 = \frac{2h2l}{d_1 + d_2}.$$

La diferencia de recorrido Δ contiene cierto número de longitudes de onda y siempre es mucho menor que d_1 y d_2. Por eso se puede sustituir $d_1 + d_2 \approx 2d$, donde d es la distancia ON. Con la misma exactitud $d = d_1 + {}^1/_2\Delta = d_2 - {}^1/_2\Delta$. De esta manera,

$$\Delta = h2l/d. \tag{15.1}$$

En la mayoría de los casos la distancia D hasta la pantalla es mucho mayor que $2l$; por eso $d \approx D$, es decir,

$$\Delta = h2l/D. \tag{15.2}$$

En los razonamientos posteriores consideremos que la luz utilizada es monocromática. Ahora, cuando la principal dificultad, relacionada con la no monocromaticidad de las ondas (ausencia de coherencia), ha sido eludida gracias al método de Fresnel, en principio no cometeremos ningún error al considerar nuestras ondas monocromáticas y solamente simplificaremos los cálculos. Más adelante será mostrado, qué cambios se introducen en el cuadro de interferencia, observado realmente, por las ondas que no son rigurosamente monocromáticas

Supongamos que la fuente envía ondas de longitud λ. La diferencia de recorrido, expresada en longitudes de onda, es $\Delta = h2l/D = m\lambda$, donde m es cualquier número (entero o quebra-

do), que define el *orden de interferencia*. De acuerdo con los cálculos efectuados en el § 13, el cambio de iluminación en dependencia de h (o de $m = 2hl/\lambda D$) se describe por la fórmula (cuando las amplitudes a de las ondas interferentes son iguales)

$$A^2 = 4a^2 \cos^2 \pi \frac{2l}{\lambda D} h = 4a^2 \cos^2 \pi m, \qquad (15.3)$$

Esta fórmula da máximos para los valores enteros de m (0, 1, 2, . . .) y mínimos, para los semienteros de m (1/2, 3/2, . . .).

La figura 4.6 muestra la dependencia de la iluminación expresada por la fórmula (15.3). La distancia entre los máximos o mínimos adyacentes, correspondiente al cambio de m en una unidad, es decir igual a

$$\mathscr{B} = \frac{D}{2l} \lambda, \qquad (15.4)$$

lleva el nombre de *ancho de franja*. Esta fórmula muestra que las franjas serán más anchas, cuanto menor sea la distancia $2l$ entre las fuentes, con los valores dados de D y λ. El ancho de la franja no es difícil de expresar mediante el ángulo de convergencia de los rayos $2w$, relacionado con la apertura de la interferencia. Debido a que generalmente el ángulo $2w$ es pequeño, de la fig. 4.5 se ve que $2l = 2wD$, es decir

$$\mathscr{B} = \lambda/2w. \qquad (15.5)$$

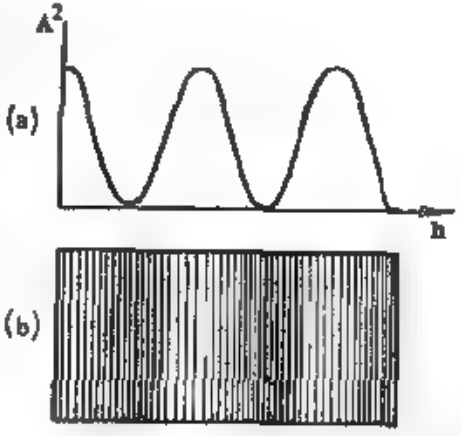


Fig. 4.6. Distribución de la iluminación de la pantalla en la interferencia de dos rayos.
a es el gráfico de la iluminación en función de la coordenada h, b es la representación esquemática de la iluminación de la pantalla.

El ancho de la franja depende de la distancia D hasta la pantalla, aumentando ilimitadamente a medida que la pantalla se aleje. Por eso es racional introducir el concepto de ancho angular de las franjas de interferencia, comprendiendo como tal a la distancia angular entre los máximos adyacentes, observada desde el lugar donde se encuentra la fuente. El ancho angular de la franja

$$\beta = \mathscr{B}/D = \lambda/2l. \qquad (15.6)$$

Este es mayor (el cuadro de interferencia es más grande) cuanto menor es la distancia $2l$ entre las fuentes.

Habiendo realizado el experimento de interferencia, nosotros podemos, midiendo las distancias $\mathscr{B}$, D y l, calcular la longitud λ

de la onda luminosa. Este tipo de medición fue uno de los primeros utilizados para la determinación de longitudes de las ondas luminosas, que mostraron que a los rayos rojos extremos les corresponde aproximadamente una longitud de onda de $\lambda_r = 8000$ Å $= 800$ nm y a los violetas extremos, $\lambda_v = 4000$ Å $= 400$ nm.

De la descripción queda claro que el cuadro se presentará como una alternación de franjas negras bien marcadas, separadas por intervalos más claros, sólo en el caso de una luz monocromática (λ posee un valor completamente definido). Prácticamente, para el experimento de interferencia es necesario cubrir la fuente con un vidrio de color (filtro de luz), el cual separa un conjunto de ondas que se diferencian muy poco unas de otras por su longitud de onda. Si la fuente emite luz blanca, entonces el cuadro de interferencia constituye la alternación de franjas de colores donde en ninguna parte habrá una oscuridad total, debido a que los lugares de mínimo para una longitud de onda coinciden con los de máximo para otras ondas. Midiendo las distancias $\mathscr{D}$ entre los máximos adyacentes, para dado color, se puede determinar (aproximadamente) la longitud de onda, correspondiente a este color.

En otros experimentos de interferencia más exactos (véase abajo), la monocromatización de la luz creada por filtros no es suficiente y es necesario recurrir a otros métodos para obtener una emisión monocromática.

§ 16. Diferentes esquemas de interferencia

Los rasgos fundamentales del esquema general de interferencia (véase fig. 4.5) se encuentran en todos los dispositivos propuestos. Veamos algunos de ellos.

a. *Espejos dobles de Fresnel* (véase fig. 4.3). Dos imágenes virtuales de S sirven como fuentes S_1 y S_2 de ondas coherentes. La distancia $S_1S_2 = 2l$ es tanto menor y, por consiguiente, el cuadro de interferencia tanto mayor, cuanto menor sea el ángulo α entre los espejos (véase ejercicio 17). El ángulo sólido máximo, dentro de los límites del cual todavía pueden sobreponerse haces interferentes, se define por el ángulo $2\varphi = \angle C_1S_1C_1' = \angle C_2S_2C_2'$, determinado de las condiciones $S_1B_1C_1 \parallel S_2OC_2$ y $S_1OC_1' \parallel S_2B_2C_2'$ (fig. 4.3). Al mismo tiempo la pantalla debe estar lo suficientemente alejada (teóricamente debe estar infinitamente lejos).

A base de las leyes de reflexión, el ángulo $2\varphi = 2\alpha$, donde α es el ángulo entre los espejos. De esta manera, la apertura de los haces superpuestos no puede ser mayor que 2α. Para la pantalla, colocada a una distancia finita, $2\varphi < 2\alpha$. El valor de 2α lo tiene también la apertura de interferencia $2\omega = \angle PSP$, es decir, el ángulo entre un par de rayos interferentes que convergen después de ser reflejados en alguna pantalla lo suficientemente alejada. En

la fig. 4.3 se muestra la apertura de interferencia para el punto central M del campo de la pantalla colocada a una distancia finita de S_1S_2.

De esta manera, en los espejos dobles de Fresnel la apertura de los haces superpuestos (que define al ángulo sólido de los flujos interferentes) y la apertura de interferencia tienen igual valor y dependen de la magnitud del ángulo α entre los espejos. Basándose en lo dicho en el § 15, se deduce que los espejos dobles de Fresnel no pueden asegurar grandes dimensiones del cuadro de interferencia, lo que hace este dispositivo poco apto para demostraciones. Además para obtener franjas de interferencia lo suficientemente anchas es necesario trabajar con ángulos pequeños entre los espejos, vigilando, al mismo tiempo, que los espejos en el lugar de su unión no formen un escalón, el cual se vuelva fuente adicional de diferencia de recorrido.

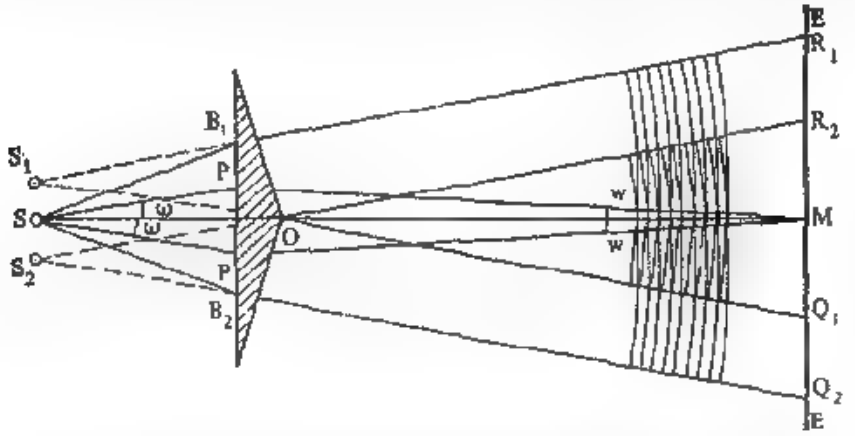


Fig. 4.7. Biprisma de Fresnel.

$2\omega = \angle PSP$ es la apertura de interferencia para el punto central M del campo de la pantalla EE; $2\varphi = \angle R_1S_1Q_1 = \angle R_2S_2Q_2$ es la apertura de los haces superpuestos para la pantalla alejada infinitamente.

b. *Biprisma de Fresnel* (fig. 4.7). La apertura máxima 2φ de los haces superpuestos corresponde a una pantalla infinitamente alejada y se define por las condiciones $S_1B_1R_1 \parallel S_2OR_2$ y $S_1OQ_1 \parallel S_2B_2Q_2$.

Cuando la pantalla está a una distancia finita, esta apertura es algo menor. La apertura de interferencia $2\omega = \angle PSP$ es un poco menor que la de los haces superpuestos (2ω está mostrado para el punto central del campo M en el caso de la pantalla, colocada a una distancia finita de S_1S_2; para otros puntos del campo, 2ω prácticamente tiene el mismo valor). Debido a que los ángulos refringentes del prisma doble se hacen muy pequeños, para obtener una distancia S_1S_2 pequeña y, por consiguiente, anchas franjas de interferencia, es necesario que la apertura de interferencia prácticamente no se

diferencia de la apertura de los haces superpuestos. Por eso, al igual que los espejos dobles, el biprisma también da un pequeño campo de interferencia.

c. *Espejo de Lloyd* (fig. 4.8). El haz recto, proveniente de la fuente, interfiere con el haz, reflejado en un espejo bajo un ángulo cercano al recto. De esta manera las fuentes de las ondas coherentes son la fuente S y su imagen virtual en el espejo S_1.

A diferencia del esquema de Fresnel en el esquema de Lloyd la apertura de interferencia 2ω depende sensiblemente del lugar de la pantalla donde se investiga la interferencia. Ella es tanto menor, cuanto más cerca esté este lugar al centro del campo (al plano del espejo) (véase fig. 4.8). Por eso para los puntos de la pantalla cercanos a la superficie del espejo se pueden utilizar fuentes relativamente anchas y el dispositivo será de suficiente intensidad luminosa*);

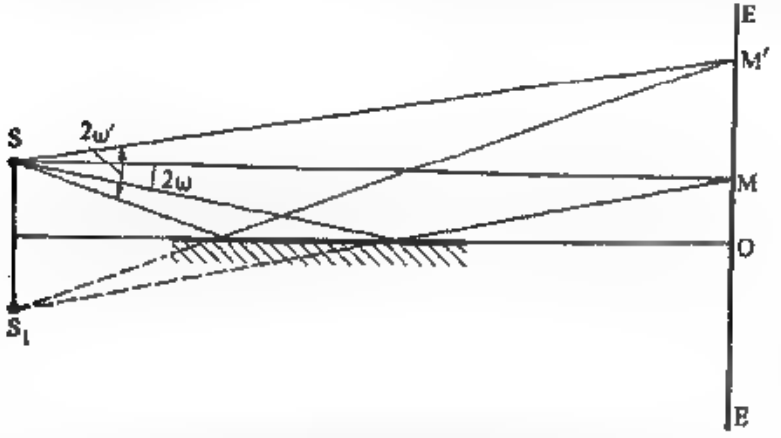


Fig. 4.8. Espejo de Lloyd.
La apertura de la interferencia para el punto M es igual a 2ω, para el punto M' es 2ω'. A medida que se aleja de la superficie de la pantalla la apertura de interferencia crece.

sin embargo, a cierta distancia del plano del espejo, las franjas se difuminarán.

d. *Dispositivo de gran luminosidad* (*R. Pohl*) (fig. 4.9). La luz de la fuente S se refleja en dos superficies de una fina lámina planoparalela (una hoja fina de mica), cuyo grosor l no sobrepasa 0,03—0,05 mm. De esta manera, las fuentes de ondas coherentes son S_1 y S_2, es decir, las imágenes virtuales de S. La distancia $S_1S_2 = 2l$ (si despreciamos la refracción en la mica). La apertura de interferencia $2\omega = \sphericalangle PSQ$ depende del punto del campo de interferencia, es decir,

*) Véase también § 17.

del ángulo θ. Del dibujo (véase fig. 4.9) hallamos

$$2\omega = \angle PSQ = \frac{l}{A+K} \operatorname{sen} 2\theta,$$

donde $A = SO$ es la distancia entre la fuente y la mica y $K = MN$, la distancia desde la mica hasta la pantalla.

Debido a que l ($\approx$0,05 mm) es mucho menor que $A + K$ ($\approx$500 cm), entonces, incluso si $\theta = 45°$, la apertura de interferencia será muy pequeña. En correspondencia con esto la dimensión de la fuente se puede escoger grande (por ejemplo, una lámpara de mercurio), que da, por lo tanto, un gran flujo luminoso. Por eso el dispositivo dado se destaca por una gran intensidad de luz y su demostración es fácil. La dimensión angular del campo de interferencia es muy grande. Disponiendo de una hoja de mica de unos cuantos centímetros cuadrados de área, se puede obtener de una lámpara de mercurio no muy grande un claro cuadro de interferencia, que cubra el techo y las paredes de un aula.

Debido a que la distancia $A + K$ es bastante grande (varios metros), en la pantalla se obtienen franjas interferenciales bien anchas. En efecto (véase (15.5)),

$$\mathscr{B} = \frac{\lambda}{2\omega} = \frac{\lambda (A+K)}{l \operatorname{sen} 2\theta},$$

pues el ángulo de convergencia

$$2\omega = \frac{l \operatorname{sen} 2\theta}{A+K},$$

lo que es fácil de ver en el dibujo. Poniendo $A + K = 5$ m, para $\theta = 45°$ y $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ cm hallamos $\mathscr{B}$, igual a 5 cm. Como la dimensión de la fuente ($\approx$10 mm) es mucho mayor que la distancia S_1S_2 ($\approx$0,1 mm), las imágenes de la fuente se sobreponen casi totalmente, pero esto, por supuesto, no afecta el cuadro de interferencia.

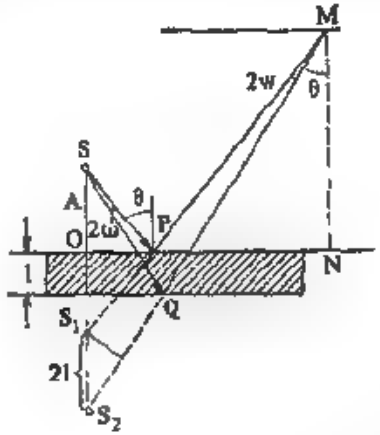


Fig. 4.9. Dispositivo de gran luminosidad.

$2\omega = \angle PSQ$ es la apertura de la interferencia para el punto M de la pantalla alejada. Debido a que l es muy pequeño Q está situado casi debajo de P

a. *Dispositivo de Joung* En principio de otra manera se logra la formación de ondas coherentes superpuestas en el método de Joung (fig. 4.10).

Como fuente de luz sirve una rendija S fuertemente iluminada, de la cual la onda luminosa cae sobre las angostas ranuras S_1 y S_2, alumbradas, de esta manera, por diferentes sectores de un mismo frente de onda. Los haces luminosos, que pasan a través de los *pequeños*

agujeros S_1 y S_2, se ensanchan como resultado de la difracción y se interponen parcialmente, creando interferencia, al igual que en los demás esquemas interferenciales. En el dispositivo de Joung la apertura de interferencia $2\omega = \angle S_1SS_2$ se define por la relación de la distancia entre las ranuras S_1 y S_2 y la distancia desde S hasta S_1S_2.

Joung fue el primero en observar los efectos de interferencia realizados de esta manera (1802)*), y el primero que enunció en forma clara el principio de la sumación de amplitudes al explicar los fenómenos de la interferencia. El significado histórico de este experimento es muy grande. Sin embargo, es algo difícil de interpretarlo, debido a que en este caso el encuentro de dos partes de ondas se hace posible no con ayuda de los fenómenos de reflexión (espejo doble) o de refracción (prisma doble), sino del fenómeno de difracción.

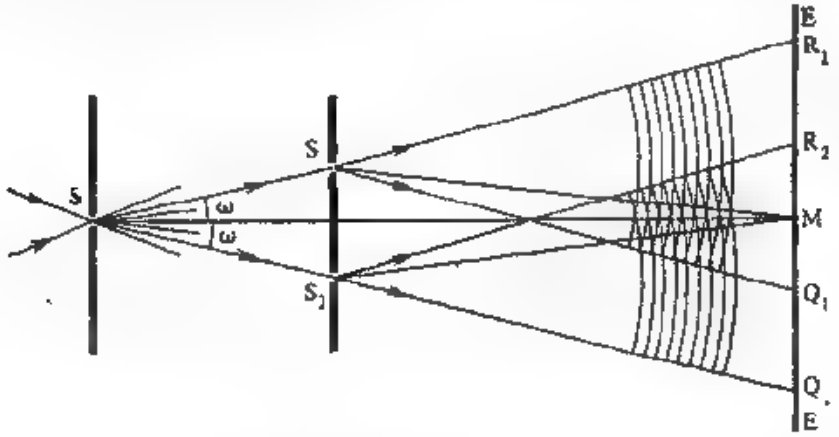


Fig. 4.10. Dispositivo de Joung

$2\omega = \angle S_1SS_2$ es la apertura de interferencia para cualquier punto del campo; $2\varphi = \angle R_1S_1Q_1 = \angle R_2S_2Q_2$ es la apertura de los haces superpuestos para la pantalla infinitamente alejada.

Este experimento será estudiado más detalladamente en la parte dedicada a la difracción.

---

*) Un experimento parecido, por su disposición, fue realizado ya en 1665 por Grimaldi, el cual, sin embargo, trabajaba sin la rendija S, utilizando en calidad de fuente de luz el Sol en forma inmediata. Los cálculos muestran que en estas condiciones, con las distancias entre rendijas, utilizadas por Grimaldi, el fenómeno de interferencia no pudo ser observado, debido a la considerable dimensión angular de la fuente de luz, es decir, del Sol (cerca de 0,5°). Las franjas de luz y de oscuridad observadas por Grimaldi se explican, al parecer, por fenómenos de contraste (véase ejercicio 93).

§ 17. Importancia de las dimensiones de la fuente de luz. Coherencia espacial

Ya hemos anotado reiteradamente que, en todos los esquemas prácticos de interferencia, las dimensiones de la fuente de luz tienen un gran significado. Si éstas son considerablemente menores que la longitud de la onda luminosa, entonces, por supuesto, siempre se obtiene un cuadro claro de interferencia debido a que la diferencia de recorrido, desde *cualquier* punto de la fuente hasta algún punto M del campo de interferencia, siempre será la misma. Sin embargo, en la práctica generalmente disponemos de fuentes, cuyas dimensiones sobrepasan considerablemente la longitud de la onda luminosa. De acuerdo con lo expuesto más arriba, interfieren entre sí las ondas provenientes de los correspondientes puntos, que son las imágenes de un mismo punto de la fuente. Por eso en el caso de una fuente,

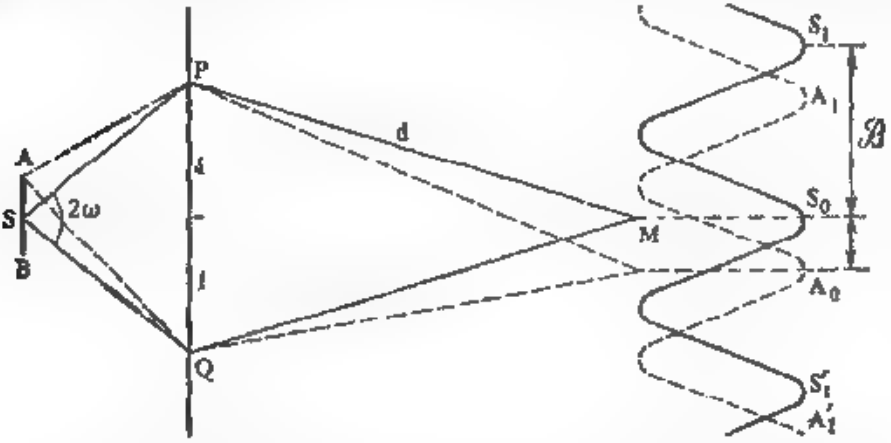


Fig. 4.11. Ilustración para la deducción de la condición $2b \operatorname{sen} \omega = {}^1/_4\lambda$.

cuyas dimensiones son comparables con la distancia entre los puntos correspondientes, nosotros obtenemos, en esencia, una superposición de muchos cuadros de interferencia, creados por muchos pares de fuentes coherentes. Estos cuadros están desplazados uno respecto al otro de tal manera, que el cuadro resultante será más o menos difuminado y si el ancho de las fuentes es considerable, entonces prácticamente dejará de observarse.

La influencia de las dimensiones de la fuente sobre la nitidez del cuadro de interferencia se puede expresar cuantitativamente a partir del esquema general de interferencia, mostrado en la figura 4.11, y utilizando la relación entre el ancho de la fuente $2b$ y la apertura de interferencia 2ω.

Sea AB una fuente de ancho $2b$. Los máximos de interferencia obtenidos del punto S (punto medio de la fuente) en una pantalla alejada, se situarán en los puntos S_0, S_1, S_1', etc., formando unas franjas de ancho $\mathscr{B}$. Los máximos de interferencia del borde de la fuente (por ejemplo, punto A) se situarán en los puntos A_0, A_1, A_1', etc., desplazados a la magnitud S_0A_0, dependiente de las dimensiones de la fuente y de los parámetros del esquema. Este desplazamiento es $S_0A_0 = SA\frac{PM}{SP}$. Introduciendo las mismas designaciones de antes, o sea, $SA = b$, $PQ = 2l$, $PM = d$, hallaremos $S_0A_0 = b\frac{d}{l/\operatorname{sen}\omega} \approx b\frac{d}{l}\operatorname{sen}\omega$. Debido a que la distancia $2l$ puede ser muy grande, al calcular el ancho $\mathscr{B}$ de las franjas es necesario utilizar la fórmula (15.1) y no la (15.2). Aunque el ancho de la franja varía algo a medida que se aleja del centro del cuadro, pues varía un poco d, sin embargo este cambio no es grande y podemos despreciarlo en los cálculos. De esta manera, el ancho de las franjas

$$\mathscr{B} = (d/2l)\,\lambda.$$

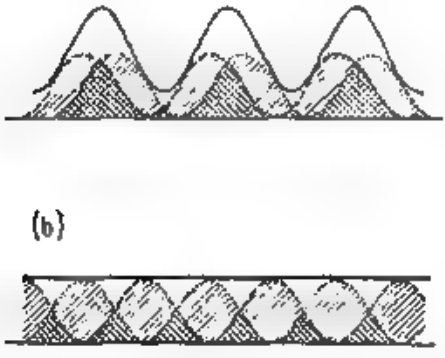


Fig. 4.12. Superposición de cuadros de interferencia desplazados uno con respecto al otro.

Las curvas correspondientes al primer y segundo cuadros de interferencia están mostradas con trazos y puntos; la curva continua corresponde al cuadro resultante a, el desplazamiento de 1/4 de franja, todavía se observan nítidos máximos y mínimos, b, el desplazamiento de 1/2 de franja, iluminación uniforme. c

Si el desplazamiento de un sistema de franjas (de S) respecto a otro (de A) alcanza la mitad del ancho de la franja ($S_0A_0 = \frac{1}{2}\mathscr{B}$), entonces el cuadro de interferencia de una mitad de la fuente borrará totalmente el cuadro de la otra mitad y la interferencia no se observará. Cuando el valor del desplazamiento sea mayor ($S_0A_0 > \frac{1}{2}\mathscr{B}$), los máximos otra vez se harán notorios. Siendo $S_0A_0 = \mathscr{B}$ (coincidencia de los máximos), éstos vuelven nuevamente más evidentes, pero como al mismo tiempo el fondo claro general se hace más intenso, el cuadro pierde su contraste y al aumentar más el ancho de la fuente, desaparece paulatinamente.

Al utilizar la fórmula (15.3), se puede calcular cuantitativamente el cambio de contraste del cuadro de interferencia a medida que aumenta el ancho de la fuente (véase ejercicio 43).

El cuadro de interferencia queda lo suficientemente claro, si

S_0A_0 no sobrepasa aproximadamente 1/4 del ancho de la franja ($S_0A_0 \leqslant {}^1/_4\mathscr{B}$) (fig. 4.12, *a*, *b*). De esta manera, la condición para una buena observación del cuadro de interferencia de una fuente extendida se puede escribir en la forma $b\frac{d}{l}\operatorname{sen}\omega \leqslant 1/4\frac{d}{2l}\lambda$, ó

$$2b \operatorname{sen}\omega \leqslant {}^1/_4\lambda. \qquad (17.1)$$

Esta condición, a pesar de su carácter aproximado, se puede utilizar en los cálculos de las dimensiones tolerables de la fuente.

En vista de la importancia de la relación (17.1) mostraremos la posibilidad de su argumentación aproximada por otro método, algo más general. Vamos a observar la interferencia de una fuente extendiada (2*b*) (fig. 4.13) con ayuda de algún interferómetro, no mostrado en el dibujo. Los rayos *I* y *II*, que pasan a través de los dos brazos

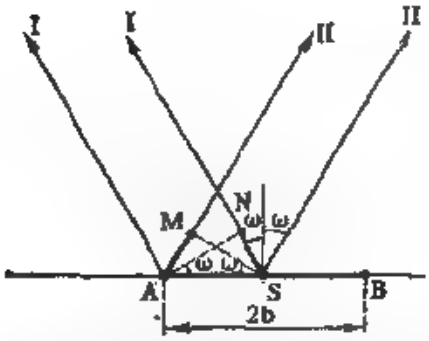


Fig. 4.13. Ilustración para la deducción de la condición $2b \operatorname{sen}\omega = {}^1/_4\lambda$.

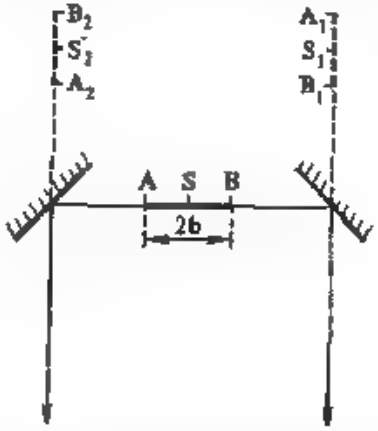


Fig. 4.14. La interferencia bajo un ángulo próximo a 180° es posible, si el ancho de la fuente $2b \leqslant {}^1/_4\lambda$.

de nuestro interferómetro, forman la apertura de interferencia, igual a 2ω. Supongamos, por ejemplo, que los rayos generados por el punto *S* (punto central de la fuente) originan en un punto cualquiera de la pantalla un máximo. Los rayos que van desde el punto *A* del borde de la fuente hasta el mismo punto de la pantalla van a tener una diferencia adicional de recorrido, igual a $(AM + SN)$, pues la longitud del recorrido para el rayo *AII es mayor* en *AM* que la longitud del recorrido para el rayo *SII*, y para el rayo *AI menor* en *SN* que para *SI*. $AM = SN = b \operatorname{sen}\omega$. De esta manera, la diferencia adicional de recorrido, desde el punto *A* hasta el punto observado de la pantalla, es igual a $2b \operatorname{sen}\omega$. Si $2b \operatorname{sen}\omega \leqslant {}^1/_4\lambda$, todavía no se observa un deterioro notable en el cuadro interferencial. Lo dicho

respecto a A y S es válido también para cualquier par de puntos de las mitades derecha e izquierda de la fuente, la distancia entre los cuales es igual a b.

De esta manera, la condición $2b \operatorname{sen} \omega \leqslant {}^1/_4 \lambda$ es la que relaciona la apertura de interferencia con las dimensiones de la fuente extendida, cuando todavía es posible la observación de un cuadro claro de interferencia. En particular, si la apertura de interferencia alcanza 180° ($\omega = 90°$), es decir, si los rayos, a los cuales nosotros obligamos a interferir, van aproximadamente en direcciones contrarias, entonces la dimensión de la fuente debe ser menor que ${}^1/_4$ de la longitud de onda.

Este caso, representado en la figura 4.14, es fácil de calcular de forma inmediata. Los rayos, procedentes del punto central de la fuente (punto S) y de alguno de sus bordes (punto A, por ejemplo), llegarán a cierto punto de la pantalla alejada con una diferencia de recorrido $A_1S_1 + A_1S_2 = 2b$. Si $2b = {}^1/_4 \lambda$, entonces los máximos del punto S coincidirán con los mínimos del punto A; lo mismo es válido también para otro par de puntos correspondientes de las mitades izquierda y derecha de la fuente AB. De esta manera, cuando $2b = {}^1/_4\lambda$, el cuadro interferencial de una mitad de la fuente será borrado por el cuadro de su segunda mitad. Para conservar una buena visibilidad $2b$ no debe sobrepasar ${}^1/_4\lambda$, es decir $2b = {}^1/_4\lambda$, de acuerdo con la condición (17.1) para $\omega = 90°$.

La posibilidad de formación de cuadros interferenciales con un alto grado de visibilidad por diferentes fuentes de luz se puede estudiar también con un planteamiento diferente al hecho más arriba.

Para dar a este nuevo planteamiento del problema un carácter concreto, recurriremos al esquema del experimento de interferencia de Young (fig. 4.10). Supongamos que el experimento se realiza sin la primera pantalla con rendija S y que la fuente de luz alumbra directamente la pantalla con las dos rendijas S_1 y S_2.

Si se utiliza una fuente puntual de luz, situada lejos de la pantalla con rendijas, entonces, lógicamente, la visibilidad del cuadro de interferencia no disminuirá debido a la ausencia de la rendija de entrada del dispositivo de interferencia. En efecto, en el caso dado, ambas rendijas S_1 y S_2 serán alcanzadas por un frente plano de ondas luminosas, emitidas por una fuente puntual de luz. Esto proporcionará la igualdad de amplitudes de las oscilaciones en los sectores del frente de onda que alcanzan las rendijas S_1 y S_2 y *la coherencia* de las oscilaciones en estos sectores del frente de onda. Tampoco será necesario colocar la fuente puntual de luz obligatoriamente en la normal a la superficie de la pantalla con rendijas, que pase a través del punto medio del segmento S_1S_2. Incluso si la fuente puntual de luz está colocada asimétricamente respecto a las rendijas, esto no impedirá la coherencia de sus iluminaciones. Las oscilaciones luminosas cerca de las ranuras S_1 y S_2 *no* se realizarán en una misma fase,

sino con una diferencia constante de fase, lo que de ningún modo contradice la condición de coherencia de la iluminación de ambas rendijas.

El único resultado de la disposición asimétrica de la fuente puntual de luz respecto a las rendijas S_1 y S_2 será el correspondiente desplazamiento del cuadro de interferencia en la pantalla, donde se realiza la observación. La visibilidad del cuadro de interferencia no disminuirá, pero éste se colocará asimétricamente respecto al centro del segmento S_1S_2, lo que es fácil de notar observando la interferencia de luz blanca, cuando la franja central de interferencia de orden cero tampoco es coloreada.

De la misma manera, sobre la visibilidad del cuadro de interferencia no influye el cambio de la distancia entre las rendijas, aunque su período espacial (la distancia entre las franjas de interferencia), por supuesto, cambiará inversamente proporcional a la distancia entre las rendijas. Supongamos ahora que sobre la pantalla con las rendijas S_1 y S_2 se proyecta un haz de una fuente no puntual en el cual las oscilaciones en sus diferentes puntos no son completamente coherentes entre sí. Esta iluminación parcialmente coherente puede ser realizada, por ejemplo, si utilizamos una fuente extendida de luz. Los haces luminosos, que se propagan a través de las rendijas S_1 y S_2, tampoco serán completamente coherentes, lo que disminuirá la visibilidad del cuadro de interferencia observado en la pantalla, colocada detrás de las rendijas.

La cuestión es aquí la misma que en el caso examinado anteriormente de interferencia de haces luminosos de igual intensidad, con la participación de una fracción de luz no coherente. En el § 13 fue demostrado que la visibilidad V del cuadro de interferencia es igual a la fracción γ de luz coherente, que forma parte de los haces luminosos interferentes (véase (13.6)).

De esta manera resulta que el experimento de interferencia, realizado según el esquema de Young, puede aclarar el grado de coherencia entre las oscilaciones en la sección del haz luminoso que alcanza las rendijas S_1 y S_2. Variando la distancia entre las rendijas S_1 y S_2 y midiendo al mismo tiempo la visibilidad del cuadro de interferencia en la pantalla, colocada detrás de aquéllas, se puede explorar la coherencia de las oscilaciones en toda la superficie de la sección del haz que ilumina la pantalla con rendijas. Para caracterizar cuantitativamente los resultados de esta exploración en la sección *perpendicular a la dirección de propagación del haz luminoso* se introduce el concepto de *coherencia espacial*.

Los resultados cuantitativos de la determinación de la visibilidad del cuadro de interferencia en el esquema de Young, en dependencia de las distancias entre las rendijas S_1 y S_2, permiten encontrar la coherencia espacial a lo largo de uno de los diámetros de la sección transversal del haz de luz que los alumbra. Efectuando semejantes

mediciones con otra orientación de las rendijas S_1 y S_2 y desplazándolas a lo largo de otro diámetro del haz luminoso, se puede determinar la coherencia espacial a lo largo de otro diámetro del haz y así sucesivamente.

Si el haz luminoso utilizado es emitido por una fuente puntual de luz, entonces la coherencia espacial por toda la sección del haz luminoso resultará la misma e igual a la unidad, lo que corresponde a la máxima visibilidad del cuadro de interferencia, por supuesto, bajo la condición del uso de luz monocromática.

Si el haz luminoso es emitido por un cuerpo luminoso extendido, por ejemplo por un disco, colocado simétricamente respecto a las rendijas S_1 y S_2, no es difícil predecir el resultado cualitativo de la exploración de la coherencia espacial en la sección de este haz luminoso. Es evidente que la coherencia espacial será máxima cerca del centro de la sección del haz. Además, a medida que el disco se aleja de la superficie de la pantalla con las rendijas S_1 y S_2, la coherencia espacial del haz luminoso crecerá.

Dentro de los marcos de las ideas expuestas y con el uso del concepto de coherencia espacial, el papel de la rendija de entrada S, en la forma tradicional de efectuar el experimento de interferencia de Young, consiste en lo siguiente. En ausencia de esta rendija o cuando su ancho es demasiado grande no se logra coherencia espacial de los haces luminosos, que alumbran las rendijas S_1 y S_2, lo cual conduce a la reducción a cero de la visibilidad del cuadro de interferencia.

Los razonamientos hechos basados en el concepto de coherencia parcial de las ondas luminosas que pasan a través de las rendijas S_1 y S_2, explican, por supuesto, los mismos fenómenos sobre los que hablábamos al comienzo del parágrafo, o sea la disminución de la visibilidad de las franjas de interferencia al aumentar las dimensiones angulares de la fuente de luz. La diferencia consiste solamente en el modo de razonar. Al principio del parágrafo determinábamos el cuadro de interferencia, condicionado por la luz emitida por un pequeño elemento de una fuente extendida de luz, y se sumaban las intensidades en los cuadros de interferencia, creados por la luz de los diferentes sectores de esta fuente. La disminución de la visibilidad de las franjas en el cuadro resultante aparecía, en este método de análisis, como consecuencia de la posición diferente de las franjas para los distintos sectores de la fuente. En el segundo enfoque, previamente, se estudian las oscilaciones luminosas que suceden en las rendijas S_1 y S_2 y son condicionadas por la emisión de toda la fuente extendida de luz. Estas oscilaciones no resultan ser totalmente coherentes y la disminución de la visibilidad de las franjas se interpreta como la manifestación de esta coherencia parcial de las oscilaciones en S_1 y S_2. De lo dicho queda claro que la causa inicial de la disminución de la visibilidad de las franjas de interferencia es la dimensión

angular finita de la fuente y que los dos métodos de razonamiento comparados se diferencian solamente en la etapa en que se realiza la sumación de las acciones de los diferentes sectores de la fuente: en el primer método esta sumación se realiza en la última etapa, es decir, en el cuadro de interferencia, y en el segundo método, en la etapa intermedia, en el plano donde están situadas las rendijas S_1 y S_2.

Una de las particularidades de las fuentes láser de luz consiste en la alta coherencia espacial de las oscilaciones luminosas en la sección de los haces luminosos emitidos por ellas. Como veremos posteriormente, el experimento de Joung con un haz láser de luz se puede efectuar sin la rendija de entrada en el esquema de interferencia. Resulta que bajo un régimen especial de trabajo de los láseres las rendijas S_1 y S_2 se pueden desplazar hasta los bordes de la sección del haz láser sin disminución de la visibilidad del cuadro de interferencia, pero, se comprende, con disminución de su período espacial.

§ 16. El rol de la polarización en la interferencia de ondas transversales

Como fue indicado en el § 13, nosotros supusimos que ambas oscilaciones interferentes tuvieran una misma dirección. En el caso de ondas *longitudinales* (por ejemplo, ondas sonoras en el aire), si hay coincidencia de las direcciones de propagación de las mismas, entonces coincidirán también las direcciones de las oscilaciones. En el caso, cuando las ondas son *transversales* (por ejemplo, ondas luminosas), es posible que al coincidir las direcciones de propagación de dos ondas, la dirección de las oscilaciones en ellas *no coincidan*. En efecto, en una onda transversal es posible la oscilación en *cualquier* dirección perpendicular a la de propagación de la misma.

El carácter transversal de las ondas luminosas se puede tomar en consideración, representando las perturbaciones que figuraban en el análisis anterior, a través de los vectores s_1 y s_2 perpendiculares a la dirección de propagación de las ondas interferentes. La perturbación resultante s en el punto de observación se escribe como

$$s = s_1 + s_2,$$

y entonces para la intensidad en el punto de observación obtenemos

$$I \sim s^2 = s_1^2 + s_2^2 + 2s_1s_2.$$

Los fenómenos de interferencia se describen, evidentemente, por el miembro $2s_1s_2$ de esta relación. Para la realización de interferencia de oscilaciones luminosas polarizadas es necesario, por consiguiente, lograr el encuentro de dos rayos luminosos, en los cuales la dirección de las oscilaciones s_1 y s_2 no sean perpendiculares. Si s_1 y s_2 son perpendiculares entre sí, entonces no se observará interferencia y la región de interposición de los haces luminosos será alumbrada uni-

fermamente. La máxima visibilidad de las franjas se alcanza en el caso, cuando las ondas interferentes están igualmente polarizadas, es decir si s_1 y s_2 son paralelos. De esta manera, la interferencia de ondas luminosas polarizadas depende no sólo de sus amplitudes y fases, sino también del estado de polarización.

La observación de interferencia en la luz natural, para la cual tienen lugar oscilaciones transversales en todas direcciones, también es posible y, por lo general, en el experimento se obtiene justamente una interferencia de haces coherentes de luz natural. Para aclarar este problema, representamos cada uno de los haces interferentes de la luz natural como la superposición de dos ondas polarizadas ortogonalmente, cuyas fases no se relacionan entre sí de ningún modo determinado. La condición de coherencia de los haces señala que las ondas igualmente polarizadas tienen las mismas fases iniciales. Por eso, al sumar dos haces coherentes de luz natural, se forman dos cuadros de interferencia independientes, pero que coinciden espacialmente y responden a los dos pares de ondas igualmente polarizadas.

Nosotros también podemos llegar a la misma conclusión con ayuda de razonamientos elementales acerca del proceso de emisión de la luz por los átomos del medio, semejantes a los expuestos en el § 14. La luz enviada por algún átomo, constituye luz polarizada, sin embargo, la emisión de diferentes átomos está polarizada de distintas maneras. Por eso la emisión de gran cantidad de átomos, observada por nosotros, contiene oscilaciones en todas las direcciones posibles, es decir, es luz natural. Además, cada átomo, habiendo emitido luz, interrumpe esta acción al pasar un pequeño intervalo de tiempo y vuelve a emitir luz, pero ya en una nueva dirección de oscilaciones y con una nueva fase inicial. Sin embargo, el método de Fresnel, consistente en el desdoblamiento de una onda en dos, también sirve de ayuda en este caso. En los experimentos de interferencia nosotros provocamos el encuentro de las ondas, enviadas casi simultáneamente por un mismo átomo, es decir, que conservan una misma fase inicial y una misma dirección de oscilaciones. De esta manera es posible observar la interferencia en la luz natural, que constituye la mezcla de ondas orientadas y polarizadas de distinta manera, ya que la interferencia tiene lugar entre las partes de una misma onda polarizada.

Nosotros volveremos al problema, acerca de la interferencia de rayos polarizados, en el capítulo XVIII.

§ 18. Paradojas aparentes en los fenómenos de interferencia de ondas

En el caso de dos fuentes coherentes de luz, por ejemplo la fuente y su imagen en el espejo, en el espacio circundante tiene lugar una distribución de amplitudes de diferentes valores, desde $s_1 + s_2$

hasta $a_1 - a_2$. En particular, cuando las amplitudes condicionadas por ambas fuentes son iguales ($a_1 = a_2 = a$), la amplitud de la oscilación resultante se encuentra entre los valores extremos, cero y $2a$, y las correspondientes intensidades, entre cero y $4a^2$.

Los máximos y mínimos de iluminación, observados en los cuadros de interferencia no están relacionados, por lo general, con algún tipo de transformación de la energía radiante, es decir, en los lugares de los mínimos la energía de ningún modo se convierte en otras formas, por ejemplo, en calor. La cuestión se reduce solamente a *la redistribución* del flujo luminoso, de tal manera que los máximos de iluminación en algunos lugares se compensan con los mínimos en otros. Si se calcula la energía que pasa a través de una superficie cerrada, que rodea la fuente y el espejo, y aparte la energía que pasa a través de la misma superficie en ausencia del espejo, las energías en ambos casos resultan iguales. De esta manera evidentemente, no hay ninguna contradicción con la ley de conservación de la energía.

Sin embargo, podemos imaginarnos casos más complicados. Supongamos, que la distancia entre las dos fuentes coherentes *es menor* que $^1/_2\ \lambda$, es decir $S_1S_2 = 2l < {}^1/_2\lambda$. En este caso, como es fácil ver de la figura 4.1, en ninguna parte encontraremos puntos en los cuales la intensidad sea igual a cero, en efecto, $d_1 - d_2$ será siempre menor que $2l$ y, por consiguiente, menor que $^1/_2\ \lambda$, es decir en ninguna parte se cumplirá la condición de reducción a cero de la amplitud de la oscilación resultante. Por otro lado, para todos los puntos de la línea OO' se cumple la condición de máximo, es decir en todos los puntos de esta línea la intensidad alcanzará el valor de $4a^2$. Ya de este simple razonamiento se ve que el problema acerca de la compensación de mínimos y máximos en este caso no es tan simple. En efecto, los cálculos confirman que en el caso dado la energía general que pasa por unidad de tiempo a través de una superficie cerrada, que encierra ambas fuentes coherentes de luz, *es mayor* que lo que sería en el caso de fuentes incoherentes. Aquí, por supuesto, no hay ninguna violación de la ley de conservación de la energía. Nosotros nos encontramos aquí con un aumento real de la energía *emitida* por unidad de tiempo por el par de fuentes coherentes, gracias a la interacción entre ellas. Esta energía es recogida de las reservas que alimentan nuestras fuentes. Si estas reservas son limitadas, entonces, evidentemente, ellas, a consecuencia de la interacción indicada, se agotarán en un plazo más corto y las fuentes interrumpirán su acción antes (la amortiguación aumentará).

Casos parecidos son fáciles de realizar, en particular, con las ondas radioeléctricas, de longitud considerable, pues no es difícil disponer dos fuentes de ondas de este tipo (antenas) a una distancia menor que la mitad de la longitud de onda. Dispositivos de este tipo permiten mejorar la acción emisora de las antenas y además, dirigir

los máximos de la emisión en una dirección deseada (acción dirigida). Ellos son utilizados con frecuencia en la práctica.

§ 20. Camino óptico. Tautocronismo de los sistemas ópticos

Los casos de interferencia de luz, examinados en el presente capítulo, permiten examinar este fenómeno en experimentos especialmente montados. Sin embargo, el fenómeno de encuentro de dos o varias ondas coherentes, entre las cuales se observa la interferencia, tiene lugar, en esencia, en cada proceso óptico. La propagación de la luz a través de cualquier sustancia, la refracción de la luz en la interfase de dos medios, su reflexión, etc., son procesos de este tipo. La propagación de la luz en una sustancia está acompañada por la interacción de la onda luminosa electromagnética con los electrones (e iones), de los cuales está compuesta la sustancia. Bajo la acción de la onda luminosa estas partículas cargadas oscilan y comienzan a emitir ondas electromagnéticas secundarias con el mismo período, que el de la onda incidente. Debido a que el movimiento de las cargas adyacentes está condicionado por la acción de una misma onda luminosa, las ondas secundarias, de determinada manera, están relacionadas entre sí por su fase, es decir son *coherentes*. Ellas interfieren entre sí, y esta interferencia permite explicar los fenómenos de reflexión, refracción, dispersión, difusión de la luz, etc. Más adelante daremos a conocer la explicación de estos fenómenos desde el punto de vista indicado. En el presente parágrafo nos detendremos en un caso particular del conjunto de fenómenos descrito.

Ante todo hagamos notar que si en el vacío la velocidad de la onda es c y su longitud λ_0, entonces para un medio con un índice de refracción n tenemos respectivamente $v = c/n$ y $\lambda = \lambda_0/n$. De acuerdo con esto, si la onda recorre el camino d_1 en el medio (n_1) y el camino d_2 en el otro medio (n_2), entonces la diferencia de fase ψ, que aparece, se expresa de esta manera:

$$\psi = 2\pi\,(d_2/\lambda_2 - d_1/\lambda_1) = 2\pi\,(n_2 d_2 - n_1 d_1)/\lambda_0.$$

El producto del índice de refracción por el camino geométrico se llama *camino óptico*; simbolizando $n_1 d_1 = (d_1)$, podemos escribir la expresión para la diferencia de fase de la manera siguiente:

$$\psi = 2\pi\,\frac{(d_2)-(d_1)}{\lambda_0}. \qquad (20.1)$$

Si $(d_1) = (d_2)$, entonces $\psi = 0$; de esta manera los dos caminos de los rayos luminosos son ópticamente equivalentes, es decir, no introducirán ninguna diferencia de fase si sus caminos ópticos son iguales entre sí. A estos caminos comunmente se les llama *tautocrónicos*, es decir, coincidentes en el tiempo, ya que la luz, por estos caminos geométricos desiguales, se propaga en un mismo lapso de tiem-

go La condición de tautocronismo es satisfecha, en particular, por todos los caminos de los rayos que pasan a través de algún sistema óptico, por ejemplo, una lente y dan la imagen S' de la fuente S. En efecto, si algunos rayos no fuesen tautocrónicos, entonces las partes de la onda luminosa, que se propagan por diferentes caminos, poseerían cierta diferencia de fase y se debilitarían mutuamente al encontrarse en S'. La posibilidad de obtener un máximo intenso en S', el cual es la imagen de la fuente S, está condicionada por la intensificación de las diferentes partes de la onda, que llegan al punto S' sin diferencia de fase (por caminos tautocrónicos). Los caminos que van de S a otro punto cualquiera del espacio, no serán ópticamente iguales y en todos los demás puntos, a excepción de S', la interferencia mutua conducirá a la debilitación de la luz. De esta manera, la obtención de la imagen en la lente es un *efecto interferencial*. Nosotros vemos, por consiguiente, que la lente no introduce ninguna diferencia de fase entre los diferentes rayos, que forman la imagen. Esto se refiere también a cualquier sistema óptico, que da la *imagen* de la fuente.

La fig. 4.15 aclara, de qué manera las trayectorias de los rayos, que van a través del centro y borde de la lente, pueden ser tautocrónicas. A pesar de que, geométricamente, la trayectoria $SABS'$ es menor que la $SMNS'$, la parte del recorrido dentro de la lente es correspondientemente mayor ($AB > MN$). Debido a que la velocidad de propagación de la luz en el material de la lente es menor, que en el aire, el retraso en el tramo AB compensa el adelantamiento en los tramos SA y BS' que son menores que los respectivos tramos SM y NS'. La condición de tautocronismo es

$$SA + nAB + BS' = SM + nMN + NS',$$

donde $n = n_2/n_1$ es el índice relativo de refracción del material de la lente.

§ 21. Interferencia de haces luminosos no monocromáticos

Como apuntamos en el § 15, la interferencia de luz no monocromática produce un cuadro complicado, consistente en un conjunto de máximos y mínimos, correspondientes a diferentes λ. Si λ posee todos los valores posibles, entonces, de acuerdo con la fórmula $h = mD\lambda/2l$, a *cualquier punto* de la pantalla (h) le corresponde una mayor o menor intensidad de luz de una longitud dada de onda. Por lo tanto, en cualquier parte de la pantalla se tiene una iluminación considerable. Si en nuestra fuente las diferentes longitudes de onda estuvieran representadas con igual intensidad y el aparato receptor fuera igualmente sensible a todas las longitudes de onda (por ejemplo, una placa fotográfica idealmente pancromática) entonces nosotros no podríamos descubrir ningún rastro del cuadro de interferencia.

Para que sea posible este descubrimiento es necesario que la diversidad de longitudes de onda sea limitada y que no sobrepase cierto intervalo espectral, encerrado entre los límites λ y $\lambda + \Delta\lambda$. Utilizando la fórmula $h = mD\lambda/2l$ es fácil encontrar $\Delta\lambda$. En efecto, la interferencia no se observará si el máximo del orden m para $(\lambda + \Delta\lambda)$ coincide con el máximo del orden $(m + 1)$ para λ. En estas condiciones todo el espacio, entre los máximos adyacentes, será rellenado por los máximos de las indistinguibles longitudes de onda de nuestro intervalo (fig. 4.16). La condición de no distinguibilidad del cuadro de interferencia es: $(m + 1)\lambda = m(\lambda + \Delta\lambda)$, es decir, $\Delta\lambda = \lambda/m$, donde m es un número entero. Para que el cuadro de interferencia con determinados valores de $\Delta\lambda$ y λ posea una alta visibilidad, es necesario limitarse a observar las franjas de interferencia, cuyo orden sea mucho menor que el valor de $m = \lambda/\Delta\lambda$ *).

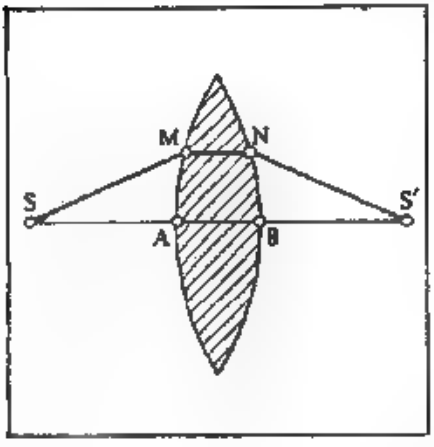


Fig. 4.15. Tautocronismo de una lente.

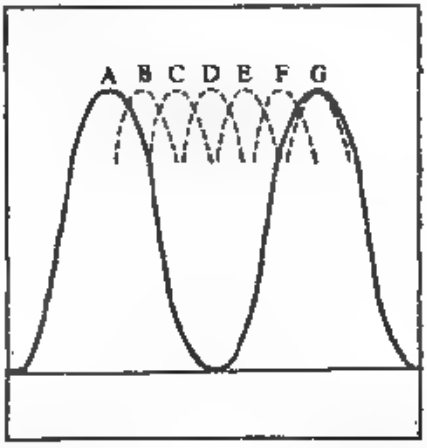


Fig. 4.16. Distribución de los máximos de interferencia de rayos no monocromáticos.

La línea continua representa la distribución de la iluminación para la longitud de onda λ; A es el máximo de orden m, G, el máximo de orden $(m + 1)$, B, C, D, ... son los máximos de orden m para las longitudes de onda en el intervalo $\lambda < \lambda < \lambda + \Delta\lambda$.

En otras palabras, mientras más alto sea el orden de interferencia (m), el cual es necesario observar, *más angosto* debe ser el intervalo espectral, que permite todavía la observación de la interferencia.

*) Sin embargo, es necesario considerar que la visibilidad del cuadro de interferencia depende *esencialmente* de la ley de distribución de la energía dentro del intervalo espectral luminoso utilizado. Los cálculos hechos son válidos para el caso de una línea espectral ensanchada.

Al contrario, cuanto menos monocromática sea la luz, más bajos serán los órdenes de interferencia, que todavía se puede observar.

La monocromatización de la luz se puede realizar con ayuda de un filtro de luz o de un aparato espectral. En este caso, por supuesto, es indiferente, si el dispositivo monocromatizador está *delante* del interferómetro o *detrás* de él. En el primer caso nosotros disminuimos el intervalo espectral $\Delta\lambda$ de la luz interferente. En el segundo, con ayuda del monocromador, eliminamos del cuadro obtenido de interferencia las ondas perturbadoras de tal manera que sobre el receptor (el ojo o una placa fotográfica) se proyecte un cuadro de interferencia ya simplificado y distinguible. El papel de este «monocromador» lo puede desempeñar directamente nuestro ojo gracias a su capacidad de diferenciar los colores: con el ojo nosotros distinguimos fácilmente el máximo de un color del máximo de otro. Sin embargo, esta capacidad de distinción de nuestros ojos está limitada, aunque supera la capacidad selectiva de la mayoría de los receptores físicos (fotocélula, placa fotográfica y, por supuesto, el termoelemento completamente neutral). Particularmente dificultosa para el ojo es la diferenciación de los matices en presencia de una transición continua. En estas condiciones es poco probable que el ojo sea capaz de descubrir la diferencia si λ cambia en menos que unas cuantas decenas (100) de angstrom *). Al dotar el ojo con un filtro de luz que deja pasar una angosta franja o con un espectroscopio, nosotros obtenemos la posibilidad de observar la interferencia con una gran diferencia de recorrido de los rayos.

El orden m de la interferencia está relacionado con la diferencia de recorrido $d_2 - d_1$ de los haces luminosos interferentes y con la longitud de onda mediante la relación $m = (d_2 - d_1)/\lambda$. Del análisis hecho arriba acerca de la interferencia de la luz no monocromática se deduce que la diferencia de recorrido, que origina la desaparición del cuadro de interferencia, se define por la relación $L = d_2 - d_1 \approx \lambda^2/\Delta\lambda$.

Esta magnitud se llama *longitud de coherencia*. Ella se define por las propiedades de la fuente de luz o del monocromador utilizado. Para observar el cuadro interferencial con una visibilidad suficiente (por ejemplo, con $V \approx 0{,}1$), es necesario crear en el esquema de interferencia condiciones, bajo las cuales la máxima diferencia de recorrido de los haces luminosos interferentes sea *mucho menor* que la longitud de coherencia para la fuente de luz utilizada.

---

*) Rayleigh afirmaba que él era capaz de distinguir matices correspondientes a dos componentes de la línea amarilla del sodio, que se diferencian en 6 Å. Esto, al parecer, es la sensibilidad límite del ojo a los matices, que se revela al observar simultáneamente dos sectores espectrales cercanos, pero *discretos*. En el caso de un conjunto continuo, la diferenciación de los colores es mucho más difícil.

El experimento muestra, que al utilizar como fuente de luz la luminiscencia de un gas enrarecido, la longitud de coherencia para diferentes líneas espectrales de este gas no sobrepasa unas decenas de centímetros. Las fuentes láser (véase cap. XL) permiten observar interferencia con una diferencia de recorrido de varios kilómetros. Sin embargo, el límite práctico de la diferencia de recorrido, con el cual es posible observar la interferencia, está condicionado no por la longitud de coherencia de las fuentes láser, sino por las dificultades en la creación de un esquema estable de interferencia de tales dimensiones y por la heterogeneidad de la atmósfera terrestre.

En el § 14 se indicaba que las ondas, emitidas por los átomos, conservan regularidad solo en el transcurso de un intervalo limitado de tiempo. En otras palabras, durante este intervalo de tiempo la amplitud y la fase de las oscilaciones son aproximadamente constantes, mientras que en un intervalo más grande de tiempo la fase y la amplitud cambian considerablemente. La parte de sucesión de oscilaciones en el transcurso de la cual se conserva su regularidad, se llama *tren de ondas* o *tren ondulatorio*. El tiempo de emisión del tren de ondas se llama duración del tren o *tiempo de coherencia*. La extensión espacial del tren L (*longitud del tren de ondas*) y el tiempo de coherencia T están ligados por la evidente relación $L = Tc$, donde c es la velocidad de la luz. Si, por ejemplo, la longitud media de los trenes de onda, emitidos por cierta fuente de luz es igual a una magnitud del orden de 1 cm, entonces el tiempo de coherencia para esta fuente de luz constituye una magnitud de orden de $0{,}3\ 10^{-10}$ s. Por lo tanto, como promedio a través de estos intervalos de tiempo se interrumpe la emisión de una sucesión regular de ondas, emitida por la fuente de luz, y comienza la emisión de un nuevo tren de ondas con amplitudes, fases y polarización no relacionadas regularmente con los parámetros correspondientes del tren de ondas anterior.

No es difícil comprender que la longitud de coherencia y la longitud del tren de ondas coinciden. Efectivamente, si la diferencia de recorrido de los haces interferentes no hace mayor que la longitud del tren de ondas, entonces en determinado punto del campo de interferencia se suman las ondas, emitidas por el átomo en los momentos de tiempo, el intervalo entre los cuales supera el tiempo de coherencia. Pero estas oscilaciones no pueden interferir. Por lo tanto, la interferencia no puede ser observada si la diferencia de recorrido es mayor que la longitud del tren y la máxima diferencia de recorrido, durante la cual todavía se observa la interferencia, es decir, *la longitud de coherencia*, es igual a la longitud del tren.

Utilizando el enlace entre la longitud de coherencia y la anchura $\Delta\lambda$ del intervalo espectral, se puede encontrar la relación entre $\Delta\lambda$ y el tiempo de coherencia T

$$|\Delta\lambda| = \lambda^2/L = \lambda^2/cT.$$

de donde: considerando que $|\Delta\lambda| = c\Delta\nu/\nu^2$ obtenemos

$$\Delta\nu T \geqslant 1, \qquad (21.1)$$

donde $\Delta\nu$ es la anchura del intervalo espectral en la escala de frecuencias.

La proporcionalidad inversa entre el tiempo de coherencia T y su correspondiente anchura del intervalo espectral tiene un carácter bastante general. Una teoría más exacta, que considere las particularidades de los cambios aleatorios de las fases y amplitudes de onda, dará tan sólo el cambio del valor numérico en la parte derecha de la relación (21.1) (más detalladamente, véase § 22).

§ 22. Luz parcialmente coherente

En los parágrafos anteriores, dedicados al fenómeno de interferencia de haces luminosos, se contraponían fuertemente los haces coherentes e incoherentes. Al mismo tiempo en la interferencia de haces no monocromáticos el aumento de la diferencia de recorrido conlleva, por supuesto, a un empeoramiento progresivo del contraste de las franjas de interferencia. Por eso las ideas acerca de los haces completamente coherentes, o completamente incoherentes, corresponden a ciertas condiciones extremas, límites. En realidad se realizan también todos los casos intermedios, y entonces hablan de *coherencia parcial*.

Del estudio del proceso de emisión de ondas por los átomos de la fuente de luz (véanse §§ 14, 21) debe quedar claro, que como causa de violación de la coherencia sirven los cambios aleatorios (estadísticos) de la amplitud y fase de la onda, ocasionados, a su vez, por las interacciones aleatorias del medio circundante sobre los átomos emitentes. Por eso el análisis de la interferencia de haces luminosos parcialmente coherentes exige la consideración de las propiedades estadísticas de las ondas, emitidas por los átomos. En este curso no hay posibilidad de detenernos más detalladamente en este aspecto del problema *), sin embargo, una serie de deducciones físicas importantes se puede obtener a partir de unas consideraciones comparativamente simples, pero de un carácter estadístico general.

Sean dos ondas de las fuentes puntuales S_1 y S_2 las que llegan al punto de observación M (fig. 4.17). Denotemos a través de $a_1(t)$, $a_2(t+\tau)$ y $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t+\tau)$ las amplitudes y las fases de las ondas interferentes en el punto M. En los argumentos de las amplitudes y de las fases está reflejado el hecho de que las ondas han sido emitidas en diferentes momentos de tiempo t y $t+\tau$, que se diferencian en $\tau = (d_2 - d_1)/c$. De acuerdo con lo dicho anteriormente, vamos a considerar las amplitudes y fases como magnitudes aleatorias

*) Una exposición más detallada de los fenómenos estadísticos en la óptica se puede ver en el libro: *G. S. Gorelik*, Oscilaciones y ondas. Fizmatgiz, 1959, cap. X.

y calculemos el cuadrado de la amplitud de la oscilación resultante promediada en un intervalo grande de tiempo *):

$$\overline{A^2} = \overline{a_1^2} + \overline{a_2^2} + \overline{2a_1(t)\,a_2(t+\tau)\cos[\bar{\omega}\tau + \varphi(\tau)]}, \qquad (22.1)$$

$$\varphi(\tau) = \varphi_2(t+\tau) - \varphi_1(\tau),$$

donde la raya de arriba significa promediación análoga a la del § 12. La frecuencia $\bar{\omega}$ es la frecuencia media de las oscilaciones regulares. Los primeros dos sumandos corresponden al cuadrado medio de las amplitudes de las oscilaciones interferentes. Simples transformaciones muestran que $\overline{A^2}$ se puede escribir en la siguiente forma (véase

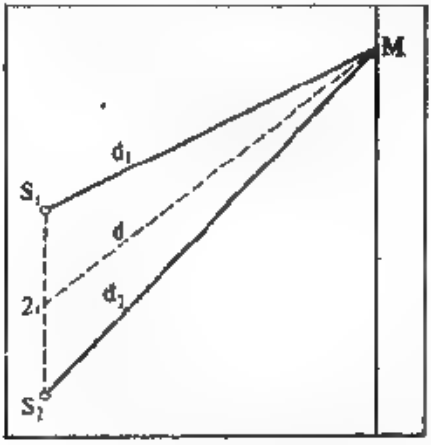


Fig. 4.17. Ilustración para el cálculo del grado de coherencia.

ejercicio 20):

$$\overline{A^2} = \overline{a_1^2} + \overline{a_2^2} + 2\sqrt{\overline{a_1^2}\,\overline{a_2^2}}\,[c(\tau)\cos\bar{\omega}\tau - s(\tau)\,\mathrm{sen}\,\bar{\omega}\tau] =$$

$$= \overline{a_1^2} + \overline{a_2^2} + 2\sqrt{\overline{a_1^2}\,\overline{a_2^2}}\,\gamma(\tau)\cos[\bar{\omega}\tau + \psi(\tau)], \qquad (22.2)$$

donde las magnitudes $c(\tau)$, $s(\tau)$, $\gamma(\tau)$, $\psi(\tau)$ se definen por las relaciones

$$\left.\begin{aligned} c(\tau) &= \overline{a_1(t)\,a_2(t+\tau)\cos\varphi(\tau)}\Big/\sqrt{\overline{a_1^2}\cdot\overline{a_2^2}}, \\ s(\tau) &= \overline{a_1(t)\,a_2(t+\tau)\,\mathrm{sen}\,\varphi(\tau)}\Big/\sqrt{\overline{a_1^2}\cdot\overline{a_2^2}}, \\ \gamma(\tau) &= \sqrt{c^2(\tau) + s^2(\tau)},\ \ \mathrm{tg}\,\psi(\tau) = s(\tau)/c(\tau). \end{aligned}\right\} \qquad (22.3)$$

*) Se supone que el período $2\pi/\bar{\omega}$ de las oscilaciones regulares es mucho menor que el intervalo de tiempo, en el transcurso del cual las amplitudes y las fases cambian notoriamente

Al introducir las intensidades I, I_1, I_2, proporcionales a los cuadrados medios de las amplitudes $\overline{A^2}$, $\overline{a_1^2}$, $\overline{a_2^2}$, la fórmula (22.2) se podrá escribir en la forma

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,[c(\tau)\cos\bar{\omega}\tau - s(\tau)\operatorname{sen}\bar{\omega}\tau] =$$

$$= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\gamma(\tau)\cos[\bar{\omega}\tau + \psi(\tau)], \qquad (22.4)$$

$$\bar{\omega} = 2\pi(d_2 - d_1)/\lambda.$$

La expresión (22.4) se diferencia de la (13.3), obtenida para la intensidad de la oscilación resultante en el caso de haces completamente coherentes, por el multiplicando adicional $\gamma(\tau)$ en el miembro de interferencia y por el desplazamiento adicional de fase $\psi(\tau)$. Es completamente evidente que $\gamma(\tau)$ no puede ser mayor que la unidad, es decir $\gamma(\tau) \leqslant 1$. En caso contrario la amplitud de la oscilación resultante podría ser mayor que la suma de las amplitudes de las oscilaciones interferentes, o convertirse en cero cuando las amplitudes no son iguales. Ambos casos son físicamente absurdos. De esta manera, el factor $\gamma(\tau)$ disminuye la magnitud del miembro de interferencia en comparación con el caso de haces completamente coherentes, es decir, caracteriza el empeoramiento del contraste de las franjas de interferencia. Si $\gamma(\tau) = 0$, entonces no se observará interferencia; $\gamma(\tau) = 1$ corresponde a la interferencia de haces completamente coherentes. Todos los valores intermedios de $\gamma(\tau)$ responden a los haces parcialmente coherentes. La magnitud $\gamma(\tau)$ se llama *grado de coherencia* de los haces.

Para cualquier valor de $\gamma(\tau)$ la intensidad I se puede escribir así:

$$I = \gamma(\tau)\,[I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos[\bar{\omega}\tau + \psi(\tau)]] +$$

$$+ [1 - \gamma(\tau)]\,[I_1 + I_2].$$

El primer sumando en la parte derecha de esta relación responde a la suma coherente de oscilaciones con intensidades $\gamma(\tau)\,I_1$, $\gamma(\tau)I_2$ y con diferencia de fase $\psi(\tau)$, y el segundo sumando, a la suma completamente incoherente de oscilaciones con intensidades $[1 - \gamma(\tau)]\,I_1$, $[1 - \gamma(\tau)]\,I_2$. Se puede considerar por eso, como si la luz en el punto M del cuadro de interferencia estuviese compuesta de partes coherente e incoherente, además que la fracción de luz coherente es igual a $\gamma(\tau)$. La relación examinada ya había sido obtenida en el § 13 con ayuda de consideraciones elementales basadas en la idea de la separación de la luz de haces interferentes en partes coherente e incoherente (compárese (13.5)). El análisis hecho en el presente parágrafo, establece el sentido exacto de esta separación.

La determinación experimental del grado de coherencia $\gamma(\tau)$ y de la fase $\psi(\tau)$ puede ser basada en la medición de la visibilidad y de la posición de las franjas de interferencia. De la fórmula (22.4) se deduce que el parámetro de visibilidad V (véase § 13) y $\gamma(\tau)$ están

ligados por la relación

$$V = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \gamma(\tau). \tag{22.5}$$

De esta manera, los valores medidos de las intensidades I_1, I_2 de los haces interferentes y de la iluminación en los máximos y mínimos $E_{\max}$, $E_{\min}$ del cuadro de interferencia permiten calcular $\gamma(\tau)$. Cuando I_1 y I_2 son iguales, el grado de coherencia $\gamma(\tau)$ coincide con la visibilidad de las franjas V.

La posición de los máximos de iluminación se define por la condición

$$(d_2 - d_1)/\lambda + \psi(\tau)/2\pi = m. \tag{22.6}$$

Midiendo la diferencia de recorrido $d_2 - d_1$, la longitud de onda λ y el orden de interferencia m, se puede determinar la fase $\psi(\tau)$ con ayuda de (22.6). Es cómodo (desde el punto de vista experimental) sustituir la medición de la diferencia de recorrido por la de la posición de las franjas de interferencia, como se deduce de los cálculos, efectuados en el § 15. Por fin, se puede trabajar no con los máximos, sino con los mínimos de la iluminación, y entonces m en la fórmula (22.6) no será entero, sino un número semientero.

Hasta ahora el grado de coherencia $\gamma(\tau)$ y la fase $\psi(\tau)$ han sido observados como características experimentales del cuadro de interferencia. Planteemos ahora el problema del cálculo teórico de $\gamma(\tau)$ y $\psi(\tau)$, el cual debe basarse en las relaciones (22.3). Si el medio entre las fuentes de luz y el lugar de observación de la interferencia es homogéneo e invariable en el tiempo, entonces las características estadísticas de las amplitudes aleatorias $a_1(t)$, $a_2(t)$ y de las fases $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ se definen por las propiedades de las fuentes S_1 y S_2 y para los cálculos teóricos son necesarias ciertas suposiciones acerca del proceso de emisión de luz. Aceptemos el siguiente esquema simple para este proceso: la fuente puntual emite una serie de trenes de ondas con igual duración T e iguales amplitudes a, pero las fases de los diferentes trenes toman valores completamente aleatorios, independientes unos de otros. Esta esquematización corresponde a que el átomo emisor en el transcurso de pequeños intervalos de tiempo, considerablemente menores que la duración T del tren, experimenta una fuerte perturbación por parte de las partículas circundantes (átomos, electrones y otras), como resultado de lo cual cambia la fase de las ondas emitidas por él. Los cálculos muestran que para el esquema indicado el grado de coherencia $\gamma(\tau)$ y la fase $\psi(\tau)$ se definen por las expresiones (véase ejercicio 21)

$$\gamma(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|/T, & |\tau| \leqslant T, \\ 0 & |\tau| \geqslant T, \end{cases} \qquad \psi(\tau) = 0. \tag{22.7}$$

El grado de coherencia disminuye al aumentar $|\tau|$ siguiendo una ley lineal hasta hacerse igual a cero, y para mayores valores de $|\tau|$ permanece igual a cero (fig. 4.18). Este comportamiento de $\gamma(\tau)$ tiene una simple explicación. Si la diferencia de recorrido $d_2 - d_1$ es mayor que la longitud del tren o, lo que es lo mismo, si el tiempo de retraso τ es mayor que la duración T del tren, entonces en el punto M, a ciencia cierta, se sumarán oscilaciones de diferentes trenes, cuyas fases, según la suposición, no están relacionadas entre sí de ninguna manera. Por eso la interferencia no puede ser observada cuando $|\tau| > T$, a lo que responde $\gamma(\tau) = 0$. Pero si $|\tau| \leqslant T$, entonces en el punto de observación parcialmente se superpondrán los diferentes sectores de un mismo tren y conforme sea esta superposición será más o menos considerable el contraste de las franjas de interferencia. Debido a que el grado de superposición disminuye linealmente con el aumento del retraso del tren de S_2 con relación al tren de S_1, el grado de coherencia disminuirá según una ley lineal al cambiar $|\tau|$.

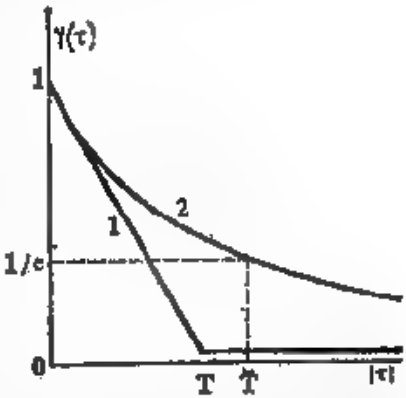


Fig. 4.18. Gráficos de la dependencia del grado de coherencia $\gamma(\tau)$ del tiempo de retraso para haces compuestos de trenes ondulatorios;

1, los trenes de igual duración; 2, la duración de los trenes está subordinada a la distribución de Poisson (22.8).

Como una evidente insuficiencia del esquema observado es necesario considerar la suposición acerca de la igualdad de la duración de todos los trenes. Esta insuficiencia es fácil de eliminarla. Supongamos que el átomo emite trenes ondulatorios de diferente longitud y que el tiempo de observación es lo suficientemente grande para que se realicen prácticamente todos los valores posibles de T. El grado resultante de coherencia dependerá de la frecuencia con que son emitidos los trenes de una u otra duración. Consideremos que el número relativo de trenes de duración T viene dado por la expresión (distribución de Poisson)

$$(T/\bar{T}) \exp(-T/\bar{T}), \tag{22.8}$$

donde $\bar{T}$ es cierta duración media. Entonces para $\gamma(\tau)$ obtendremos (véase ejercicio 21)

$$\gamma(\tau) = \exp(-|\tau|/\bar{T}) \tag{22.9}$$

En este caso el grado de coherencia no es igual a cero para cualquier valor de $|\tau|$ (véase fig. 4.18), a lo que responde la posibilidad de

emisión de trenes, la duración de los cuales, debido a procesos aleatorios, sobrepasa la duración media $\bar{T}$. Sin embargo el número relativo de trenes largos es pequeño y $\gamma(\tau)$ disminuye rápidamente cuando $|\tau| > \bar{T}$.

En el esquema del proceso de emisión examinado anteriormente solamente la fase de las oscilaciones experimentaba las influencias aleatorias. A este tipo de oscilaciones las llaman oscilaciones *con modulación aleatoria de fase*. En la modulación de fase la intensidad, que es proporcional al cuadrado de la amplitud de las oscilaciones, no cambia en el tiempo. Se puede suponer que la interacción del átomo emitente con las partículas circundantes trae consigo no sólo la modulación de fase de las ondas emitidas por él, sino también la transformación de amplitud. En este último caso se habla acerca de *la modulación aleatoria de la amplitud* de las oscilaciones.

Supongamos que la radiación emitida por el átomo constituya una secuencia de trenes ondulatorios, cuyas amplitudes cambian debido a causas aleatorias, pero que la fase no se module. Los cálculos muestran que en este caso el grado de coherencia tiene la forma (véase ejercicio 21)

$$\gamma(\tau) = \begin{cases} (\bar{a})^2/\overline{a^2} + [1 - |\tau|/T]\,\overline{[a - \bar{a}]^2}/\overline{a^2}, & |\tau| \leqslant T, \\ (\bar{a})^2/\overline{a^2}, & |\tau| > T, \end{cases}$$

donde T es la duración, igual para todos los trenes, $\bar{a}$, la amplitud media, $\overline{a^2}$, el cuadrado medio de la amplitud. Como en el caso de la modulación de fase, el gráfico de la función $\gamma(\tau)$ tiene forma triangular cuando $|\tau| < T$, no obstante cuando $|\tau| > T$ el grado de coherencia no se reduce a cero sino a una magnitud constante, igual a $(\bar{a})^2/\overline{a^2}$. El experimento muestra, sin embargo, que $\gamma(\tau) \to 0$ para valores de $|\tau|$ lo suficientemente grandes. Por eso es necesario considerar $\bar{a} = 0$, lo que es equivalente al cambio de signo de la amplitud al ser reemplazado un tren por otro o, en otras palabras, a los saltos de la fase en π. Por lo tanto, basándonos en el experimento, nosotros llegamos a la conclusión de que la modulación de fase, en una u otra forma, obligatoriamente existe cuando hay interacción de los átomos emitentes con el medio circundante.

La medición de $\gamma(\tau)$ para diferentes τ y la contraposición con la función calculada teóricamente permite, de esta manera, hacer ciertas conclusiones acerca de las particularidades del proceso de emisión de las ondas por los átomos

La disminución de la visibilidad de las franjas en la interferencia de haces no monocromáticos se explicaba en el § 21 de otra manera: se suponía, que ellos eran una superposición de haces monocromáticos con diferentes frecuencias (o longitudes de ondas). Naturalmente surge la cuestión acerca de la interrelación del enfoque espectral,

expuesto en el § 21, y el enfoque temporal, utilizado en el presente parágrafo. Para aclarar esta cuestión recordemos que la oscilación rigurosamente armónica (monocromática) por su misma definición debe durar infinitamente. Si la oscilación sigue una ley sinusoidal en el transcurso de un intervalo limitado de tiempo, al término del cual cambian su amplitud, frecuencia o la fase (tren ondulatorio), entonces esta oscilación *modulada* se puede presentar como la suma de oscilaciones monocromáticas con diferentes frecuencias, amplitudes y fases. Pero esta *descomposición* de los trenes ondulatorios en sus componentes monocromáticas da justamente la base para la idea acerca de la interferencia de haces no monocromáticos. De esta manera, los enfoques espectral y temporal para el análisis de la interferencia son diferentes métodos de estudio de un mismo fenómeno — la violación de la coherencia de las oscilaciones *).

Citemos las relaciones cuantitativas, que responden a las ideas acerca de la interferencia de haces no monocromáticos. Vamos a considerar que las frecuencias de las componentes monocromáticas de los haces interferentes están agrupadas alrededor de cierto valor medio de la frecuencia $\bar{\omega}$. Representemos con $I_1(\omega - \bar{\omega})\,d\omega$, $I_2(\omega - \bar{\omega})\,d\omega$ las intensidades de oscilaciones en los haces interferentes, que se realizan con la frecuencia ω. Las magnitudes $I_1(\omega - \bar{\omega})$, $I_2(\omega - \bar{\omega})$ llevan el nombre de *densidades espectrales de la intensidad de oscilaciones*. Las intensidades totales de los haces evidentemente son iguales a

$$I_1 = \int I_1(\omega - \bar{\omega})\,d\omega, \quad I_2 = \int I_2(\omega - \bar{\omega})\,d\omega \tag{22.10}$$

y coinciden con las intensidades I_1, I_2, con las cuales nos encontramos anteriormente (por ejemplo, en (22.4)). Debido a que dos imágenes de una misma fuente puntual de luz sirven de fuentes de haces interferentes, las densidades espectrales $I_1(\omega - \bar{\omega})$, $I_2(\omega - \bar{\omega})$ de igual manera dependen de la frecuencia y se diferencian sólo por multiplicandos constantes, proporcionales a I_1 e I_2. Con ayuda de las designaciones introducidas, la intensidad en algún punto del cuadro de interferencia se puede escribir como una relación, que coincide completamente con (22.4), además el grado de coherencia $\gamma(\tau)$, la fase $\psi(\tau)$ y las magnitudes $c(\tau)$ y $s(\tau)$ están relacionadas con $I_1(\omega - \bar{\omega})/I_1 = I_2(\omega - \bar{\omega})/I_2$ de la siguiente manera (véase ejercicio 22):

*) Más detalladamente, acerca de la interrelación entre los métodos espectral y temporal de observación, véase: *G. S. Goreltk*, Oscilaciones y ondas, Fizmatguiz, 1959, cap. XI.

$$\left.\begin{aligned} c(\tau) &= \frac{1}{I_1}\int I_1(\Omega)\cos\Omega\tau\, d\Omega, \\ s(\tau) &= \frac{1}{I_1}\int I_1(\Omega)\operatorname{sen}\Omega\tau\, d\Omega, \quad \Omega = \omega - \bar{\omega}, \\ \gamma(\tau) &= \sqrt{c^2(\tau)+s^2(\tau)}, \quad \operatorname{tg}\psi(\tau) = s(\tau)/c(\tau). \end{aligned}\right\} \tag{22.11}$$

De esta manera, las ideas acerca de la interferencia de haces no monocromáticos y acerca de la interferencia de haces en forma de trenes ondulatorios nos conducen a iguales conclusiones sobre la distribución de la intensidad en el cuadro de interferencia. Las consideraciones citadas más arriba acerca de la descomposición de los trenes ondulatorios en oscilaciones monocromáticas encontraron su expresión cuantitativa en que las funciones $c(\tau)$ y $s(\tau)$ resultan ser una superposición de las componentes armónicas con amplitudes, proporcionales a la densidad espectral de la intensidad de oscilaciones.

Las relaciones (22.11), (22.5) y (22.6) permiten calcular el grado de coherencia $\gamma(\tau)$, la fase $\psi(\tau)$, la visibilidad V y la posición de las franjas de interferencia, si se conoce la densidad espectral relativa $I_1(\omega-\bar{\omega})/I_1$. También es válida la afirmación contraria *) es decir, si se conocen $\gamma(\tau)$ y $\psi(\tau)$, entonces se puede calcular $I_1(\Omega)/I_1$ por la fórmula

$$I_1(\Omega)/I_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \gamma(\tau)\cos[\Omega\tau - \psi(\tau)]\, d\tau. \tag{22.12}$$

Por lo tanto, la investigación del cuadro de interferencia permite determinar la composición espectral de la radiación. Este método recibió el nombre de espectroscopia de Fourier y por una serie de razones encontró una amplia aplicación, particularmente cuando se trabaja con la región infrarroja del espectro.

Analicemos algunos ejemplos. Cálculos inmediatos permiten convencernos fácilmente de que a la densidad espectral

$$I_1(\omega-\bar{\omega}) = I_1\frac{\Gamma/\pi}{\Gamma^2+(\omega-\bar{\omega})^2} \tag{22.13}$$

le corresponde el grado de coherencia

$$\gamma(\tau) = \exp(-\Gamma|\tau|). \tag{22.14}$$

De esta manera, al grado de coherencia de los trenes ondulatorios, de diferentes duraciones (compárese (22.9)), le corresponde una densidad espectral, definida por la fórmula (22.13), siendo $\Gamma = 1/\bar{\tau}$. La magnitud Γ es igual a aquel intervalo de frecuencia, a lo largo

*) La demostración de la fórmula (22.12), que constituye un caso particular de las transformaciones de Fourier, véase, por ejemplo, en el libro: *V. A. Illiá, E. G. Poznlak*, Fundamentos del análisis matemático, parte II, «Naúka», 1973.

del cual $I_1(\omega - \bar{\omega})$ disminuye dos veces en comparación con su valor máximo, alcanzado cuando $\omega = \bar{\omega}$ (fig. 4.19, *a*). Es necesario prestar atención a la proporcionalidad inversa de Γ y $\overline{T}$, lo que constituye el caso particular de una relación general entre la duración del tren de ondas y la magnitud del intervalo espectral, al cual le corresponde una parte considerable de intensidad del haz no monocromático de luz (véase el final de § 21).

Si la densidad espectral contiene dos componentes, de igual forma, del tipo (22.13), que alcanzan sus valores máximos con las frecuencias ω_1 y ω_2 y tienen igual intensidad y semianchura Γ:

$$I_2(\omega - \bar{\omega}) = {}^1/_2 I_1 \left[\frac{\Gamma/\pi}{\Gamma^2 + (\omega - \omega_1)^2} + \frac{\Gamma/\pi}{\Gamma^2 + (\omega - \omega_2)^2} \right], \qquad (22.15)$$

$$\bar{\omega} = {}^1/_2 (\omega_1 + \omega_2),$$

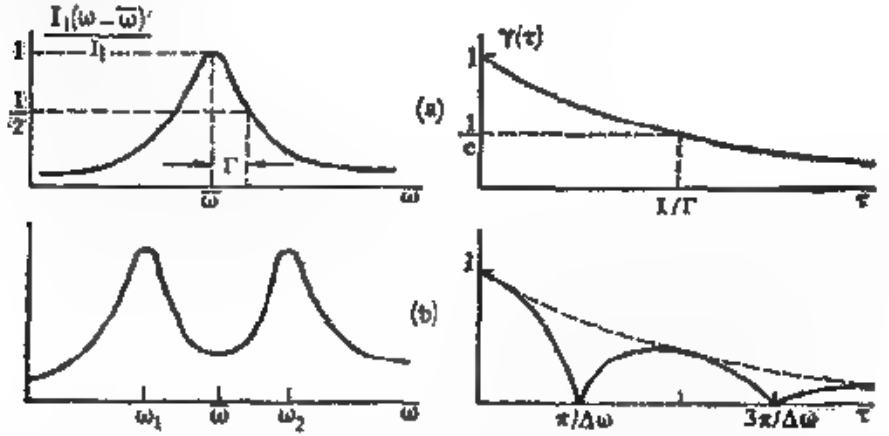


Fig. 4.19. Densidades espectrales y grados de coherencia para los casos descritos por las relaciones (22.18), (22.14) (a) y (22.15), (22.16) (b)

entonces el grado de coherencia resulta ser igual a

$$\gamma(\tau) = \exp(-\Gamma|\tau|)\,|\cos(\Delta\omega\tau/2)|, \quad \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \qquad (22.16)$$

y, además de que disminuye, con el crecimiento de $|\tau|$, experimenta oscilaciones con un período igual a $2\pi/|\Delta\omega|$, inversamente proporcional a la distancia entre las componentes de la densidad espectral (véase fig. 4.19, *b*). La envolvente de estas oscilaciones se define por la semianchura Γ de las componentes.

Veamos ahora otro modelo del proceso de radiación. Tomemos en cuenta el movimiento del átomo emitente y no vamos a considerar la partición de su radiación en trenes ondulatorios. Como consecuen-

cia del efecto Doppler (véase capítulo XXI), la frecuencia de la luz en el lugar de observación ω se diferencia de la frecuencia $\bar{\omega}$ de la luz, emitida por un átomo inmovil, en la siguiente magnitud:

$$\omega - \bar{\omega} = \frac{v}{c}\bar{\omega},$$

donde v es la proyección de la velocidad del átomo sobre la dirección de observación. Sea la fuente de luz un gas; los átomos emisores de este gas tienen diferentes velocidades y, por consiguiente, todo el gas emite una radiación no monocromática. Supongamos que tiene lugar la distribución de Maxwell de los átomos según las proyecciones de sus velocidades sobre la dirección de observación

$$(\sqrt{\pi}\bar{v})^{-1} \exp\left[-(v/\bar{v})^2\right], \quad \bar{v}^2 = 2kT/m,$$

donde k es la constante de Boltzmann, m, la masa del átomo y T, la temperatura absoluta *). Entonces para la densidad espectral de la intensidad de radiación del gas obtenemos

$$I_1(\omega - \bar{\omega}) = I_1 [\sqrt{\pi}\,\bar{\omega}\bar{v}/c]^{-1} \exp\left[-(\omega - \bar{\omega})^2/(\bar{\omega}\bar{v}/c)^2\right]; \qquad (22.17)$$

en este caso ella resultará ser una función gaussiana con una semianchura

$$\bar{\omega}\bar{v}/c. \qquad (22.18)$$

El cálculo del grado de coherencia en este caso nos conduce a la relación (véase ejercicio 23)

$$\gamma(\tau) = \exp\left[-(\tau/\bar{\tau})^2\right], \quad \bar{\tau} = 2c/\bar{v}\bar{\omega}. \qquad (22.19)$$

El grado de coherencia monótonamente disminuye al crecer τ y cuando

$$\tau = \bar{\tau} = 2c/\bar{v}\bar{\omega} = \lambda/\pi\bar{v} \qquad (22.20)$$

resulta ser e veces menor que su valor máximo. La magnitud τ desempeña, por consiguiente, un papel análogo al de la duración media del tren. Como en el esquema anterior de emisión, el tiempo de coherencia es inversamente proporcional a la semianchura de la densidad espectral de la intensidad, pero el coeficiente de proporcionalidad resulta ser otro (dos veces mayor).

Una excelente particularidad del mecanismo examinado (llamado mecanismo Doppler) de aparición de la no monocromaticidad y coherencia parcial, consiste en que el tiempo de coherencia se define sólo por la temperatura del gas, por la frecuencia media de

*) Aquí el tiempo de coherencia y la temperatura absoluta están designados por una misma letra T, pero esto no puede llevar a confusión, debido a que del contexto se entiende de que se trata.

irradiación y por el peso atómico. Para un gas con un peso atómico ≈ 100 y $T \approx 300$ K hallamos el siguiente valor de la longitud de coherencia

$$l = c\bar{\tau} = \frac{1}{\pi}\lambda\frac{c}{v} \approx 21 \text{ cm} \qquad (\lambda = 0{,}5\ 10^{-3} \text{ mm}).$$

Los ejemplos examinados muestran de un modo evidente, cuán sensible es la forma general de la función $\gamma(\tau)$ a las particularidades de la densidad espectral. Esto aclarece la posibilidad de utilización de la curva de visibilidad para el análisis de la composición espectral de irradiación. Por primera vez este método fue utilizado por Michelson, el cual logró establecer que casi todas las líneas espectrales en la irradiación de los gases enrarecidos constan de varias componentes dispuestas muy estrechamente, las cuales no podían ser detectadas con los aparatos espectrales comunes.

Hasta el momento, el grado de coherencia $\gamma(\tau)$ y la fase $\psi(\tau)$ han sido observadas como características del cuadro de interferencia que permiten, en particular, determinar el contraste y la posición de las franjas. A estas magnitudes se las puede comprender en un sentido algo más general. El hecho es que las oscilaciones luminosas que se suman en algún punto del cuadro de interferencia, se definen unívocamente por las oscilaciones luminosas en las fuentes de luz: las amplitudes de las oscilaciones en los puntos M y S_1, S_2 son proporcionales entre sí, y las fases se diferencian en las magnitudes $2\pi d_1/\lambda$, $2\pi d_2/\lambda$. Se puede decir por eso, que $\gamma(\tau)$ y $\psi(\tau)$ constituyen las características de las oscilaciones luminosas emitidas por la fuente en los momentos de tiempo t y $t + \tau$. A diferencia de la intensidad del campo, que caracteriza el estado de las oscilaciones luminosas en cierto momento de tiempo, el grado de coherencia $\gamma(\tau)$ y la fase $\psi(\tau)$ describen el estado de las oscilaciones luminosas en dos distintos momentos de tiempo t y $t + \tau$.

Para desarrollar este punto de vista observemos una característica aún más general del campo luminoso, la cual describe el estado de las oscilaciones luminosas en dos distintos momentos de tiempo y en dos diferentes puntos del espacio. Escojamos dos puntos arbitrarios P_1, P_2 en los cuales tienen lugar oscilaciones luminosas

$$\left.\begin{aligned} s_1(P_1, t) &= a_1(P_1, t)\cos[\bar{\omega}t + \varphi_1(P_1, t)], \\ s_2(P_2, t) &= a_2(P_2, t)\cos[\bar{\omega}t + \varphi_2(P_2, t)] \end{aligned}\right\} \qquad (22.21)$$

Al igual que antes, vamos a suponer que las amplitudes $a_1(P_1, t)$, $a_2(P_2, t)$ y las fases $\varphi_1(P_1, t)$, $\varphi_2(P_2, t)$ son funciones aleatorias del tiempo. Introduzcamos, por ahora solo formalmente, unas magnitudes análogas a $c(\tau)$ y $s(\tau)$:

$$c_{12}(\tau) = [\overline{a_1^2(P_1)}\,\overline{a_2^2(P_2)}]^{-1/2}\,\overline{a_1(P_1,\ t)\,a_2(P_2,\ t+\tau)} \times$$
$$\times \cos[\varphi_2(P_2,\ t+\tau) - \varphi_1(P_1,\ t)];$$
$$s_{12}(\tau) = [\overline{a_1^2(P_1)}\,\overline{a_2^2(P_2)}]^{-1/2} \times \qquad (22.22)$$
$$\times \overline{a_1(P_1,\ t)\,a_2(P_2,\ t+\tau)\,\mathrm{sen}\,[\varphi_2(P_2\ t+\tau) - \varphi_1(P_1,\ t)]}$$

y formemos de ellas unas combinaciones, análogas a $\gamma(\tau)$, $\psi(\tau)$:

$$\gamma_{12}(\tau) = \sqrt{c_{12}^2(\tau) + s_{12}^2(\tau)}, \qquad \mathrm{tg}\,\psi_{12}(\tau) = s_{12}(\tau)/c_{12}(\tau) \qquad (22.23)$$

La magnitud $\gamma_{12}(\tau)$ se emplea, evidentemente, como medida de capacidad de las oscilaciones $s_1(P_1,\ t)$ y $s_2(P_2,\ t)$ a la interferencia En efecto, coloquemos una pantalla con dos pequeños orificios, que dejan pasar las ondas luminosas de los puntos P_1 y P_2 (fig. 4.20). Las ondas de los demás puntos del campo luminoso son detenidas por la pantalla. Como resultado de los fenómenos de difracción, detrás de la pantalla se propagarán las ondas en casi todas las direcciones Por consiguiente, los orificios cercanos a los puntos P_1 y P_2 juegan el papel de fuentes de luz; detrás de la pantalla se formará un cuadro de interferencia, además la posición y el contraste de las franjas de interferencia se definirán por las magnitudes $\gamma_{12}(\tau)$, $\psi_{12}(\tau)$, si por τ comprendemos el tiempo $(d_2 - d_1)/c$, en el transcurso del cual la onda del primer agujero se retrasa respecto a la onda del segundo. De esta manera, $\gamma_{12}(\tau)$ caracteriza la capacidad a la interferencia de las oscilaciones en los puntos P_1, P_2 cuando la diferencia de recorrido $d_2 - d_1 = c\tau$ o, en otras palabras, la coherencia de las oscilaciones luminosas en los puntos P_1, P_2, en distintos momentos de tiempo; que se diferencian entre sí por el intervalo τ. Se acostumbra llamar $\gamma_{12}(\tau)$ *grado de coherencia de las oscilaciones luminosas en los puntos* P_1, P_2 o, simplemente, grado de coherencia.

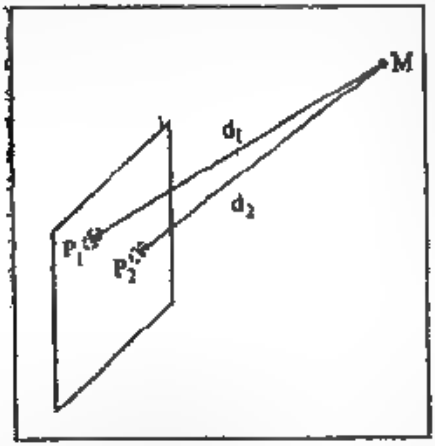


Fig. 4.20. Interpretación del grado de coherencia $\gamma_{12}(\tau)$ de las oscilaciones luminosas en los puntos P_1 y P_2.

Los puntos P_1, P_2 fueron escogidos arbitrariamente; en particular, ellos pueden coincidir. En este caso las oscilaciones $s_1(P_1,\ t)$, $s_2(P_1,\ t+\tau)$ se diferencian sólo en el momento de tiempo, cuando ellos se realizan, y en este caso se habla de la *coherencia temporal de las oscilaciones*. En los experimentos de interferencia, examinados más arriba, donde como fuentes de luz S_1, S_2 intervenían dos imágenes de

una misma fuente puntual, es importante justamente la coherencia tempora., por cuanto se suman oscilaciones que tienen lugar en diferentes momentos pero en una fuente puntual y real de luz.

Si consideramos coincidentes los momentos de tiempo t y $t + \tau$ ($\tau = 0$), pero los puntos P_1, P_2 son diferentes, entonces $\gamma_{12}(0)$ caracteriza la coherencia de las oscilaciones que se realizan en los puntos P_1 y P_2 simultáneamente. En este caso se habla de la *coherencia espacial de las oscilaciones en los puntos* P_1, P_2 o, simplemente, sobre la *coherencia espacial*.

La coherencia espacial juega un papel importante en la formación de imágenes en los sistemas (aparatos) ópticos. A consecuencia del tautocronismo de los sistemas ópticos (véase § 20) las oscilaciones luminosas en las imágenes de diferentes puntos corresponden a las oscilaciones simultáneas en la fuente de luz, es decir, en el objeto observado a través del sistema. Simultáneamente, como resultado de los fenómenos de difracción y aberración, a cada punto del plano de la imágen llegan ondas emitidas por diferentes puntos del objeto. Si el objeto es autoluminiscente (autoluminoso) entonces las oscilaciones en sus diferentes puntos no son coherentes y en la imagen no pueden sumar las intensidades de los diferentes puntos del objeto que llegan a dado punto del plano de la imagen. Si el objeto no es autoluminoso, entonces sus diferentes puntos, hablando en forma general, son parcialmente coherentes y no se pueden sumar las intensidades. En efecto, los objetos no autoluminosos son observados como resultado de la difusión de las ondas incidentes sobre el objeto, desde una fuente ajena de luz. Si como tal se emplea una fuente puntual de luz, entonces las oscilaciones luminosas en todos los puntos del objeto iluminado se encuentran en relaciones fijas de fase, es decir, son completamente coherentes y en la imagen no se suman las intensidades, sino las amplitudes de las oscilaciones, que vienen de diferentes puntos del objeto a un punto del plano de las imágenes.

Objetos no autoluminiscentes son, por ejemplo, un preparado observado con ayuda del microscopio y alumbrado con una fuente ajena de luz (véase § 97), o la rendija de un aparato espectral de igual manera iluminada por una fuente, cuyo espectro de irradiación se examina (véase § 100). Finalmente, todos los objetos, observables visualmente bajo la luz diurna o artificial, se refieren al tipo de objetos no autoluminiscentes.

En el experimento de interferencia de Joung (véase § 16), como fuente de luz se utilizan dos rendijas, iluminadas por cierta fuente, es decir el esquema del experimento en sus características esenciales coincide con el esquema de la fig. 4 20. Si la diferencia de recorrido es relativamente pequeña, de manera que se observan las franjas de orden inferior, entonces el contraste de las franjas de interferencia se definirá principalmente por el grado de coherencia espacial de la iluminación de las rendijas. La situación será análoga en el caso

del interferómetro estelar de Michelson (§ 45), donde la coherencia espacial parcial de la iluminación de las rendijas del interferómetro sirve para la medición de las dimensiones angulares de las estrellas.

El rol de la coherencia espacial parcial en todos los casos enumerados anteriormente se puede comprender, al observar el siguiente esquema simplificado. Supongamos que los diferentes puntos de una fuente lineal de luz emiten ondas con fases completamente aleatorias. Nos interesa la coherencia espacial del campo luminoso creado por esta fuente extendida de luz en los puntos P_1, P_2. En calidad de modelo de una fuente extendida tenemos el conjunto de puntos luminosos, dispuestos equidistantemente en el segmento de una recta de longitud $2b$ (fig. 4.21), los cuales son emisores de ondas con iguales amplitudes, pero con fases completamente arbitrarias (como puntos luminosos se pueden considerar, para mayor claridad, los diferentes

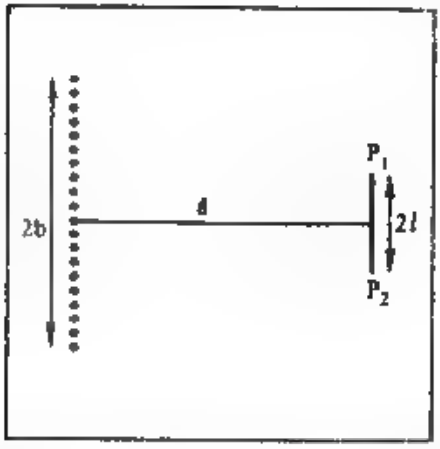


Fig. 4.21. Ilustración para cálculo del grado de coherencia espacial $\gamma_{12}(0)$.

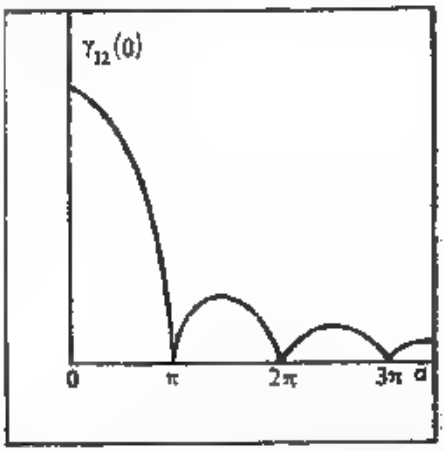


Fig. 4.22. Gráfico de la dependencia del grado de coherencia espacial de $\alpha = 4\pi bl/\lambda d$ *en el caso de una fuente extendida autoluminiscente de luz.*

átomos de una fuente de luz). Los cálculos muestran (véase ejercicio 24) que el grado de coherencia de las oscilaciones en los puntos P_1, P_2, dispuestos en la recta, paralela a la fuente de luz y separados entre sí a una distancia $2l$, es igual a

$$\gamma_{12}(0) = \left|\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right|, \qquad \alpha = 4\pi bl/\lambda d, \tag{22.24}$$

donde d es la distancia entre la fuente y los puntos de observación. En la fig. 4.22 está trazado el gráfico de la dependencia del grado de coherencia con respecto a la magnitud $\alpha = 4\pi bl/\lambda d$. Al aumentar α, el grado de coherencia, $\gamma_{12}(0)$ al principio disminuye, se convierte en cero cuando $\alpha = \pi$ y para valores más grandes experimenta oscila-

ciones, pero no supera el valor de 0,2 aproximadamente. De esta manera, la desigualdad $\alpha < \pi$ se puede tomar en calidad de criterio de existencia de la coherencia espacial.

Si fijamos la distancia $2l$ entre los puntos P_1 y P_2, entonces de la condición para la existencia de coherencia se deduce la limitación de las dimensiones de la fuente

$$\theta = 2b/d < \lambda/2l.$$

Por lo tanto, las dimensiones angulares θ de la fuente de luz no deben superar la relación de la longitud de onda entre la distancia $2l$ de los puntos P_1 y P_2. De esta manera, para la creación de una iluminación, prácticamente coherente, no hay necesidad de emplear una fuente de luz rigurosamente puntual. Si, por ejemplo $\alpha = \pi/4$, entonces $\gamma_{12}(0) = 0{,}90$, es decir, el grado de coherencia es sólo en un 10% peor, que en el caso de una fuente rigurosamente puntiforme.

Supongamos ahora que han sido fijadas las dimensiones angulares de una fuente de luz. Entonces la condición $\alpha < \pi$ definirá las distancias $2l_{coh}$, para las cuales es necesario considerar la coherencia parcial de las oscilaciones en los puntos P_1 y P_2. El conjunto de puntos, que no distan entre sí más que $2l_{coh}$, se llama *zona de coherencia*. Considerando la relación (22 24), de la condición $\alpha < \pi$ hallamos

$$2l < 2l_{coh} = \lambda/\theta.$$

Si la iluminación es ocasionada por la luz directa del Sol, cuya dimensión angular es $\theta = 30' = 0{,}9 \cdot 10^{-2}$ rad, entonces la dimensión de la zona de la coherencia será $1{,}1 \cdot 10^{2}\ \lambda = 0{,}06$ mm (para $\lambda = 0{,}55 \cdot 10^{-3}$ mm) En el experimento de Joung (donde se utilizaba el Sol en calidad de fuente de luz), de los cálculos citados se deduce, que las rendijas S_1 y S_2 (véase fig. 4.10) deben estar dispuestas a una distancia, menor de 0,06 mm, y para la observación de unas franjas claras de interferencia con visibilidad, por ejemplo, de 0,90, es necesario tomar $2l = 0{,}015$ mm.

Si la iluminación del objeto de observación es ocasionada no por la luz solar directa, sino por la luz dispersada en los objetos circundantes o en las nubes, entonces diferentes puntos de estos objetos se pueden considerar como fuentes de ondas incoherentes (debido a que la región de coherencia para ellos tiene dimensiones de 0,06 mm) y utilizar también en este caso el modelo de una fuente extendida incoherente. En el caso de una iluminación multilateral del objeto, es necesario considerar $\theta \approx 1$ y entonces para las dimensiones de la zona de coherencia tendremos $2l_{coh} \approx \lambda$.

El poder separador del ojo del hombre al observar a una distancia de 250 mm (la llamada distancia de visión perfecta) es aproximadamente de 0,1 mm. Dos objetos pequeños dispuestos a esta distancia e iluminados aun por la luz solar directa, se pueden considerar fuen-

tes prácticamente incoherentes. Sobre todo, esto se refiere a la iluminación multilateral. De esta manera, al observar, a simple vista, en condiciones naturales, se puede no tomar en cuenta la coherencia parcial de las ondas, que llegan al ojo de los diferentes puntos de los objetos. Por el contrario, al observar con ayuda de un microscopio con un poder separador del orden de la longitud de onda, la consideración de la coherencia parcial del objeto, por regla general, es necesaria.

El criterio examinado de coherencia espacial fue deducido para el simple caso idealizado de una fuente lineal de luz, compuesta de puntos luminosos dispuestos de forma equidistante. No es difícil ver, sin embargo, que en su forma cualitativa este criterio sigue siendo válido también para cualquier fuente extendida, compuesta de puntos luminosos dispuestos arbitrariamente. Para convencernos de la justeza de lo dicho, enumeremos los puntos luminosos con el índice j y escribamos la oscilación s_{1j}, creada por la fuente j en el punto de observación:

$$s_{1j} = a_j \cos(\omega t - 2\pi d_{1j}/\lambda + \varphi_j),$$

donde a_j y φ_j son las amplitudes y las fases, que caracterizan la fuente puntual de luz j, y d_{1j} es la distancia entre aquélla y el punto P_1. La oscilación s_1, creada en el punto P_1 por toda la fuente extendida, es la suma de todas las oscilaciones s_{1j}:

$$s_1 = \sum_j s_{1j}.$$

Las amplitudes a_j y las fases φ_j son magnitudes aleatorias pero para cada conjunto concreto de a_j, φ_j y d_{1j}, la oscilación resultante tiene un cierto valor de amplitud y fase. Si nos trasladamos del punto P_1 al punto P_2, entonces la fase de las oscilaciones que se suman cambiará como resultado de que la distancia d_{2j} hasta el punto P_2 se diferencia de d_{1j} y la oscilación resultante tendrá una amplitud, distinta de la amplitud en el punto P_1. Las amplitudes de la oscilación resultante en los puntos P_1 y P_2 se diferenciarán de una manera notable, sólo en el caso de distancias $2l$ entre P_1 y P_2 lo suficientemente grandes, cuando las diferencias $d_{2j} - d_{1j}$ de los recorridos, calculadas para distintas fuentes puntuales, se diferencian como mínimo en una magnitud del orden de la longitud de onda. En caso contrario la fase de todas las oscilaciones parciales cambiarán prácticamente en la misma magnitud y la amplitud de la oscilación resultante no variará. Con ayuda de unos cálculos simples, análogos a los hechos en el § 15, hallamos que la distancia $2l$ entre los puntos P_1 y P_2 debe satisfacer la desigualdad

$$2l2b/d \geqslant \lambda.$$

Pero esta condición coincide con la de la incoherencia práctica de las oscilaciones en los puntos P_1 y P_2. El sentido contrario de la

desigualdad

$$2l < \lambda d/2b = 2l_{coh} \qquad (22.25)$$

significará la coherencia práctica de las oscilaciones en los puntos P_1 y P_2, es decir define las dimensiones de la zona de coherencia. De esta manera, la desigualdad (22.25) es un criterio universal de la coherencia espacial, aplicable a cualquier fuente extendida de luz. Con esto se puede justificar la discusión hecha más arriba de ejemplos concretos de iluminación (con luz solar, etc.).

Es necesario tener en cuenta, que el grado de coherencia y la dimensión de la zona de coherencia son características medias del

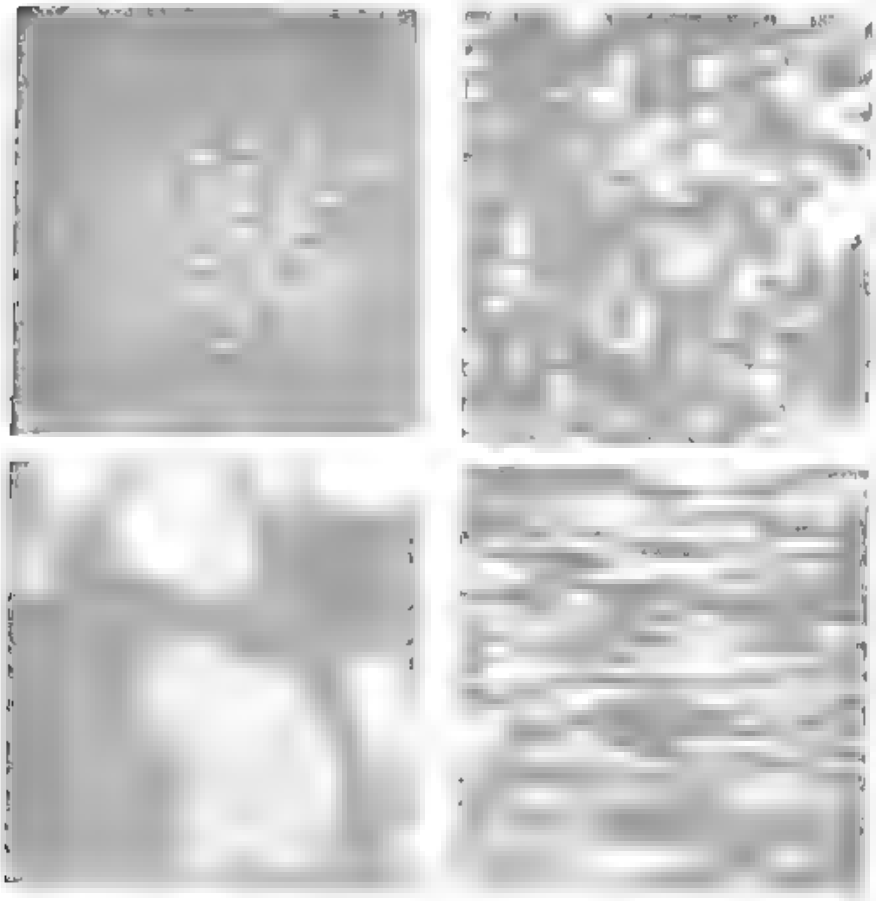


Fig. 4.23. Fotografía de la distribución aleatoria de la iluminación creada por una fuente extendida de luz (vidrio mate) en los casos cuando la distancia d, desde la fuente hasta la película, es igual a 10 cm (a), 30 cm (b), 100 cm (c). El caso d corresponde a la fuente alargada mostrada con un rectángulo.

campo luminoso aleatorio. En cada realización concreta de las fases y amplitudes aleatorias en la superficie de una fuente extendida de luz, nosotros tendremos una distribución completamente concreta de iluminación en la pantalla, donde se efectúa la observación, pero esta distribución será irregular. En la fig. 4.23 se muestran fotografías (positivas) de la iluminación creada en la película fotográfica por una fuente extendida de luz, en calidad de la cual se toma un vidrio mate, iluminado por la irradiación del láser helio-neónico, además en la fig. 4.23, *a—c* la región iluminada constituye un circulito con un diámetro aproximadamente $2b = 0{,}3$ mm. La iluminación de la película tiene una estructura característica irregular granulosa, con la particularidad de que la dimensión de las manchas o granos aumenta proporcionalmente a la distancia d.

Como consecuencia de la heterogeneidad irregular del vidrio mate, la onda del láser espacialmente coherente adquiere un incremento de fase, que cambia de manera aleatoria de un punto a otro de la fuente. Por eso la luz difusa modela bien la irradiación de una fuente autoluminosa extendida, y los resultados del experimento con el vidrio mate se pueden comparar con los cálculos ya hechos.

Los sectores de las fotografías con un elevado valor de iluminación responden, evidentemente, a que las ondas incidentes sobre ellos de diferentes puntos del vidrio mate resultan por circunstancias casuales, en su mayoría cofásicas. Al contrario, en los sectores con baja iluminación ocurre la extinción mutua de las ondas, procedentes de los diferentes puntos del vidrio mate. Para que el grado de cofasidad de estas ondas cambie notablemente, es necesario desplazarse en el plano de la película a una cierta distancia; su valor medio definirá la dimensión de la zona de coherencia. De esta manera, el grano medio es la zona de coherencia y su dimensión media es la dimensión de la zona de coherencia. La variación de la dimensión de los granos al cambiar la distancia d entre el vidrio mate y la película está de acuerdo con los cálculos, ya que la dimensión de la zona de coherencia l_{coh} es proporcional a d.

La fotografía en la fig. 4.23 *d* fue obtenida para $d = 100$ cm, pero en el vidrio mate fue iluminado un sector de forma aproximadamente rectangular de $0{,}2 \times 1$ mm^2, orientado tal como se muestra en la fotografía (la radiación del láser se enfocaba con una lente cilíndrica). Como vemos, las dimensiones de la zona de coherencia en las direcciones horizontal y vertical se diferencian y se encuentran en proporción inversa con las dimensiones correspondientes de la fuente de irradiación. Este hecho concuerda con los resultados de los cálculos, según los cuales $2l_{coh} \approx \lambda/\theta = \lambda d/2b$.

Una importante diferencia entre el vidrio mate y una fuente autoluminiscente de luz consiste en lo siguiente: las relaciones de fase entre las oscilaciones luminosas en los diferentes puntos del vidrio mate son irregulares pero invariables en el transcurso del

tiempo. Por eso la estructura granulosa de la iluminación de la pantalla también es constante en el tiempo. En el caso de una fuente autoluminosa la diferencia de fase de las oscilaciones en dos puntos cualesquiera de su superficie cambiará rápidamente, lo que provocará, evidentemente, el movimiento caótico de los granos y la desaparición de la estructura granulosa al ser expuesta en el transcurso de un intervalo de tiempo lo suficientemente grande. Por eso al utilizar objetos autoluminosos en condiciones ordinarias, con receptores inerciales de irradiación, nosotros no observamos la estructura granulosa. Se puede decir, que las fotografías obtenidas con ayuda de un vidrio mate responden a la distribución instantánea de la iluminación, que aparece en el caso de fuentes autoluminosas.

Hasta ahora nosotros hemos observado experimentos de interferencia, en los cuales se mide la intensidad de la luz en dependencia

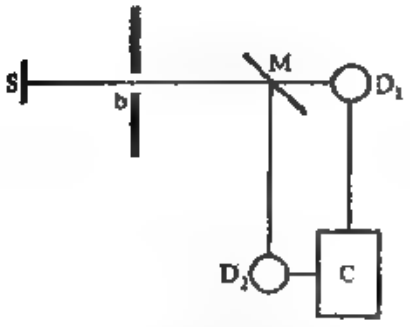


Fig. 4.24. Esquema del experimento para medición de la correlación de las intensidades.

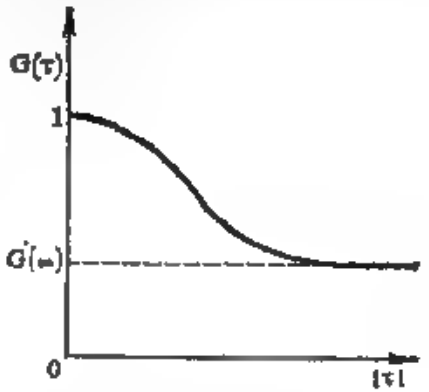


Fig. 4.25. Gráfico de la función G (τ).

de la diferencia de recorrido (o del tiempo de retraso) entre dos haces interferentes. Los resultados de estos experimentos, como ha sido aclarado, se pueden describir con ayuda del grado de coherencia $\gamma_{12}(\tau)$, el cual caracteriza el grado de concordancia o *correlación* existente entre las oscilaciones s_1 y s_2. Por eso a $\gamma_{12}(\tau)$ se le llama también *función de correlación.*

Son posibles experimentos de un tipo algo diferente, en los cuales, sin embargo, también se revelan propiedades correlativas de los haces luminosos. La esencia de la cuestión se puede comprender del esquema del experimento, representado en la fig. 4.24 (Brown y Twiss, 1956). La luz de la fuente S pasa a través del pequeño agujero b (con una dimensión menor que la de la zona de coherencia),

se divide en dos haces por el espejo semitransparente M y se proyecta en los receptores de luz D_1 y D_2. Las corrientes fotoeléctricas, que aparecen en D_1 y D_2, son multiplicadas con ayuda de métodos radiotécnicos en el correlador C, y el producto de ellas se promedia. Trasladando uno de los receptores e introduciendo con esto un retardamiento entre los dos haces, se puede medir la magnitud

$$G(\tau) = \frac{1}{J^2}\frac{1}{t}\int_0^t I(t')\,I(t'+\tau)\,dt' \qquad (22.26)$$

como función de τ. El retraso τ se puede alcanzar también con métodos radiotécnicos.

Los resultados de las mediciones de $G(\tau)$ en experimentos de este tipo están representados esquemáticamente en la fig. 4.25. Las principales particularidades del gráfico de la función $G(\tau)$ consisten en la existencia de un máximo más o menos pronunciado para valores pequeños de τ y en una invariabilidad aproximada para τ grandes.

Los rasgos característicos señalados de la función $G(\tau)$ se pueden comprender fácilmente, si tomamos en cuenta la variabilidad de la intensidad $I(t)$ de los haces en el transcurso de tiempo. En caso contrario, es evidente que tendremos $G(\tau) = 1$. En efecto, $I(t)$ está modulado en el tiempo de una forma aleatoria, es decir constituye una sucesión aleatoria de máximos y mínimos. Cuando $\tau = 0$ todos los máximos de uno de los multiplicandos de la función subintegral en (22.26) coincidirán con los máximos del otro y como resultado $G(0)$ tendrá un valor elevado. Si el tiempo de retraso τ es lo suficientemente grande, entonces la correlación entre las posiciones de los máximos de los multiplicandos desaparecerá y la magnitud $G(\tau)$ disminuirá en comparación con $G(0)$. De esta manera la función $G(\tau)$ caracteriza el grado de correlación de los valores de intensidad en los momentos de tiempo t y $t+\tau$ en dependencia del tiempo de retraso τ. Debido a que las intensidades dependen cuadráticamente de las amplitudes del campo, la función $G(\tau)$ recibió el nombre de *función de correlación de segundo orden*.

Para calcular teóricamente la función $G(\tau)$ utilicemos el modelo de los trenes ondulatorios con modulación de amplitud, es decir vamos a considerar que en el transcurso de los intervalos de tiempo con prolongación T la intensidad $I(t)$ conserva un valor constante, y al término del tiempo T cambia de golpe en una magnitud aleatoria. Al realizar los cálculos según el esquema del ejercicio 21, correspondiente al modelo de trenes con modulación de amplitud, se puede obtener

$$G(\tau) = \begin{cases} (\bar{I})^2/\overline{I^2} + [1-|\tau|/T]\,[1-(\bar{I})^2/\overline{I^2}], & |\tau| \leqslant T, \\ (\bar{I})^2/\overline{I^2}, & |\tau| \geqslant T. \end{cases} \qquad (22.27)$$

De esta manera, las principales particularidades cualitativas de la función $G(\tau)$ — su máximo para pequeños $|\tau|$ y su invariabilidad para grandes $|\tau|$ — se reflejan correctamente en el modelo escogido. Al igual que en el caso de los experimentos de interferencia, el tiempo de correlación se define, como es natural, por la duración T del tren de ondas.

Particular interés ofreció la magnitud relativa del máximo para $\tau = 0$, es decir la relación

$$g = \frac{G(0)}{G(\infty)} = \frac{\overline{I^2}}{(\overline{I})^2}.$$

Supongamos, que el número relativo de trenes con intensidad I se define por la distribución de Rayleigh

$$\exp(-I/\overline{I}).$$

Entonces simples operaciones (véase ejercicio 25) mostrarán que $g = 2$. Para la distribución de Rayleigh son características las fluctuaciones relativamente pequeñas de la intensidad. Por ejemplo, los valores de la intensidad que sobrepasan el valor medio en más de dos veces, se encuentran sólo en el 14% de los casos. Esta situación, como muestra un análisis más profundo, es normal para las fuentes, en las cuales los átomos emiten ondas independientemente unos de otros.

Los valores altos de g significan, que el valor instantáneo máximo de la intensidad de irradiación sobrepasa en mucho su magnitud media. Por ejemplo, en algunos láseres la radiación tiene la forma de fuertes «destellos», separados por intervalos de tiempo, que sobrepasan considerablemente la duración de estos mismos «destellos» (véase § 230), y en este caso $g \gg 1$.

---

5. ONDAS LUMINOSAS ESTACIONARIAS

§23. Formación de ondas estacionarias. Experimentos de Wiener

Como se indicó anteriormente, la condición necesaria para la obtención de un cuadro estable de interferencia es la presencia por lo menos de dos ondas coherentes, que se superponen una sobre otra. El método de obtención de dos ondas coherentes, que fue indicado por Fresnel, consiste en que con ayuda de algún procedimiento se realiza la descomposición de la onda incidente en dos. Un procedimiento simple de superposición de dos ondas coherentes, el cual origina un caso muy importante e interesante de interferencia, consiste en la reflexión de una onda que incide normalmente sobre una pared; al suceder esto, la onda reflejada se propaga a través de las

mismas zonas del medio, moviéndose en dirección contraria. En este caso el cuadro resultante de interferencia depende de la relación de las fases de ambas ondas (incidente y reflejada). Las condiciones de interferencia entre la onda incidente y la reflejada son similares para cualquier tipo de ondas. Ellas son estudiadas más detalladamente en los cursos de mecánica y acústica. El hecho de que en el proceso de reflexión puede tener lugar un cambio de fase de la onda constituye una circunstancia esencial. Por eso, si la ecuación de la onda incidente es

$$s_1 = a \operatorname{sen} (\omega t - kx), \tag{23.1}$$

entonces para la onda que ha sido reflejada en el punto $x = 0$ tendremos

$$s_1 = a \operatorname{sen} (\omega t + kx + \delta), \tag{23.2}$$

donde, como siempre, $\omega = 2\pi/T$ y $k = 2\pi/\lambda$. El cambio de signo delante de x corresponde al cambio de *dirección* en la propagación, y δ denota el cambio de fase en la reflexión. La onda resultante se escribe en la forma

$$s = s_1 + s_2 = 2a \cos \left(kx + \frac{1}{2}\delta\right) \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{1}{2}\delta\right). \tag{23.3}$$

La fórmula (23.3) muestra, que la amplitud de las oscilaciones es igual a $2a \cos (kx + \frac{1}{2}\delta)$, es decir es distinta para los diferentes puntos del medio, cambiándose de un punto a otro según una simple ley armónica. Pero el multiplicando $\operatorname{sen} (\omega t + \frac{1}{2}\delta)$ que expresa el cambio periódico en el tiempo no depende de la coordenada.

El hecho de que la amplitud se exprese como una función armónica

$$2a \cos \left(kx + \frac{1}{2}\delta\right) = 2a \cos \left(2\pi x/\lambda + \frac{1}{2}\delta\right),$$

muestra, que el *signo* de la amplitud es invariable en los límites de una semionda y se torna contrario al cambiar x en $\frac{1}{2}\lambda$, es decir, al pasar de una semionda a otra. En otras palabras, cuando en límites de una semionda todos los s son positivos, en los límites de la semionda adyacente ellos son negativos. Si se considera la amplitud como una magnitud esencialmente positiva, como generalmente se hace, entonces la circunstancia indicada se podría expresar como la siguiente afirmación: la fase de la oscilación se mantiene constante en los límites de una semionda y cambia en π al pasar de una semionda a la otra. Esta formulación puede servir de definición de la onda estacionaria.

De la fórmula (23.3) se deduce que en la onda estacionaria existe un conjunto de puntos, a los cuales les corresponde una amplitud

igual a cero. Estos puntos se definen por la condición $kx + \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}n\pi$, donde $n = 1, 3, 5, \ldots$ son números impares. Es evidente que estos puntos distan uno del otro una semionda y se llaman *nodos* de la onda estacionaria. En el punto medio entre ellos, están dispuestos los lugares que corresponden a los valores máximos de la amplitud, precisamente, a los valores $2a$. Estos puntos se llaman *vientres*. Ellos se definen por la condición $kx + \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}n\pi$, donde $n = 0, 2, 4, \ldots$ son números pares. En lo que se refiere a la magnitud δ que define el cambio de fase en la reflexión, es necesario tomar en consideración la siguiente circunstancia. La onda móvil (progresiva, viajera) (electromagnética, elástica, etc.) representa un conjunto de dos ondas que corresponden a las dos partes, de las cuales se compone la energía de la onda que se propaga (energías eléctrica y magnética, potencial y cinética). En la onda electromagnética móvil las direcciones de ambos vectores (E y H) en cada momento están ligadas de determinada manera a la dirección de propagación (v) formando un sistema dextrórsum (*véase fig.* 5.1). La condición necesaria para la reflexión, es decir para el cambio de la dirección de propagación por su contraria, es el cambio de la dirección de uno de los vectores E o H por su contraria. En efecto, ya que en la onda móvil, que se forma como resultado de la reflexión, los vectores E, H y v deberán formar de nuevo un sistema dextrórsum y debido a que en la reflexión la dirección de v cambia, entonces, uno de los vectores E o H también deberá cambiar de golpe su dirección, es decir deberá obtener un cambio adicional de fase en π, o, como se habla, deberá sufrir la pérdida de una semionda. En dependencia de las condiciones en el límite en donde ocurre la reflexión esta pérdida tendrá lugar para uno o para otro vector. Nosotros analizaremos más detalladamente este problema para las ondas electromagnéticas (luminosas) en el cap. XXIII, por ahora nos limitaremos solamente a indicar, que para las ondas electromagnéticas $\delta = 0$ para el vector magnético y $\delta = \pi$ para el vector eléctrico si la permeabilidad dieléctrica ε_2 del segundo medio es mayor, que la permeabilidad dieléctrica ε_1 del primero, es decir si $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Al contrario, si $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ la reflexión va acompañada de la pérdida de una semionda para el vector magnético, y el vector eléctrico conserva invariable su fase (fig. 5.1). Esta diferencia en δ trae consigo que los nodos de uno de los vectores coincidan con los vientres del otro, lo que muestra la fig. 5.2.

Al examinar el miembro $\operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{1}{2}\delta\right)$ no es difícil ver, que los *momentos*, en los cuales los vectores E y H alcanzan su máximo valor, también se diferencian uno del otro en un cuarto de período

Estas particularidades de la onda estacionaria conllevan a que en ella no se observe ningún movimiento continuo de energía en la dirección de propagación de la onda, como ocurre en las ondas móviles; la energía de la onda estacionaria está localizada y se transmite desde la región del vientre de E (donde ella posee la forma de energía eléctrica) hasta la región del vientre de H (es decir se convierte en magnética) y viceversa. De esta manera, en lugar de la propagación de energía nosotros observamos sus oscilaciones que acompañan el paso de la energía de una forma a la otra. Esta circunstancia explica el uso del término de «onda estacionaria».

Por supuesto, las ondas estacionarias pueden ser observadas no sólo en el caso de reflexión de una onda, sino también siempre que dos ondas coherentes de igual amplitud se propaguen al encuentro una de la otra. La reflexión de la onda es prácticamente el método más sencillo para realizar esta condición.

De lo expuesto anteriormente se deduce, que en dependencia de

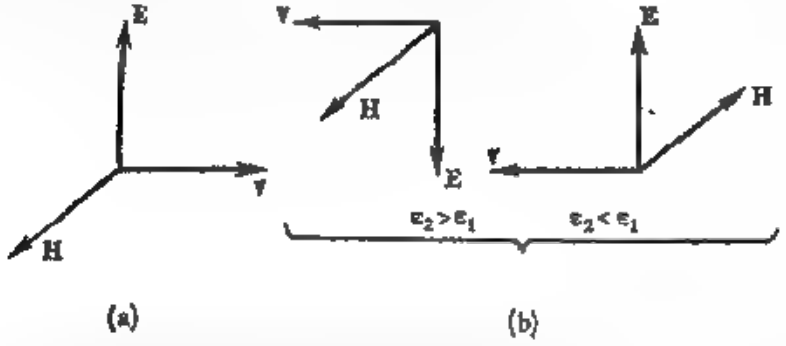


Fig. 5.1. Distribución de los vectores E, H y v en las ondas incidente (a) y reflejada (b).

las condiciones del experimento se puede prever con anticipación, dónde estarán situados los nodos de los vectores eléctrico y magnético. Esta circunstancia puede ser utilizada para determinar en el experimento cuál de los dos vectores que componen la onda luminosa (eléctrico o magnético) ejerce acción inmediata sobre la mayoría de los aparatos destinados a percibir la luz (el ojo, placa fotográfica, pantalla fluorescente, célula fotoeléctrica, etc.).

El correspondiente experimento para la investigación de la acción de la luz sobre la emulsión fotográfica fue realizado por Wiener (año 1890). Es fácil de comprender la idea de Wiener si nos imaginamos el siguiente experimento. Figurémonos una capa de emulsión fotográfica sobre una superficie metálica pulida como un espejo. La luz (aproximadamente) monocromática que incide normalmente

sobre el espejo a través de la emulsión se refleja en el espejo metálico y da un sistema de ondas estacionarias, en donde el nodo más cercano al espejo (el primero) del vector eléctrico estará situado en la superficie del espejo, ya que en el caso de reflexión en el metal cambia precisamente la fase del vector eléctrico; el primer nodo del vector magnético distará un cuarto de longitud de onda de la superficie. En el espesor de la emulsión fotográfica el campo de la onda luminosa será representado como un sistema de nodos y vientres de las intensidades de los campos eléctrico y magnético con las correspondientes transiciones de nodos a vientres.

El efecto fotográfico está relacionado con la acción de las fuerzas electromagnéticas sobre el bromuro de plata, el cual constituye el elemento *fotosensible* de la emulsión fotográfica. En correspondencia con la distribución laminar en el espacio de las amplitudes de las

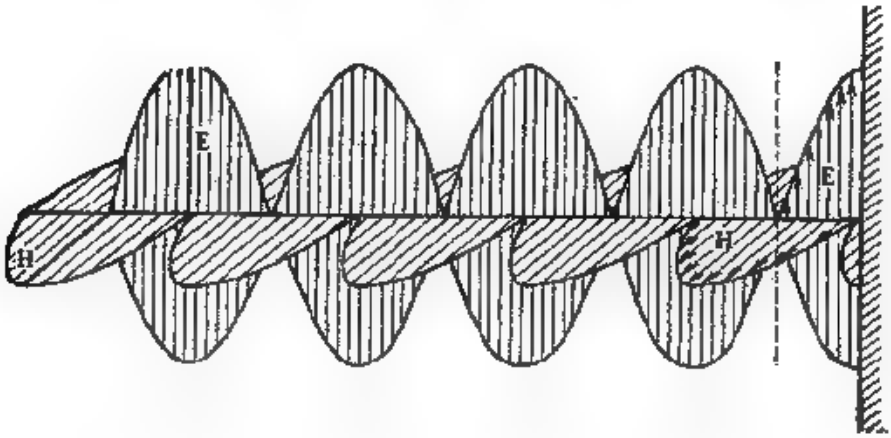


Fig. 5.2. Onda electromagnética estacionaria.

intensidades de los campos eléctrico y magnético la reducción del bromuro de plata deberá realizarse también por capas: el máximo de la reducción (ennegrecimiento de la placa) deberá encontrarse en las capas correspondientes a los valores máximos de estas amplitudes. Si el efecto fotográfico es causado por el vector eléctrico, entonces, lógicamente, en la superficie del espejo no deberá haber descomposición del bromuro de plata y la primera capa negra deberá formarse a una distancia de un cuarto de onda desde la superficie del espejo y después cada media onda. En cambio si el vector magnético es el que juega el papel determinante, entonces la primera capa de la plata liberada deberá estar en la región de su primer vientre, es decir en la superficie del espejo.

El experimento debe consistir en el establecimiento de la distribución de las capas de la plata formada en el espesor de la emulsión. La dificultad de esta observación, relacionada con las pequeñas distancias entre los vientres y los nodos, fue vencida por Wiener, al utilizar éste el método de «pequeña inclinación», señalado por primera vez por Newton (véase § 26). El sistema de ondas estacionarias fue obtenido por Wiener en el aire al reflejarse la luz monocromática en un espejo metálico. En la fig. 5.3, que representa el esquema de un experimento de este tipo, se muestra la posición de la capa fotosensible muy delgada (aproximadamente $^1/_{20}$ λ), la cual forma un ángulo pequeño φ con la superficie M del espejo. La placa de vidrio, en la cual ha sido aplicada la capa fotosensible, no se muestra en el dibujo. Esta capa fotosensible se interseca con los planos de los vientres de una u otra intensidad según las rectas paralelas, la huella de las cuales está representada en nuestra figura en forma de manchas negras. La distancia AB entre estas rectas en la *superficie* de la placa, por supuesto, es igual a

$$AB = AC/\operatorname{sen}\varphi = {}^1/_2\,\lambda/\operatorname{sen}\varphi.$$

Si φ es lo suficientemente pequeño, entonces la distancia entre los lugares de ennegrecimiento se vuelve bastante grande. En los experimentos de Wiener φ era próximo a 1', de manera que $AB \approx 1-2$ mm. En estas condiciones se puede notar, que la primera franja oscura no coincide con el espejo, sino que está separada de él por un cuarto de longitud de onda *)

El experimento de Wiener, que permitió obtener por primera vez ondas luminosas estacionarias, muestra también, que la ac

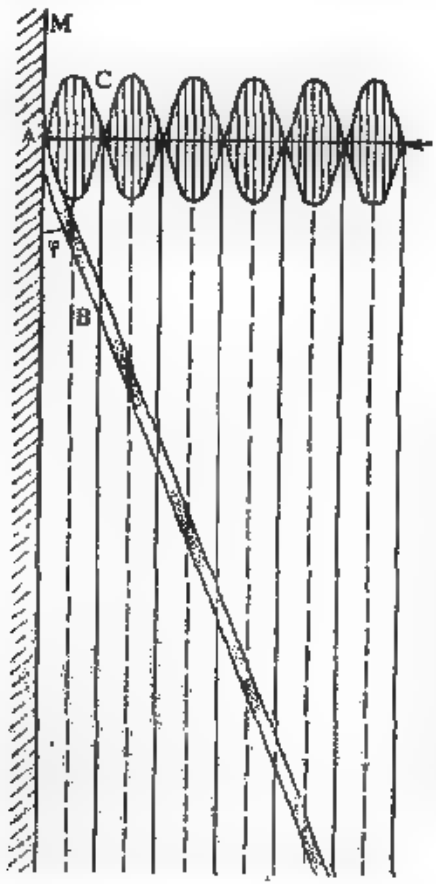


Fig. 5.3. Esquema del experimento de Wiener: el máximo desprendimiento de plata se realiza en los vientres del vector E.

*) La determinación exacta de la posición de las franjas oscuras fue realizada con el método de los anillos de Newton (véase § 26).

ción fotográfica de la onda luminosa está relacionada con su vector eléctrico. Más tarde Drude y Nernst (1892) repitieron el experimento de Wiener, cambiando la capa fotográfica por una película fina de una sustancia fluorescente, y también descubrieron que los máximos de la acción se situaban en las regiones de los vientres del vector eléctrico. Un experimento análogo con una capa fotoeléctrica fue realizado por Ives (1933); también en este caso, como se esperaba, el efecto fue causado por el vector eléctrico.

Basándonos en las concepciones electrónicas, es fácil comprender los resultados de todos los experimentos descritos y de otros análogos. La mayoría de los procesos, que son observados en la sustancia bajo la acción de la luz, está relacionada con su influencia sobre los electrones: en el efecto fotoeléctrico ocurre el desprendimiento de los electrones desde el metal iluminado; en la fluorescencia o en los procesos fotoquímicos (fotografía, percepción visual) ocurre la excitación de los átomos y de las moléculas o su ionización, es decir también una acción sobre los electrones, que entran en la composición de estos átomos y moléculas. Debido a que los electrones representan cargas eléctricas, la fuerza, que actúa sobre ellos, es originada en primera instancia por el campo eléctrico, es decir, por el vector eléctrico de la onda electromagnética. El vector magnético solamente juega un papel secundario, y su acción inmediata casi no se manifiesta.

De acuerdo con lo expuesto, el vector eléctrico de la onda electromagnética con frecuencia es llamado vector *luminoso*. Cuando se habla que la onda luminosa ha perdido una semionda al reflejarse, se refieren justamente a la pérdida de la semionda por el vector luminoso (eléctrico). Esta pérdida ocurre, por ejemplo, al reflejarse la luz, que incide normalmente sobre el límite aire — vidrio. Al contrario, en el límite vidrio — aire el vector luminoso (eléctrico) no sufre la pérdida de una semionda y las ondas estacionarias se forman a consecuencia de la pérdida de semionda por el vector magnético.

§ 26. Fotografía en colores según el método de Lippmann

Utilizando el fenómeno de la formación de ondas estacionarias dentro de la emulsión fotográfica, Lippmann (1891) propuso el siguiente método de fotografía en colores. La placa con una capa gruesa de emulsión se dispone de tal manera, que la emulsión toca la superficie del espejo de mercurio. La imagen del espectro se proyecta normalmente sobre la placa, y la luz reflejada, la cual interfiere con la incidente, forma ondas estacionarias, con la particularidad de que en los vientres del vector eléctrico ocurre la máxima reducción del bromuro de plata (la fig. 5.4 representa el esquema del experimento,

y la fig. 5.5 es la fotografía del corte de la emulsión húmeda y fuertemente hinchada). Todo el espesor de la emulsión después del tratamiento resulta ser dividido en una serie de capas separadas entre sí por unas finísimas capas intermedias de plata metálica, la distancia entre las cuales es igual a la mitad de la longitud de onda de la emisión de aquel color, que actuó sobre dado lugar de la placa.

Examinemos ahora la placa tratada de esta manera, enviando hacia ella una luz blanca bajo el mismo ángulo que el de la iluminación original. En la primera fina capa intermedia de plata se reflejará una cantidad pequeña de luz; la mayor parte de ella penetrará más adelante y se reflejará parcialmente en la segunda, tercera, y demás capas intermedias. La diferencia de recorrido entre todos los haces reflejados en las diferentes capas intermedias será igual al doble de la distancia entre las capas intermedias; ella es igual a λ,

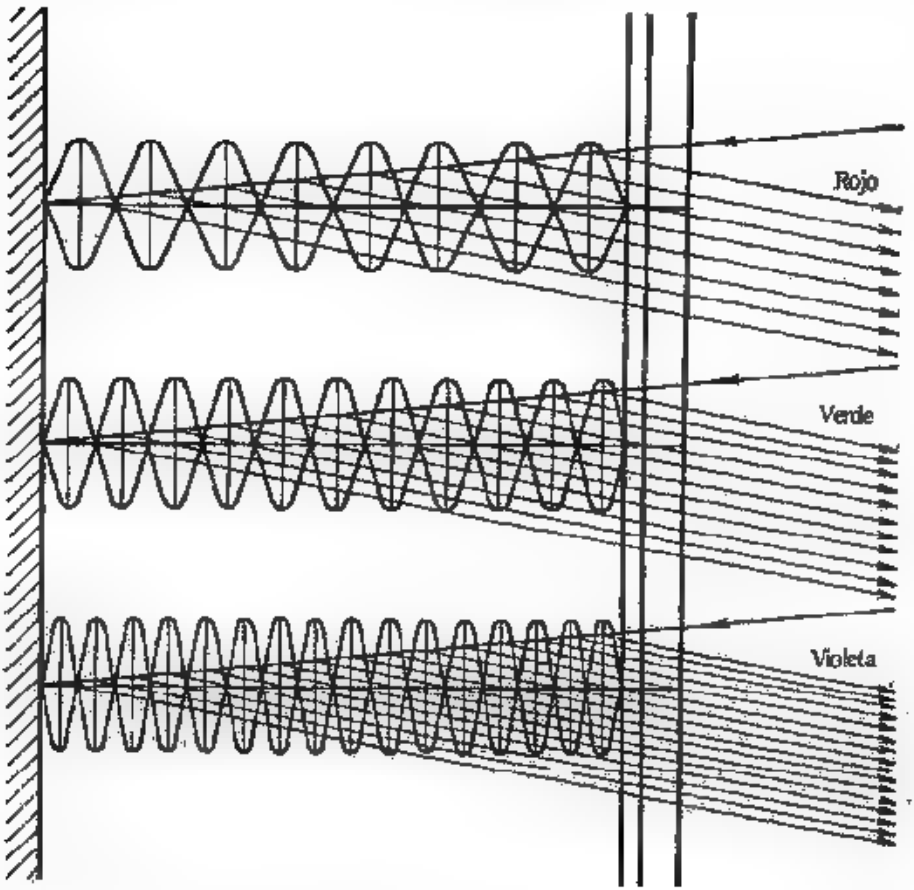


Fig. 5.4. Esquema que aclara el método de la fotografía en colores de Lippmann.

para la región, donde las capas intermedias están separadas por distancias de $^1/_2\,\lambda_1$, es decir donde para el tratamiento previo se empleó la luz de longitud de onda λ_1. Al interferir entre sí, los haces, reflejados en esta región, darán máximo para la luz con una longitud de onda λ_1. Al contrario, para cualquier otra longitud de onda (λ) se encontrará tal número m de capas, el cual dará una diferencia de recorrido, igual a un múltiplo *impar* de la media onda $^1/_2\,\lambda$. El correspondiente m se determinará de la condición $m\lambda_1 = (2p + 1)^1/_2\,\lambda$. De esta manera, el rayo con longitud de onda λ, reflejado en la primera capa, será debilitado por el rayo, reflejado en la capa $(m + 1)$; el rayo, reflejado en la segunda capa, se neutralizará con el rayo, reflejado en la capa $(m + 2)$, y así sucesivamente. Por lo tanto, en la luz reflejada este color con longitud de onda λ será eliminado casi completamente. De esta manera, la placa preparada según el método indicado adquiere la capacidad de reflexión selectora de los rayos luminosos, y en la luz reflejada dará aquella distribución de colores, que fue utilizada en su preparación; la placa da posibilidad de ver en la luz reflejada la imagen en sus colores naturales. El mecanismo de acción de la placa se hace particularmente claro, si se examina el proceso de reflexión según el método, expuesto en § 51.

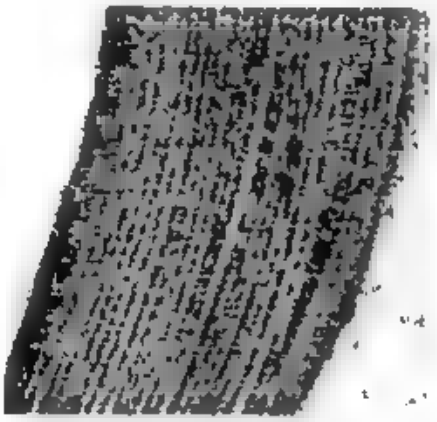


Fig. 5.5. Corte de la emulsión elaborada según el método de Lippmann.

El desarrollo técnico actual de la fotografía en colores va por otro camino. En él se utiliza el principio de filtros de luz, para lo cual en la emulsión de la placa fotográfica se introducen los correspondientes pigmentos colorativos.

Los fenómenos descritos anteriormente obtuvieron interesantes aplicaciones en el registro holográfico de las imágenes (véase § 65).

---

6. LOCALIZACIÓN DE LAS FRANJAS DE INTERFERENCIA

§ 25. Colores de las láminas delgadas

Como se aclaró en el § 17, en el caso de fuentes puntuales de luz se observarán nítidos cuadros de interferencia. En este caso para cualquier posición de la pantalla, que intersecque el sistema de superficies

de máximos y mínimos, nosotros obtendremos un claro cuadro de franjas de interferencia, las cuales, por consiguiente, no poseen una región concreta de localización y pueden considerarse *no localizadas*. Sin embargo, la condición de puntualidad de la fuente, necesaria para esto, se realiza sólo aproximadamente, y en muchos casos no se cumple por completo. Con más frecuencia nos vemos obligados a trabajar con fuentes extendidas al observar fenómenos de interferencia en condiciones naturales, cuando como fuente de luz sirve un sector del cielo, es decir luz diurna difusa. Un caso muy importante de fenómenos de esta índole que ocurre muy a menudo tiene lugar al ser alumbradas películas transparentes delgadas, cuando la división de la onda luminosa, necesaria para la aparición de dos haces coherentes, ocurre a consecuencia de la reflexión de la luz en las superficies delantera y trasera de la película (fig. 6.1).

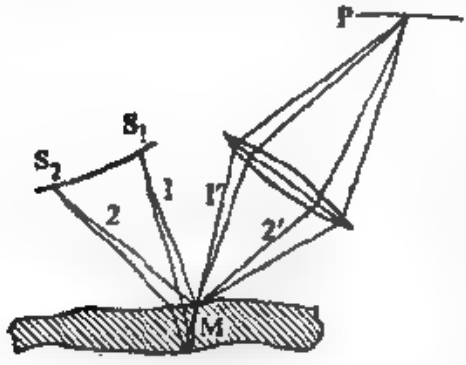


Fig. 6.1. Acerca de la interferencia en una película delgada en el caso de una fuente extendida de luz.

Este fenómeno, conocido con el nombre de *colores de láminas delgadas*, es fácil de observar en las películas de agua jabonosa (pompas de jabón), en las finísimas películas de aceite (petróleo), que flotan en la superficie del agua (por ejemplo, cerca de los barcos), en las películas de los óxidos transparentes presentes con frecuencia en la superficie de vidrios viejos o en los metales (en el temple de artículos pulidos de acero, los llamados colores de recocido), etc.

El experimento muestra, que en estos casos la visibilidad del cuadro de interferencia es máxima en una región determinada, y frecuentemente bastante limitada, del espacio cerca de las películas y disminuye rápidamente al aumentar las distancias desde su superficie. En los casos enumerados anteriormente resulta, que una buena visibilidad del cuadro de interferencia, observado con la luz reflejada en las películas, tiene lugar sólo en una capa muy delgada, que coincide prácticamente con la superficie de las películas, a pesar de que los haces luminosos reflejados en ellas se superponen en un volumen considerable del espacio. A estos cuadros de interferencia se les acostumbra llamar cuadros *localizados*.

En dependencia del espesor y de la forma geométrica de las películas y también de las condiciones de su iluminación la región de localización del cuadro de interferencia resultará más o menos

limitado y más o menos cercano a la superficie de las películas.

En la fig. 6.1 ha sido mostrado el esquema de principio del experimento para la observación de los fenómenos descritos. Con la letra P se designa la placa fotográfica o la pantalla en la cual se proyecta la imagen de la película y donde se observa el cuadro de interferencia. En las fotografías (figs. 6.2 y 6.3) se dan ejemplos de estos cuadros. En la primera fotografía se ve el cuadro de interferencia obtenido con la luz reflejada en las dos superficies de una lámina de vidrio de espesor no homogéneo, que ha sido iluminada por una pequeña fuente de luz. La segunda fotografía está hecha con la luz reflejada en dos superficies planas de vidrio que limitan una fina cuña de aire. Esta cuña ha sido construida mediante la colocación de dos gruesas láminas planoparalelas de vidrio bien pulidas una sobre la otra. En uno de los lados entre los bordes de estas láminas se

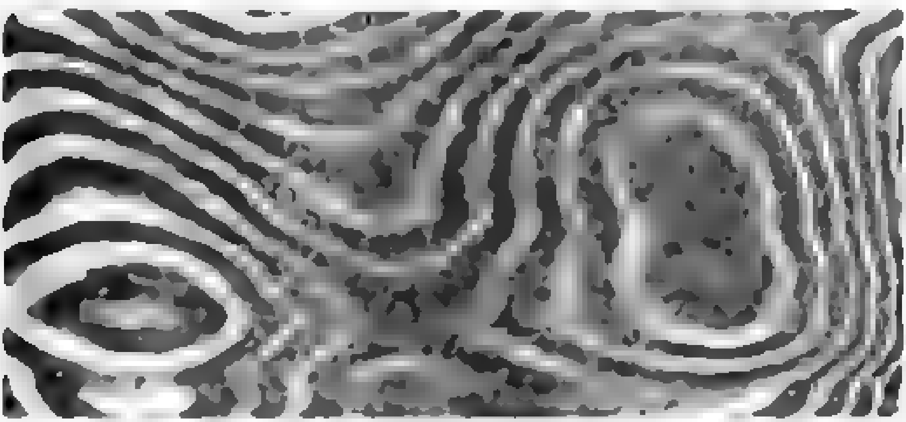


Fig. 6.2. Cuadro de interferencia obtenido en la luz reflejada en dos superficies de una lámina de vidrio con espesor variable.

colocó una pequeña banda de un papel fino. En ambos casos la iluminación de la película y de la cuña se realiza con un haz limitado de fuentes extendidas de luz. Estos haces estrechos inciden sobre la superficie de los objetos iluminados en forma casi perpendicular.

En la observación visual del cuadro de interferencia de este tipo el papel de la lente lo desempeña el cristalino del ojo y el rol de pantalla, su retina.

Para aclarar las condiciones de formación del cuadro de interferencia en las películas delgadas y la causa de su localización espacial, nos proponemos examinar el esquema de un experimento parecido en una variante extremadamente simple.

Sea que sobre la superficie de una fina cuña transparente, hecha

de una sustancia con índice de refracción n, caen casi normalmente los haces luminosos desde una fuente extendida de luz. Para mayor claridad en la fig. 6.4 el ángulo de incidencia de uno de estos haces luminosos ha sido aumentado diez veces en comparación con su valor verdadero.

Como fue aclarado anteriormente, se llaman coherentes las ondas luminosas, emitidas por un mismo punto de la fuente de luz. Las ondas, emitidas por los puntos adyacentes a él, ya no serán coherentes. Por eso comencemos con los cálculos de la interferencia de haces luminosos emitidos por un punto de la fuente extendida de luz. En correspondencia con la localización, establecida en el experimento, del cuadro de interferencia, calculemos la diferencia de recorrido Δ de los haces luminosos coherentes S' y S'' en el punto A de la superficie de la cuña (vease fig. 6.4). La lente, que proyecta el cuadro

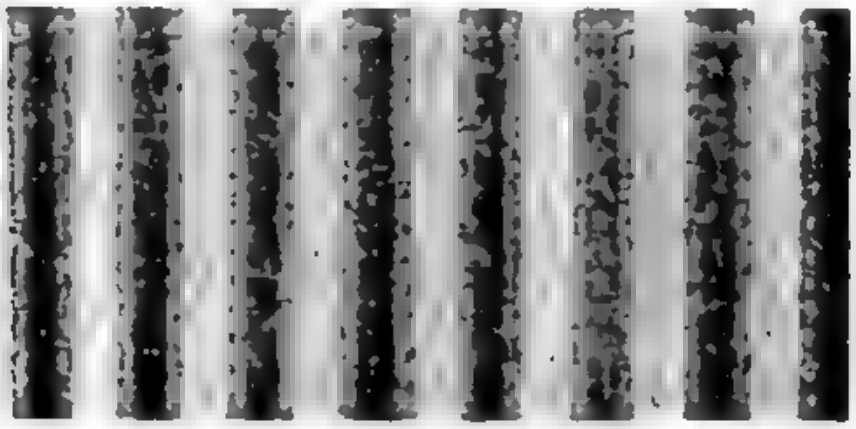


Fig. 6.3. Franjas interferenciales en el caso de reflexión de la luz en las superficies de una cuña.

de interferencia sobre la pantalla, ya no cambiará esta diferencia de recorrido, y para los haces luminosos, reunidos por la lente en el punto A' de la pantalla, ella será la misma, que en el punto A. En el curso de los cálculos, además de la inmediata diferencia geométrica de recorrido de las ondas interferentes, es necesario considerar el salto de la fase en π experimentado por la onda representada por el rayo $2'$ al reflejarse ésta en la superficie de la cuña con índice de refracción, mayor que el del aire que rodea la cuña. Tenemos

$$\Delta = (BD + DA)\, n - (AC - \tfrac{1}{2}\lambda),\quad n\,(BD + DA) = 2hn/\cos r,$$

$$AC = 2h \operatorname{tg} r \operatorname{sen} i;\quad \operatorname{sen} i/\operatorname{sen} r = n,$$

donde $h = ED$ es el espesor de la cuña; de donde

$$\Delta = 2hn \cos r + {}^1/_2\lambda. \qquad (25.1)$$

El valor obtenido para la diferencia de recorrido Δ es una función de h y r. Acerca del ángulo i, y por consiguiente, de r, ya se dijo al describir la estructura del experimento, que ellos son pequeños y no varían considerablemente. Aquí es necesario añadir, que si esto no es así, entonces, al disminuir la apertura la lente, que proyecte el cuadro de interferencia sobre la pantalla, se puede disminuir el diapasón de variaciones del ángulo r. Si el cuadro de interferencia es observado directamente por el ojo, entonces esta disminución de la apertura de observación se realiza, naturalmente, a cuenta de las pequeñas dimensiones del orificio, es decir de la pupila del ojo.

Por eso se puede considerar, que la diferencia de recorrido Δ resulta, prácticamente, función sólo de h, es decir del espesor de la cuña en el punto A.

El resultado obtenido merece ser analizado.

De la relación (25.1) se deduce que para pequeñas variaciones de los valores de los ángulos i (y correspondientemente de r) la diferencia de recorrido Δ de los haces luminosos emitidos por los demás puntos de la fuente extendida de luz, será en el punto A aproximadamente la misma, que para los haces examinados $1'$ y $2'$. Por lo tanto, en el punto A sobre la superficie de la cuña (o cerca de ella) los cuadros de interferencia, creados por diferentes pares de haces luminosos, que llegan desde distintos puntos de la superficie luminosa de la fuente extendida de luz, prácticamente coincidirán entre sí. De aquí se desprende la gran visibilidad del cuadro de interferencia en la superficie de la cuña (o cerca de ella). En otras regiones del espacio encima de la cuña tendrá lugar una superposición desordenada de diferentes cuadros de interferencia y, por consiguiente, una iluminación homogénea de estas regiones del espacio. De esta manera, obtiene su explicación la localización del cuadro de interferencia en las cercanías de la superficie de la cuña.

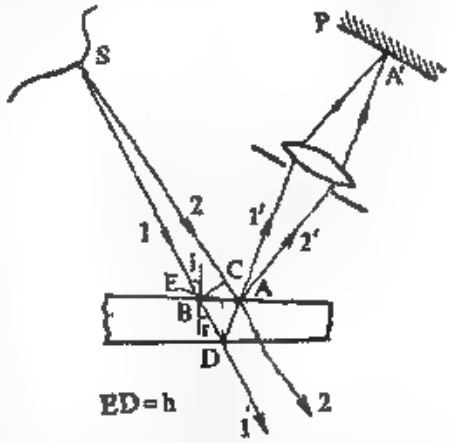


Fig. 6.4. Ilustración para el cálculo de la diferencia de recorrido en el caso de interferencia de haces luminosos en una cuña transparente delgada.

Si la cuña se ilumina con una fuente puntual de luz, es decir si se utiliza exclusivamente una emisión coherente, entonces es fácil

comprender, que el esquema del experimento examinado será análogo a los esquemas de los experimentos de interferencia de Fresnel y el cuadro de interferencia será *no localizado*. Así pues la localización del cuadro de interferencia en los casos observados es consecuencia de la utilización de fuentes extendidas de luz. Se puede obtener un cuadro de interferencia localizado de las películas, utilizando también una fuente puntual de luz, pero entonces ella deberá estar muy alejada de las películas, o bien su emisión deberá ser colimada por un objetivo.

El planteamiento estricto del problema acerca de la localización del cuadro de interferencia en estos casos y su solución matemática general pertenecen a Michelson. Este último mostró que a medida que disminuye la uniformidad de la película, la región de localización del cuadro de interferencia se aleja de la película.

De la fórmula (25.1) para Δ se desprende también la aclaración de la configuración geométrica de las franjas de interferencia observadas. Justamente de ella se deduce que los valores Δ son iguales para todos los sectores de la película (en nuestro caso: de la cuña), donde su espesor h es igual, si la película es alumbrada por un haz de rayos paralelos.

Debido a que la diferencia de recorrido de las ondas interferentes define la amplitud de la oscilación resultante y, por consiguiente, la intensidad en el punto del espacio, donde se superponen estas ondas, la iluminación de todos los puntos del cuadro de interferencia, que corresponden a iguales espesores h de la película (cuña), será igual.

Por eso las franjas de interferencia en la superficie de la película (cuña) tienen igual iluminación en todos los puntos de la superficie, que corresponden a iguales espesores de la película. En el caso de la cuña la configuración de las franjas interferenciales es particularmente simple. Por supuesto, las franjas de interferencia serán paralelas a la arista de la cuña, y el cuadro de interferencia será periódico (véase fig. 6.3). En caso general, la configuración de las franjas de interferencia en la superficie de la película corresponderá a los lugares geométricos de la película, en los cuales ella tiene un mismo espesor.

En el caso representado en la fig. 6.2, esta configuración resultó ser bastante caprichosa.

De aquí se deriva el nombre atribuido a las franjas de tales cuadros de interferencia. A ellas se les llama *franjas de interferencia de igual espesor*, o simplemente *franjas de igual espesor*. No es difícil observar un cuadro de este tipo, disponiendo de una lámina fina de una película de agua de jabón tensa sobre un armazón dispuesto verticalmente: bajo la acción de la fuerza de la gravedad la película toma la forma de una cuña, y las franjas de igual espesor aparecen dibujadas en la superficie de la película en forma de rectas horizontales algo deformadas por los defectos locales de la película.

Lo expuesto con respecto al método de observación de la interferencia en una lámina delgada con ayuda de una lente es correcto también cuando la observación se realiza con ayuda de otro sistema óptico, por ejemplo, de anteojos, o a simple vista. Sólo es necesario tener en cuenta que cuando observamos con el ojo, utilizamos generalmente haces mucho más estrechos, que en el caso de una lente (el diámetro de la pupila humana es próximo a 3—5 mm). Esto significa que trabaja un pequeño sector de la fuente, por eso la localización de las franjas en la superficie de la lámina no se expresa de un modo tan preciso: nosotros observamos el cuadro de interferencia incluso cuando la acomodación del ojo a la película no es muy rigurosa.

En las condiciones apropiadas de laboratorio, cuando las películas finas son iluminadas con luz blanca, se logra observar incluso franjas de interferencia de 4—5 orden a cuenta de la sensibilidad selectiva espectral del ojo humano. Por lo tanto, el espesor de las películas hechas de sustancias con índice de refracción cercano a 1,3 deberá constituir aproximadamente 1,5—2 longitudes de onda luminosa.

§ 28. Los anillos de Newton

Un particular interés histórico ofrece el caso de interferencia en una capa delgada de aire, conocido con el nombre de *anillos de Newton*. Este cuadro de interferencia se observa cuando la superficie convexa de una lente de poca curvatura toca en un cierto punto a la superficie plana de una lámina bien pulida, de manera que la capa intermedia de aire, que queda entre ellas, se va haciendo paulatinamente más gruesa a medida que nos alejamos del punto de contacto hacia los bordes. Si sobre el sistema cae (la incidencia es próxima a la normal) un haz de luz monocromática, entonces las ondas luminosas, reflejadas en los límites superior e inferior de la capa intermedia de aire, deberán interferir entre sí. Al ocurrir esto se obtiene el siguiente cuadro de interferencia: en el punto de contacto se observa una mancha negra, rodeada inmediatamente de anillos concéntricos brillantes y oscuros con espesor disminuyente*).

*) La explicación de la formación de los anillos en los tiempos de Newton ofrecía grandes dificultades. Hooke veía la causa de la formación de los anillos en la presencia de dos haces reflejados de diferente intensidad. Newton investigó detalladamente la formación de los anillos y estableció la dependencia de las dimensiones de los anillos con respecto a la curvatura de la lente. Para Newton estaba claro que en el efecto indicado se manifestaban las propiedades de periodicidad de la luz. En relación con esto él introdujo la idea «acerca de los momentos de fácil reflexión y fácil transmisión» para las partículas luminosas. En este concepto se halla encerrado el intento, característico para las ideas de Newton, de compromiso entre las concepciones ondulatorias y corpusculares. Sólo mucho más tarde (1802) Young, al introducir el concepto de interferencia,

No es difícil calcular las dimensiones y la posición de los anillos de Newton, suponiendo que la luz incide normalmente sobre la superficie de la lámina, de manera que la diferencia de recorrido condicionada por el espesor δ de la capa intermedia sea igual a $2\delta n$, donde n es el índice de refracción de la sustancia de la capa intermedia. En el caso del aire n se puede considerar igual a la unidad. El espesor δ_m correspondiente al anillo m está relacionado con el radio r_m de este anillo y con el radio de curvatura R de la lente por la fórmula

$$\delta_m = r_m^2/2R$$

(véase ejercicio 53).

Tomando en consideración la diferencia en las condiciones de la reflexión en las superficies superior e inferior de la capa intermedia (pérdida de una semionda), hallaremos la condición de formación del anillo oscuro m

$$\Delta_m = 2\delta_m + \frac{1}{2}\lambda = (2m+1)\frac{1}{2}\lambda, \tag{26.1}$$

o

$$\delta_m = \frac{1}{2}m\lambda, \tag{26.2}$$

de donde

$$r_m = \sqrt{m\lambda R}, \tag{26.3}$$

donde m es un número entero. En particular, $m = 0$ y $r_m = 0$ corresponden a la oscuridad (explicación de la mancha central oscura). Cuanto mayor sea m, menor será la diferencia entre los radios de los anillos adyacentes (r_{m+1} y r_m), es decir más cercanos se hallarán los anillos entre sí. Al medir r_m y sabiendo m y R, se puede del experimento descrito hallar la longitud de onda λ. La determinación de ésta es lo suficientemente exacta y fácil de realizar.

El cuadro de interferencia será nítido cuando δ es pequeño (delgada capa intermedia). Sin embargo, esto no dificulta la obtención de anillos de considerable radio, ya que $r_m = \sqrt{2R\delta}$, y R es el radio de curvatura de la lente, el cual puede ser grande (generalmente 100—200 cm).

No es difícil ver que la condición que alivia la observación de los anillos de Newton, consiste en la inclinación muy pequeña de la superficie de la lente con respecto a la superficie de la lámina. Un

---

dio explicación a los anillos de Newton. Joung explicó también la presencia de la mancha negra central con ayuda de la idea «acerca de la pérdida de semionda» a consecuencia de la diferencia de las condiciones de la reflexión (partiendo, por supuesto, de la concepción acerca de las ondas elásticas) (1804). Joung reforzó su explicación con el experimento, al llenar el espacio entre la lámina de flint-glass (n_2) y la lente de crown-glass (n_1) con aceite de un índice de refracción n_3, de manera que $n_3 > n_2 > n_1$, y al obtener en lugar de la mancha oscura una brillante.

método parecido fue utilizado muchos años más tarde en los experimentos de Wiener. Como se indicó en el § 23, en uno de los experimentos, que muestran muy nítidamente la posición de los vientres y nodos con respecto a la superficie de la lámina, Wiener utilizando el dispositivo, propuesto por Newton, obtuvo ondas estacionarias en el espacio entre la lente y la lámina y observó las huellas de los vientres en forma de anillos concéntricos, parecidos a los anillos de Newton.

Si la luz incidente no es monocromática, entonces a diferentes λ les corresponderán distintos r_m, es decir en lugar de anillos oscuros y brillantes obtendremos un sistema de anillos de colores. Poniendo en la fórmula (26.3) $m = 1$, hallaremos la región ocupada por los anillos de primer orden; $m = 2$, por los anillos de segundo orden, y así sucesivamente. No es difícil ver que el máximo violeta ($\lambda = 400$ nm) de segundo orden coincide con el máximo rojo oscuro ($\lambda = 800$ nm) de primer orden; sobre el máximo rojo de segundo orden se sobrepondrá el máximo violeta de cuarto orden y el máximo verde ($\lambda = 530$ nm) de tercer orden, etc. Debido a que, además de esto, cada anillo tiene un ancho notable y en él se realiza una suave

Sucesión de los colores en los anillos de Newton

En la luz reflejada	En la luz transmitida
Primer orden	
Negro	Blanco
Azul gris	Blanco canela
Blanco verdoso	Color canela
Amarillo pajizo	Violeta oscuro
Amarillo intenso	Azul celeste
Amarillo canela	Azul grisáceo
Amarillo rojizo	Verde azulino
Rojo oscuro	Verde amarillento
Segundo orden	
Púrpura	Verde claro
Azul celeste	Anaranjado
Verde claro	Púrpura
Amarillo puro	Color índigo
Rojo-violeta oscuro	Verde
Tercer orden	
Violeta-azulino claro	Verde amarillento
Azul verdoso	Color carne
Verde brillante	Violeta
Rojo carmín	Verde puro
Gris violeta	Verde amarillento
etc.	

transición desde el máximo hasta el mínimo entonces incluso en los límites del primer orden unos colores se sobreponen sobre otros; mucho más notablemente esto ocurre en los órdenes superiores. Como resultado de esta superposición aparece una alternación característica de matices, completamente diferente de la sucesión de los «colores del arco iris».

Se comprende, que en la luz transmitida se observan los matices complementarios a los matices en el cuadro reflejado. Sin embargo en la luz transmitida la visibilidad del cuadro de interferencia es considerablemente más baja a consecuencia de la desigualdad de las amplitudes de las ondas interferentes.

En la página 131 damos una tabla abreviada de los colores de los anillos de Newton observados en el caso de incidencia normal.

Para valores suficientemente grandes de m la superposición de los cuadros en colores es tan complicada que para la vista todo el cuadro se hace igualmente blanco en correspondencia con lo expuesto en el § 21. Al mirar los anillos de Newton a través de un buen filtro de luz, se puede observar el cuadro inclusive para órdenes relativamente grandes de interferencia, es decir, divisar los anillos para valores altos de m.

§ 27. Interferencia en láminas planoparalelas. Franjas de igual inclinación

De la relación $\Delta = 2hn \cos r$ se deduce que para una lámina *planoparalela* homogénea (h y n son los mismos en todas partes) la diferencia de recorrido puede cambiar sólo cuando cambia el ángulo de inclinación de los rayos. Si esta lámina se alumbra con un haz monocromático de rayos incidentes sobre ella bajo *distintos* ángulos (por ejemplo, con un haz convergente), entonces a cada valor de r le corresponderá su propia diferencia de recorrido. Por supuesto todos los rayos, que corresponden a un mismo valor de r, es decir, que tienen igual *inclinación*, darán una misma diferencia de fase. De esta manera, los máximos o los mínimos de interferencia se dispondrán según *las direcciones* correspondientes a una igual inclinación de los rayos.

La fig. 6.5 muestra que los rayos *1* y *2*, reflejados de los bordes superior e inferior de la lámina, serán *paralelos* entre sí, ya que la lámina es planoparalela. De acuerdo con esto, los fenómenos de interferencia serán observados sólo a una distancia lo suficientemente grande de la lámina (teóricamente para una lámina ideal debe ser en el infinito). Para la observación de éstos *es necesario acomodar el ojo en el infinito* o recoger los rayos interferentes con ayuda de una lente.

Los haces paralelos *1* y *2* se unirán en el foco *O* de la lente *L*; al

mismo lugar llegarán también todos los demás rayos paralelos a SA. Por eso las franjas de interferencia estarán localizadas en el infinito. Los rayos $S'A'$ inclinados bajo otro ángulo se reunirán en otro punto del plano focal de la lente.

La configuración de las franjas de interferencia en el plano focal de la lente se define en este caso por el conjunto de ángulos en los haces luminosos incidentes sobre la lámina planoparalela. Si sobre la lámina cae un cono luminoso con el eje normal a la lámina y uniformemente lleno de luz (tal será el haz luminoso proveniente de una fuente extendida de luz), entonces en el plano focal de la lente las franjas interferenciales tendrán forma de anillos. Cada anillo corresponderá a un valor determinado del ángulo de refracción r y, por consiguiente, a un determinado ángulo *de incidencia* de los rayos luminosos sobre la lámina de vidrio. La forma anular de las franjas de interferencia en el plano focal del objetivo se condicionará por el hecho de que a cada valor del ángulo i de apertura del cono luminoso le corresponderá un conjunto de diferentes *azimutes* (desde 0 hasta 2π) de los rayos de luz, que forman la superficie lateral de este cono luminoso. Las franjas de interferencia descritas recibieron el nombre de *franjas interferenciales de igual inclinación.*

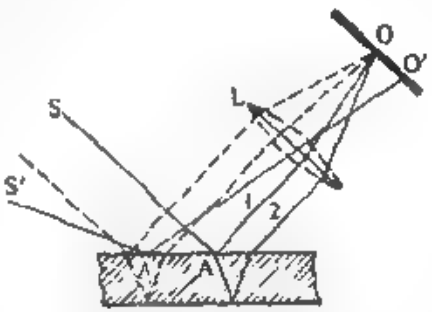


Fig. 6.6. Acerca de la localización de las franjas de interferencia.
Sobre la pantalla dispuesta en el plano focal principal de la lente L se proyectan las franjas de igual inclinación.

Un método cómodo para observar los anillos de igual inclinación en la luz reflejada se representa en la fig. 6.6, donde MM es la lámina de vidrio, que deja pasar una parte considerable de los rayos de la fuente S a la lámina planoparalela PP y que refleja parte de los rayos, que van en sentido contrario desde PP en dirección a la lente LL, que reúne los rayos reflejados en la pantalla EE dispuesta en el plano focal de la lente. Cada franja de igual inclinación es el resultado de la interferencia de los rayos, que van desde la fuente en forma de haces prácticamente paralelos. De esta manera, la apertura de interferencia en este caso es próxima a cero, y por consiguiente, la dimensión de la fuente puede ser bastante grande (véase § 17). Esta deducción también es fácil de comprender de la fig. 6.6.

Los rayos, que salen de los diferentes puntos S_1, S_2, S_3, . . ., de la fuente, no son coherentes entre sí, y el haz de rayos proveniente de cada uno de estos puntos al experimentar sucesivas reflexiones en los límites de la lámina PP dará en la pantalla sus propios anillos de interferencia. Sin embargo, la posición de estos anillos no de-

pende de la posición del punto luminoso en la fuente, sino solamente de *la inclinación de los rayos*; los cuadros interferenciales al sobreponerse unos sobre otros se intensifican. Así, por ejemplo, el centro de todos los anillos será el punto *O*, en el cual se juntan los rayos, que caen normalmente sobre la lámina *PP*. Estos rayos, cualquiera que sea el punto de donde salen, darán después de reflejarse en la lámina un haz de rayos paralelos *1*, *2*, . . . y después serán recogidos por la lente en el punto *O* de la pantalla. En el plano focal de la lente *LL* se formará un sistema de anillos de interferencia con centro *O*.

El aumento de las dimensiones de la fuente permite aumentar la intensidad total del cuadro interferencial conservando la anterior claridad y la nitidez de los máximos y mínimos. Por supuesto, si la lámina *PP* tiene un espesor considerable, entonces el sistema de anillos se podrá observar solamente cuando la luz de la fuente sea

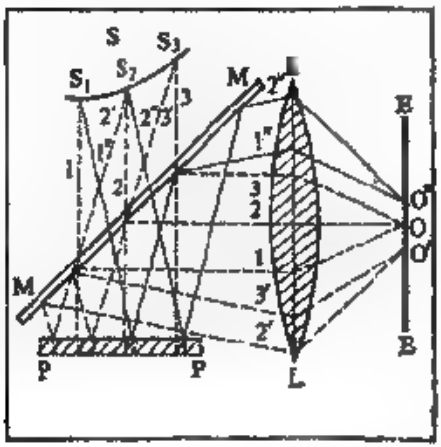


Fig. 6.6. Método de observación de los anillos de igual inclinación.

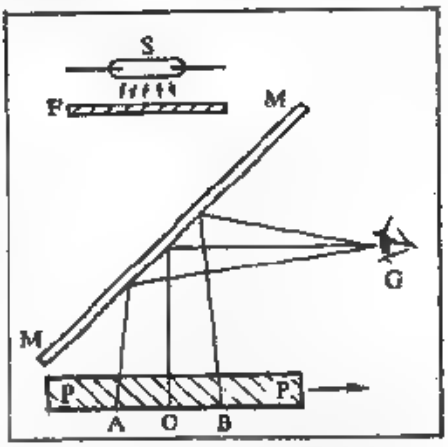


Fig. 6.7. Esquema del dispositivo para el control del plano paralelismo de la lámina por el método interferencial. S es la lámpara de mercurio; F, el filtro de luz. MM, la lámina de vidrio; PP, la lámina a investigar. G, el ojo del observador.

lo suficientemente monocromatizada, lo que fue aclarado en el § 21. Con el aumento del espesor de la lámina la distancia entre los máximos adyacentes, es decir el ancho de las franjas de interferencia, se hace menor. Lo mismo se observará al utilizar otra lámina con el mismo espesor, pero con un menor índice de refracción, por ejemplo, al cambiar una lámina de vidrio por una capa de aire del mismo espesor (véanse ejercicios 26 y 27).

Todas estas deducciones son fáciles de recibir particularmente observando una fuente puntual y midiendo la distancia S_1S_2 entre

las imágenes de la fuente en las superficies superior e inferior de la lámina. Si la lámina no es rigurosamente planoparalela y posee en diferentes lugares un espesor no completamente igual, entonces en la reflexión en diferentes lugares de la lámina nosotros obtendremos distancias S_1S_2 algo diferentes. Por lo tanto, las franjas de interferencia que se forman gracias a la reflexión en diferentes lugares de la lámina, tendrán un espesor algo diferente y, por consiguiente, todo el cuadro adquirirá menos contraste que en el caso de una lámina planoparalela.

Si las franjas de igual inclinación son observadas con el ojo *acomodado al infinito*, entonces debido a la pequeña dimensión de la pupila (3—5 mm) en el centro del campo de visión se verá el sistema de anillos originado por la acción del pequeño sector AOB de la lámina (fig. 6.7). Al desplazarse la lámina, trabajará otro sector de ella. Si la lámina es rigurosamente planoparalela, entonces el espesor de los diferentes sectores es igual y las dimensiones de los anillos no variarán al desplazarse la lámina. En caso contrario ellas cambiarán, aumentando al pasar a sectores más delgados. Este procedimiento es uno de los mejores métodos de control del planoparalelismo de las láminas. Como fuente de luz se utiliza una lámpara de mercurio; separando con ayuda de un filtro de luz una de las líneas del espectro de esta lámpara, generalmente la verde, obtenemos una fuente monocromática ($\Delta\lambda \approx 0{,}01$ nm) que permite investigar láminas de espesor considerable.

7. INTERFERÓMETROS Y APLICACIÓN DE LA INTERFERENCIA

§ 28. Interferómetro de Jamin

Veamos ahora un aparato, la parte esencial del cual está compuesta de dos idénticas láminas planoparalelas de espesor h y con índice de refracción n (fig. 7.1).

Al incidir el haz de luz sobre la primera lámina una parte de los rayos se reflejará en el borde delantero de la lámina, y la parte refractada se reflejará en el borde posterior; de esta manera, de la primera lámina saldrán dos haces separados entre sí por cierta distancia, cada haz, al caer sobre la segunda lámina, nuevamente se desdoblará, y de la segunda lámina saldrán ya cuatro haces, pero de tal manera que el segundo y tercero se sobrepondrán uno sobre el otro. La diferencia de recorrido entre ellos será igual a (véase § 25)

$$\Delta = 2hn\cos r_1 - 2hn\cos r_2 = 2hn\,(\cos r_1 - \cos r_2). \qquad (28.1)$$

Si las láminas están dispuestas paralelamente, es decir, $r_1 = r_2$, entonces

$$\Delta = 0. \tag{28.2}$$

En cambio, si las láminas forman cierto ángulo, entonces $\Delta \neq 0$.

Debido a que r_1 no se diferencia mucho de r_2, entonces, designando $r_1 \approx r_2$ mediante r y $(r_2 - r_1)$ mediante δr, obtendremos

$$\Delta = 2hn \operatorname{sen} r\delta r. \tag{28.3}$$

Introduciendo en vez del ángulo de refracción r y de la diferencia $\delta r = r_2 - r_1$ las correspondientes magnitudes, expresadas a través del ángulo de incidencia i y de la diferencia $\delta i = i_2 - i_1 = \varepsilon$, donde ε es el ángulo entre las láminas, hallaremos a base de la ley de refracción ($n \operatorname{sen} r = \operatorname{sen} i$) $\delta r = \frac{\cos i}{n \cos r}\,\delta i$. En condiciones ordinarias, cuando $i \approx 45°$ y $n = 1{,}5$, $\delta r \approx \approx {}^1/_2\,\delta i = {}^1/_2\varepsilon$.

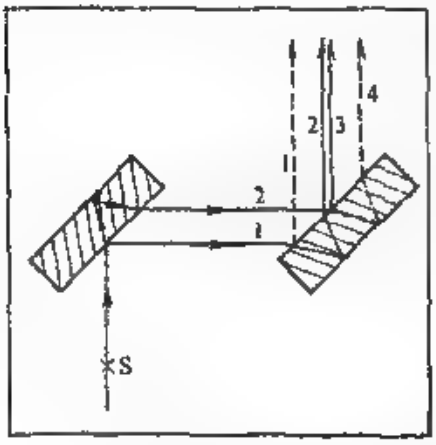


Fig. 7.1. Esquema del interferómetro de Jamin.

De esta manera, para los haces luminosos incidentes en el plano perpendicular a ambas láminas,

$$\Delta = 2hn \operatorname{sen} r\delta r \approx h\varepsilon \operatorname{sen} i, \tag{28.4}$$

donde ε es el ángulo entre las láminas.

Si se alumbra la primera lámina con un haz *paralelo* de rayos de una sola longitud de onda, obtendremos una luz más o menos intensa en dependencia de la diferencia de recorrido Δ de los rayos salientes. Al alumbrar con luz blanca la lámina nos parecerá uniformemente coloreada. Pero si alumbramos con un haz *divergente* de rayos veremos en el plano focal del objetivo que ha sido colocado en el camino de los rayos *2* y *3*, un sistema de franjas interferenciales correspondientes a determinado r, es decir, franjas de igual inclinación. Los rayos *1* y *4* no caen en la montura del objetivo. Nosotros obtendremos máximo para los rayos de aquellas direcciones, para las cuales $\Delta = h\varepsilon \operatorname{sen} i = m\,{}^1/_2\lambda$, donde m es un número par. Para las direcciones correspondientes a valores impares de m se observará mínimo. La distancia angular entre las franjas se condiciona por la variación del ángulo i en la magnitud Δi, con la cual

la diferencia de recorrido varía en λ, es decir,

$$h\varepsilon \cos i\Delta i = \lambda \text{ o } \Delta i = \lambda/h\varepsilon \cos i. \quad (28.5)$$

De aquí se deduce que la distancia entre las franjas crece al aumentar la longitud de onda y al disminuir el ángulo entre las láminas*). La diferencia de las distancias entre las franjas para distintas longitudes de onda es muy pequeña para los primeros órdenes de interferencia, es decir, para la interferencia correspondiente a la diferencia de recorrido de 1, 2, 3, . . . semiondas, con el aumento del orden de interferencia esta diferencia se vuelve considerable. Por eso la franja central, correspondiente a la diferencia nula de recorrido, nos parecerá blanca y los lugares adyacentes de los mínimos parecerán negros, es decir, los lugares de los primeros mínimos para todas las longitudes de onda (todos los colores) prácticamente coincidirán, en cambio las franjas correspondientes a diferencias más grandes de recorrido serán coloreadas, ya que para ellas el mínimo de unas longitudes de onda coincidirá con el máximo para otras. Se podrá observar una franja blanca cuando la arista del ángulo diedro entre las láminas es horizontal.

El aparato basado en el principio descrito lleva el nombre de interferometro de Jamin y se construye en forma de dos buenas láminas planoparalelas de vidrio grueso y bien homogeneo, que son montadas en una plancha maciza. Para el establecimiento del paralelismo de las laminas el aparato está dotado de tornillos especiales de ajuste. La observación del cuadro de interferencia se realiza con un anteojo enfocado al infinito. Las láminas del interferómetro de Jamin generalmente están dispuestas casi paralelamente, de tal manera que se observan anchas franjas de interferencia. Las mismas láminas se hacen gruesas (20 mm y más) para separar en lo posible los haces *1* y *2* y de esta manera asegurar la posibilidad de cambiar las condiciones en el camino de uno de los rayos sin tropezar con el otro (véase más adelante). Se puede sustituir cada una de las láminas gruesas por dos finas, cuyas superficies reflectoras han sido metalizadas. Estas láminas se disponen en los lugares de las superficies anterior y posterior de la lámina gruesa. La lámina anterior se cubre con una capa semitransparente de metal, y la posterior, por una densa capa bien reflectora. En otras palabras, se obtiene una gruesa lámina de aire. Este sistema fue utilizado por D. S. Rozhdiéstvenski con el fin de apartar los haces luminosos interferentes. Otra ventaja de este esquema consiste en la disminución de la absorción de la emisión ultravioleta.

Confeccionando láminas finas de cuarzo o de fluorita, se puede

*) Si en el cálculo de Δi en lugar de la relación (28.4) se utiliza la más exacta (28.3), entonces Δi resulta ser aproximadamente 4 veces mayor que en (28.5), sin embargo su dependencia con respecto a h y ε no cambiará.

obtener un interferómetro que sirva para realizar mediciones en la lejana región ultravioleta.

Para tener posibilidad de compensar la considerable diferencia de recorrido, que puede resultar como consecuencia de las diferencias de los tubos colocados en el camino de los dos rayos, en el aparato de Jamin se utiliza un compensador compuesto de dos láminas idénticas de vidrio, en donde la inclinación de una de ellas puede cambiarse suavemente. Su cambio permite compensar fina y suavemente la diferencia de recorrido de ambos haces en el espesor de las láminas.

Coloquemos en el camino de uno de los rayos del interferómetro de Jamin una capa de alguna sustancia con un índice de refracción diferente al del aire circundante, por ejemplo, una lámina delgada de vidrio o de mica o una columna de cualquier gas. Sea el espesor de la capa introducida igual a l, su índice de refracción n_2 y el índice de refracción del aire igual a n_1. Entonces la diferencia de recorrido entre los rayos interferentes en el aparato variará en $n_2 l - n_1 l = l(n_2 - n_1)$.

Si la diferencia de recorrido introducida, expresada en longitudes de onda λ de la luz monocromática investigada, es igual a $m\lambda$, entonces todo el cuadro de interferencia se desplazará en m franjas, donde m puede ser también un número quebrado*). Al medir este desplazamiento, nosotros determinaremos el valor de m. El experimento muestra que un desplazamiento en 1/10 de franja ($m = 1/10$) se observa con completa seguridad y sin esfuerzo.

Utilizando la relación $l(n_2 - n_1) = m\lambda$ y al determinar m, se puede calcular $\Delta n = n_2 - n_1$, es decir, la variación del índice de refracción de la sustancia al hacerse la sustitución. El espesor de la capa l se puede hacer muy considerable (por ejemplo, 10 cm), de tal manera que para $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ cm $= 5000$ Å la variación observable de Δn se logra reducir hasta una media millonésima. En aparatos especiales se observan variaciones aun menores del índice de refracción.

De esta manera, el interferómetro de Jamin se puede utilizar para la determinación de una pequeñísima variación del índice de refracción, por ejemplo, al cambiar la temperatura de un gas o al añadir mezclas extrañas. En correspondencia con esto a él lo llaman frecuentemente *refractómetro interferencial*. Como se mostró anteriormente, éste es extremadamente sensible a insignificantes variaciones del índice de refracción. Sin embargo, la determinación del valor absoluto del mismo índice de refracción con ayuda de esta

---

*) El número m se determina, observando los cuadros interferenciales en luz blanca antes y después de incluir en el interferómetro las láminas de mica o de vidrio

aparato es muy dificultosa. Generalmente lo utilizan de tal manera, que comparan el gas que nos interesa con algún otro gas bien estudiado, por ejemplo, con el aire.

§ 29. Interferómetro de Michelson

Existen numerosas instalaciones, que efectúan las disposiciones necesarias para la obtención de cuadros de interferencia. Uno de los aparatos de este tipo es el interferómetro de Michelson que jugó un gran papel en la historia de la ciencia.

El esquema de principio del interferómetro de Michelson está representado en la fig. 7.2. El haz desde la fuente L incide sobre la lámina P_1 recubierta por una fina capa de plata o de aluminio. El rayo AB, que pasa a través de la lámina P_1, se refleja en el espejo S_1 y al incidir otra vez sobre la lámina P_1 parcialmente pasa a través de ésta y parcialmente se refleja en la dirección AO. El rayo AC se refleja en el espejo S_2 y al incidir sobre la lámina P_1, parcialmente pasa también en la dirección AO. Debido a que ambas ondas *1* y *2*, que se propagan en la dirección AO, constituyen una sola onda desdoblada en dos y procedente de la fuente L, ellas serán coherentes entre sí y pueden interferir una con la otra. Ya que el rayo *2* interseca la lámina P_1 tres veces, y el rayo *1* una vez, en su camino ha sido colocada la lámina P_2 idéntica a P_1 para compensar la diferencia adicional de recorrido, considerable cuando se trabaja con luz blanca.

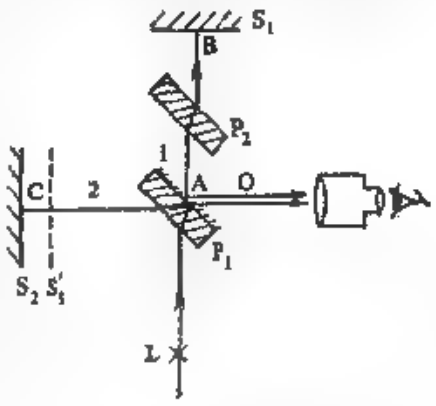


Fig. 7.2. Esquema del interferómetro de Michelson.

S_1 y S_2 son los espejos, P_1, la lámina divisoria, P_2, la lámina compensadora.

Es evidente que el cuadro de interferencia observable corresponderá a la interferencia en la capa de aire formada por el espejo S_2 y la imagen virtual S_1' del espejo S_1 en la lámina P_1. Si S_1 y S_2 están dispuestos de tal manera que la citada capa de aire es plano-paralela, entonces el cuadro de interferencia obtenido se presentará como franjas de igual inclinación (como anillos circulares) localizadas en el infinito, y por lo tanto, su observación es posible para el ojo acomodado al infinito (o para el anteojo fijado al infinito, o en la pantalla dispuesta en el plano focal de la lente).

Por supuesto, también se puede utilizar una fuente extendida de luz (véase § 17). Cuando el espesor de la capa de aire es pequeño, en

en campo visual del anteojo se observan escasos anillos de interferencia de gran diámetro. Cuando el espesor de la capa de aire es grande, es decir, es grande la diferencia de las longitudes de los brazos del interferómetro, se observan frecuentes anillos de interferencia de pequeño diámetro cerca del centro del cuadro. El diámetro angular de los anillos en dependencia de la diferencia de las longitudes de los brazos del interferómetro y del orden de interferencia se determina de la relación $2d \cos r = m\lambda$. Evidentemente, el desplazamiento del espejo en un cuarto de longitud de onda corresponderá para pequeños valores del ángulo r a la transición en el campo visual del anillo brillante al lugar del oscuro, y al revés, del oscuro al lugar del brillante.

El desplazamiento del espejo se realiza con ayuda de un tornillo micrométrico que traslada el espejo en carros especiales. Debido a que en los grandes interferómetros de Michelson el desplazamiento del espejo paralelamente a sí mismo debe de efectuarse en unas cuantas decenas de centímetros, se sobreentiende que las cualidades mecánicas de este aparato deben ser excepcionalmente altas.

Para dar a los espejos una posición correcta ellos están equipados con tornillos de ajuste. Comúnmente los espejos se disponen de tal manera que su equivalente capa de aire tiene la forma de una cuña. En este caso se observan franjas de interferencia de igual espesor, paralelas a la arista de la cuña de aire*). Para grandes distancias entre los espejos la diferencia de recorrido entre los rayos interferentes puede alcanzar enormes valores (más que 10^6 λ), de manera que se observarán franjas de millonésimo orden.

Se comprende que en este caso son necesarias fuentes de luz con un grado muy alto de monocromaticidad. B. P. Linnik construyó un «microinterferómetro» que representa un pequeño interferómetro de Michelson colocado sobre un microscopio común. Este aparato permite observar y medir pequeñísimas rugosidades en una superficie y puede servir para investigar la calidad de la superficie.

§ 30. Interferómetros con haces luminosos reiteradamente divididos

Hasta ahora hemos operado solamente con dos rayos interferentes, cuando se encontraban solamente dos ondas con cierta diferencia de fase.

Sin embargo, en el caso de una lámina planoparalela es necesario considerar la reflexión reiterada de la luz en su superficie, ya que todos los haces coherentes secundarios también resultarán paralelos entre sí e interferirán, dando franjas de igual inclinación localizadas en el infinito.

*) En este caso las franjas de interferencia, por supuesto, no se localizan en el infinito, véase § 25

La diferencia de recorrido entre dos haces adyacentes salientes de la lámina es igual a $2dn\cos r$, donde d es el espesor de la lámina, n, el índice de refracción de la sustancia de la lámina y r, el ángulo de refracción.

Debido a que d y n son constantes, es evidente que las franjas observadas corresponden a determinado valor de r, y, por consiguiente de i, es decir, son franjas de igual inclinación.

Por supuesto, es necesario tomar en consideración que las intensidades de los haces 1, 2, 3, . . . no son iguales. En efecto, sea, por ejemplo, el coeficiente de reflexión igual a 0,05, es decir, sólo el 5% de la luz incidente se refleja, y el 95% pasa. En este caso la intensidad del haz *1* constituye un 5% de la intensidad del incidente, la intensidad del haz *2*, un 4,5%, y la intensidad del haz *3*, solamente cerca de 0,01%. En otras palabras, el tercer y los siguientes haces prácticamente estarán ausentes. En dependencia del valor del coeficiente de reflexión el número de rayos, cuya intensidad es todavía lo suficientemente grande (número de rayos efectivos), crecerá y, por lo tanto, en la formación del cuadro de interferencia tomarán parte activa mayor número de rayos, cuanto mayor sea el coeficiente de reflexión.

La intensidad del haz resultante depende de la diferencia de fases entre los haces adyacentes que es igual a

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda} 2dn\cos r.$$

Si R designa el coeficiente de reflexión, es decir, la fracción de intensidad del haz reflejado con relación a la intensidad del incidente, y T, el coeficiente de transmisión, entonces la distribución de la intensidad en las franjas en dependencia de ψ se expresará por la fórmula

$$I = \frac{T^2}{(1-R^2)} \frac{I_0}{1+[4R/(1-R)^2]\operatorname{sen}^2 1/2\psi} \qquad (30.1)$$

(véase ejercicio 47), en donde I_0 es la intensidad de la luz incidente sobre el interferómetro. Debido a que $\operatorname{sen}^2 {}^1/_2\psi$ varía desde 0 hasta 1, la intensidad varía continuamente desde $I_{máx} = \frac{T^2 I_0}{(1-R)^2}$ hasta $I_{mín} = \frac{T^2 I_0}{(1+R)^2}$. El mínimo en ninguna parte alcanza el valor de cero, y su valor numérico depende de la magnitud T y R. Si la capa reflectora se considera no absorbente, es decir, $T + R = 1$ (en caso general $T + R + A = 1$, donde A es el coeficiente de absorción), entonces $I_{máx} = I_0$, es decir, la intensidad en el máximo será igual a la intensidad de la luz incidente sobre el interferómetro, e $I_{mín} = \frac{(1-R)^2}{(1+R)^2} I_0$, es decir, la intensidad en el mínimo será tanto más

cercana a cero, cuanto más próximo a 1 sea el coeficiente de reflexión.

Al expresar la diferencia de recorrido en longitudes de onda ($\Delta = 2dn\cos r = m\lambda$) o la diferencia de fases en porciones de 2π ($\psi = 2\pi m$, donde la parte entera de m es el orden de la franja de interferencia), hallaremos que los máximos de intensidad corresponden a los valores enteros de m, y los mínimos, a los valores semienteros de m $\left(\text{sen}^2 \frac{1}{2}\psi = \text{sen}^2 \pi m \text{ se reduce a cero para } m \text{ entero y a la unidad para } m \text{ semientero}\right)$; los valores intermedios de m corresponden a las direcciones, que llevan a los sectores entre los

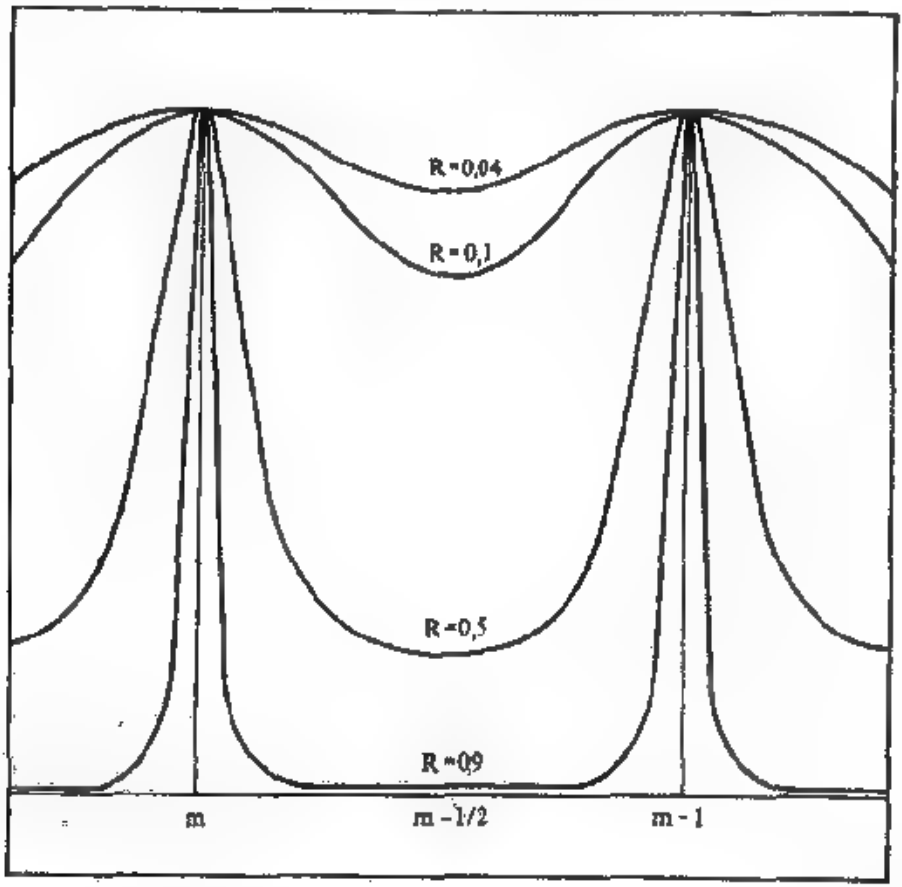


Fig. 7.3. Curvas de distribución de la intensidad en la luz transmitida en dependencia del orden m de interferencia para diferentes coeficientes de reflexión R.
El coeficiente de absorción Δ se considera igual a cero.

máximos y los mínimos. De esta manera, el mínimo está situado en el medio entre dos máximos.

La fig. 7.3 muestra gráficamente la distribución de la intensidad para diferentes órdenes de interferencia. De la fórmula (30.1) y de la fig. 7.3 se ve que cuanto más grande sea R, más próxima a cero será la intensidad en los mínimos y más brusca será la disminución de la intensidad cerca de los máximos.

Las condiciones, que aseguran la interferencia de muchos haces con cercana intensidad, son logradas en dos aparatos.

a. *Patrón de Fabry — Perot.* Este aparato constituye una lámina planoparalela, generalmente de aire. Ella se forma entre dos superficies planas cuidadosamente pulidas y rectificadas de láminas de vidrio o de cuarzo, dispuestas de tal manera que las superficies que se miran sean rigurosamente paralelas (fig. 7.4)*). Las superficies

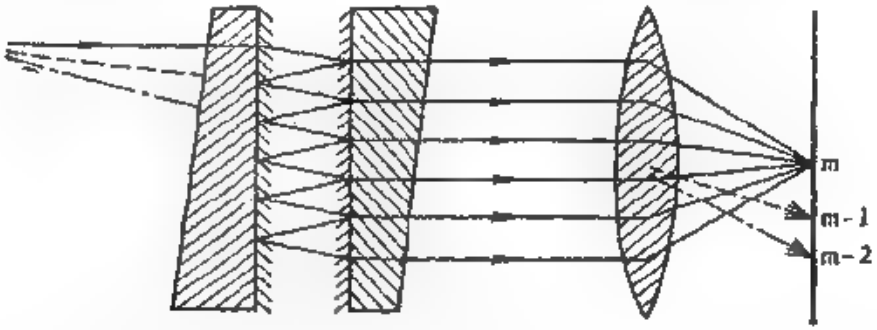


Fig. 7.4. Representación esquemática del patrón de interferencia de Fabry—Perot

exteriores generalmente forman con las interiores un ángulo pequeño para impedir que la luz reflejada por las superficies exteriores moleste la observación del cuadro principal. El paralelismo de la instalación a cierta distancia se logra colocando entre las láminas un anillo de invar**). Este anillo está provisto de tres salientes a cada lado, contra las cuales son sujetadas las láminas con ayuda de tres

*) Cálculos minuciosos muestran que la presencia de las láminas de vidrio no influye en la diferencia de recorrido entre los rayos adyacentes, la cual resulta igual a $\Delta = 2dn\cos r$ (véase (25.1)), además generalmente se puede considerar con suficiente exactitud el índice de refracción del aire $n = 1$.

**) El invar es un acero especial (contiene 36,4% de Ni), que posee a temperatura ambiental un coeficiente de dilatación térmica extremadamente pequeño ($1{,}5 \cdot 10^{-6}$ °C^{-1}). A veces en lugar de invar utilizan anillos de cuarzo fundido con un coeficiente de dilatación próximo a $5 \cdot 10^{-6}$ °C^{-1}.

resortes. Las salientes han sido rectificadas de tal manera que los espejos se dispongan paralelamente entre sí. Pequeñas divergencias del paralelismo son eliminadas al apretar el correspondiente resorte.

En buenos aparatos las superficies de las láminas se hacen planas con una exactitud de 1/200 de la longitud de onda. Las superficies interiores (entre las cuales se encierra la capa de aire) son plateadas o cubiertas con algún otro metal con el fin de garantizar un coeficiente de reflexión de los rayos lo suficientemente alto. El cuadro de interferencia se obtiene en forma de anillos de igual inclinación (fig. 7.5), ya que al patrón se dirige un haz divergente de luz desde una ancha fuente (en la fig. 7.4 se representa el camino de *uno* de los rayos de este haz). El orden de interferencia se define por la distancia entre las placas (desde 1 hasta 100 mm; en patrones especiales es considerablemente más grande, hasta 1 m). En correspondencia con esto los órdenes observables de interferencia son muy altos. Para $d = 5$ mm, $m \approx 20\,000$.

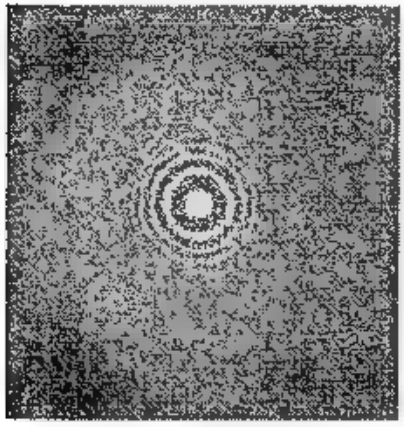


Fig. 7.5. Cuadro de interferencia (líneas de igual inclinación) observado en el patrón de Fabry—Perot.

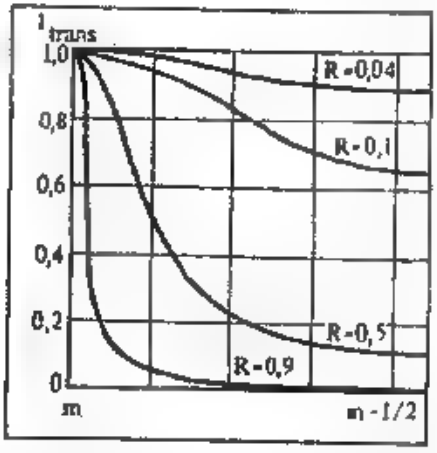


Fig. 7.6. Variación de la intensidad de las franjas interferenciales en función de la diferencia de recorrido para diferentes valores de R ($I_0 = 1$).

La nitidez del cuadro de interferencia será tanto más considerable, cuanto mayor sea el coeficiente de reflexión en la capa metálica (fig. 7.6). El valor de $R = 0{,}04$ corresponde a la superficie de vidrio no cubierta con metal. Los métodos modernos de recubrimiento metálico permiten elevar el coeficiente de reflexión hasta $R = 0{,}90-0{,}95$. En los últimos tiempos se hacen recubrimientos que contienen varias capas de materiales y que proporcionan un coeficiente

de reflexión de hasta 0,99. Generalmente el valor de R depende algo de la longitud de onda.

En los modelos antiguos el interferómetro de Fabry—Perot era dotado de un dispositivo, que permitía variar la distancia entre los espejos. Esto se realizaba aproximadamente de la misma manera que en el interferometro de Michelson. Se sobreentiende que en el interferómetro corredizo no se logra alcanzar una exactitud tan alta, como es posible con los patrones. Por eso para mediciones de exactitud es preferible utilizar un juego de patrones con anillos de diferente espesor entre los espejos.

A veces el patrón de Fabry — Perot es construido como una lámina de vidrio planoparalela, las superficies exteriores de la cual están cubiertas por una capa reflectora. Estos aparatos resultan ser más baratos y sencillos en su utilización. Sin embargo, ellos no pueden garantizar una calidad de trabajo tan alta, como los patrones con capa intermedia de aire. Al utilizar el patrón es preferible trabajar en la luz transmitida, donde se observan nítidos máximos sobre un fondo oscuro; en la luz reflejada se obtienen nítidos mínimos, divididos por máximos anchos e imprecisos (véase ejercicio 48), debido a lo cual crece la acción dañina de la inevitable luz difusa*).

Un gran significado tiene el problema de la intensidad de la luz transmitida a través del patrón. Cuando no hay absorción, a medida que crece el coeficiente de reflexión R, la intensidad de los máximos se mantiene constante e igual a la intensidad del haz incidente para cualquier valor de R. El aumento de R es extremadamente importante pues él aumenta el contraste del cuadro de interferencia, es decir, reduce los mínimos manteniendo invariables los máximos. En el caso de absorción la intensidad en los máximos se reduce. La fórmula (30.1) sigue siendo válida, pero en este caso $T \neq (1 - R)$ y tiene lugar la igualdad $T + R + A = 1$. La expresión para la intensidad en el máximo adquiere la forma

$$I_{\text{máx}} = \frac{T^2 I_0}{(1-R)^2} = \frac{T^2 I_0}{(T+A)^2}.$$

En el caso de un recubrimiento metálico bueno y fresco se puede tener un A no mayor de 1%. Entonces para $R = 90\%$ y $T = 9\%$ $I_{\text{máx}}$ constituye un 80% de la intensidad de la luz incidente; para $R = 95\%$ y $T = 4\%$ $I_{\text{máx}} \approx 65\%$. En la práctica con recubrimientos metálicos $I_{\text{máx}}$ tiene generalmente un valor menor. En el caso de recubrimientos dieléctricos de capas múltiples se logra obtener mejores valores para $I_{\text{máx}}$ que en el caso de recubrimientos metálicos.

*) Con una selección especial de los recubrimientos reflectores (parcialmente absorbentes) se puede lograr que los máximos en la luz reflejada sean casi igualmente nítidos, como en los aparatos comunes en la luz transmitida (*Yu. V. Troitski*).

La posibilidad de variar en el patrón de Fabry — Perot los valores de R y A y también el espesor de la capa intermedia de aire hace a este aparato un instrumento extremadamente flexible que ofrece mayores ventajas en comparación, por ejemplo, con la lámina de Lummer — Gehrke.

b. *Lámina de Lummer — Gehrke.* Esta constituye una lámina de un vidrio muy homogéneo, planoparalela con un grado muy alto de exactitud. Uno de los extremos de la lámina ha sido cortado o dotado de un pequeño prisma adicional (fig. 7.7) para proporcionar una incidencia normal de la luz en la cara de entrada y, por lo tanto, disminuir las pérdidas en la reflexión. La dirección de los rayos incidentes ha sido escogida de tal manera, que en el límite vidrio—aire el ángulo de incidencia sea cercano al ángulo crítico de reflexión total interna, pero un poco menor que éste. En tales condiciones la luz se refleja casi completamente en la superficie vidrio — aire y sólo

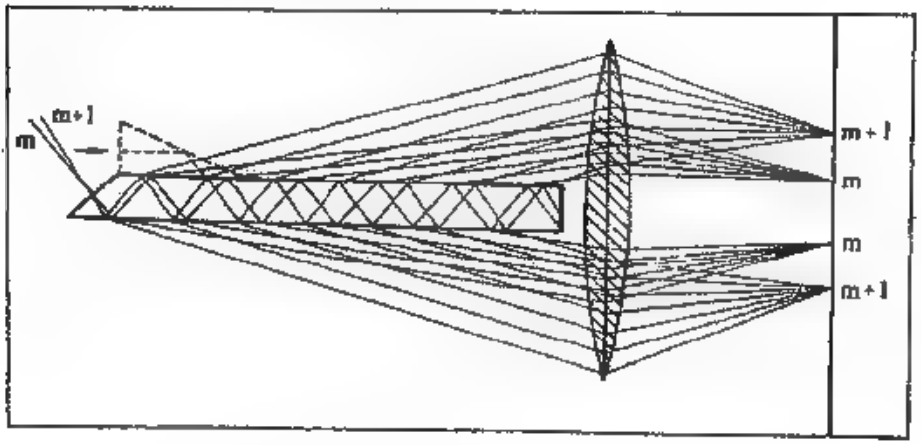


Fig. 7.7. Esquema de la lámina de Lummer—Gehrke.

una pequeña parte de ella sale de la lámina (a través de sus caras superior o inferior) en la dirección que forma un ángulo muy pequeño con la superficie de la lámina. Debido a que en cada reflexión la luz se halla casi completamente dentro de la lámina y sólo pequeñas partes salen de ésta, las intensidades de los rayos consecutivos poco se diferencian una de otra. De esta manera, con la lámina de Lummer — Gehrke se puede obtener hasta 10—15 rayos de intensidad próxima; para esto, por supuesto, la longitud de la lámina deberá ser muy considerable (desde 10 hasta 30 cm, en dependencia del espesor de la lámina).

Si sobre la lámina de Lummer — Gehrke incide la luz desde una fuente ancha, entonces los rayos incidentes, y por consiguiente, los

refractados corresponderán a *diferentes* valores de r. Por eso nosotros obtendremos en el plano focal de la lente convergente (o en el anteojo dispuesto al infinito) un sistema de franjas de diferente orden $m, m + 1, m + 2, \ldots$, correspondientes a los diferentes ángulos $r_m, r_{m+1}, r_{m+2}, \ldots$, determinados de la fórmula $2dn \cos r = m\lambda$. La distribución de la intensidad se representa en la fig. 7.8. En la fig. 7.9 se muestra la fotografía del cuadro de interferencia (líneas de igual inclinación) obtenido con la lámina de Lummer — Gehrke y que representa una serie de máximos angostos y brillantes sobre un fondo oscuro.

Generalmente la lámina de Lummer — Gehrke posee un espesor desde 3 hasta 10 mm, y el ángulo r no difiere mucho de 45°. De esta manera, m es un número expresado en decenas de miles; en la lámina de Lummer — Gehrke se observan franjas de interferencia de un orden bastante alto.

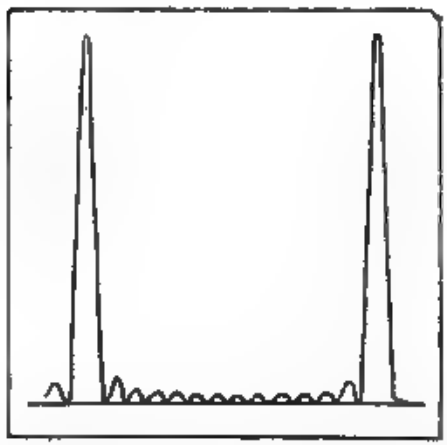


Fig. 7.8. Gráfico de la distribución de la intensidad en el caso de interferencia de muchos rayos en la lámina de Lummer—Gehrke.

Fig. 7.9. Fotografía del cuadro de interferencia obtenido con la lámina de Lummer—Gehrke.

§31. Interferencia en el caso de una gran diferencia de recorrido

En los aparatos parecidos al interferómetro de Michelson al patrón de Fabry — Perot tiene lugar la interferencia de rayos de una inmensa diferencia de recorrido (cerca de un millón de longitudes de onda). Por eso para la observación de la interferencia se exige una monocromaticidad muy alta de la luz. La causa física, debido a la cual la luz no monocromática no puede dar cuadros de interferencia

cuando la diferencia de recorrido es grande, se encierra en lo siguiente. Como se vio en el § 4, el grado de monocromatisidad se define por la duración de la oscilación sinusoidal regular que ocurre en la emisión de luz. En otras palabras, cuanto más oscilaciones sinusoidales *regulares* con amplitud y fase invariables se realicen en el átomo antes de que se interrumpa su emisión, más monocromática será la luz emitida por él. Cualquier fragmentación de la emisión sinusoidal regular, es decir, fragmentación del tren de ondas sinusoidales regulares, emitidas por los átomos, significa la disminución de la monocromaticidad. Se sobreentiende que si el átomo envía un conjunto de unas cuantas decenas de miles de oscilaciones sinusoidales *regulares* y después la emisión se interrumpe (en otras palabras, si esta emisión no es muy monocromática), entonces la interferencia con una diferencia de recorrido de cien mil longitudes de onda, evidentemente, es imposible, cuando llegue el comienzo (la cabeza) del tren de ondas, que van por el camino óptico más largo, el tren, que sigue el camino más corto, logrará pasar completamente y se sustituirá por el tren enviado por otros átomos o creado en otro acto de emisión. De esta manera, la coherencia de los trenes que se encuentran no tiene lugar y tampoco se producirá la interferencia.

Es obvio, que mientras más largo sea el tren emitido por el átomo, es decir, mientras más monocromatica sea la luz, la interferencia será posible con una más grande diferencia de recorrido. En el caso de fuentes de luz con gases enrarecidos en el aparato de Michelson se lograba observar interferencia para una diferencia de recorrido cercana a medio millón de longitudes de onda. Experimentos de este género pueden servir para caracterizar los procesos que suceden en el caso de la emisión del átomo (véase § 22). Al revés, disponiendo de una fuente de ondas monocromáticas, se puede realizar la interferencia en el caso de una inmensa diferencia de recorrido y de esta manera determinar la longitud de onda con una gran exactitud. Para algunas fuentes de rayos laser (por ejemplo, el láser a mezcla de helio y neón) la anchura del espectro de emisión es de 10^8—10^4 s^{-1}, lo que permite observar la interferencia para una diferencia de recorrido de 10^8—10^{10} longitudes de onda.

Al crear una fuente de luz, en la cual la emisión monocromática pueda reproducirse bastante bien, nosotros disponemos de un *patrón* reproducible *de longitud*. Expresando un metro ordinario en longitudes de onda de alguna línea de esta fuente, podemos reemplazar el patrón ordinario del metro por semejante fuente patrón de luz.

Para que la fuente emita una radiación lo suficientemente monocromática con una longitud media de onda bien reproducible, es necesario en lo posible eliminar todas las causas perturbadoras de la radiación. La luminiscencia debe provocarse en los vapores de baja presión para evitar las perturbaciones a consecuencia de los choques entre los átomos y con una pequeña corriente de descarga para debi-

litar la acción perturbadora de los campos eléctricos (efecto Stark), que son originados por los electrones y los iones del vapor cuando la concentración de éstos es muy grande. Es mucho más difícil eliminar la influencia del efecto Doppler (véase § 128) provocado por el movimiento térmico de los átomos emisores y las complicaciones relacionadas con la estructura de los átomos emisores. Para debilitar el efecto Doppler es deseable tener en calidad de emisor una sustancia con átomos de gran masa en lo posible, que posea la necesaria tensión de vapor a temperaturas lo más bajas posibles (véase § 22). La complejidad de las líneas emitidas (la llamada estructura hiperfina de las líneas espectrales) está condicionada por la influencia del momento del núcleo del átomo sobre su capa electrónica. La presencia del momento del núcleo (espín) está relacionada con la paridad o con la imparidad del peso atómico. Sin embargo los átomos en la naturaleza casi siempre constituyen una mezcla de isótopos, en relación con la cual la mayoría de las líneas espectrales es un conjunto de componentes estrechamente dispuestas.

Los éxitos de la física nuclear hicieron posible la obtención artificial de isótopos puros. Así, al irradiar el oro con neutrones se puede obtener el isótopo estable del mercurio con masa par $_{80}Hg^{198}$, el cual no debe dar una estructura hiperfina.

El estudio de un número grande de líneas en los espectros de emisión de una serie de sustancias condujo a la revelación de algunas líneas espectrales que poseen en determinadas condiciones un grado muy alto de monocromaticidad y de reproductibilidad de la longitud media de onda. En el año 1960 la Conferencia Internacional de Pesas y Medidas acordó la sustitución del metro por un nuevo patrón de longitud. Como base fue tomada la línea anaranjada de uno de los isótopos del Criptón (Kr^{86}), después de una cuidadosa comparación de la longitud de onda de esta emisión con la longitud del metro, por definición se adoptó $1\text{ m} = 1650763{,}73\lambda_{vac}\ Kr^{86}$. La longitud de onda de esta emisión en el vacío $\lambda_{vac} = 6057{,}8021 \cdot 10^{-10}$ m. Para el llamado aire estándar (presión de 760 mm Hg, temperatura de 15° C, contenido en CO_2 igual a 0,03%) la longitud de onda de esta línea $\lambda_{aire} = 6056{,}12525 \cdot 10^{-10}$ m. Han sido definidas rigurosamente las condiciones de excitación de la emisión patrón, en las cuales debe encontrarse la fuente de luz, lámpara de gas enrarecido con el cátodo caliente llenada con el isótopo del criptón Kr^{86} (de una pureza mayor que 99%) y enfriada hasta la temperatura de 63 K (punto triple del nitrógeno). Han sido acordados el diámetro del tubo de descarga, la densidad de la corriente de descarga, etc. La práctica demostró que la exactitud relativa de la reproducción de la longitud de onda patrón alcanza $1 \cdot 10^{-8}$.

En la tabla se dan los valores de las longitudes de onda de algunas líneas más estudiadas y que han sido tomadas en calidad de normales secundarias.

Tabla 7.1. Longitudes de onda de las normales secundarias

Elemento	Longitud de onda, 10^{-10} m (vacío)	Reproductibilidad de la longitud de onda
Kr^{86}	6458,0720 6422,8006 5651,1286 4503,8162	$1 \cdot 10^{-8}$
Hg^{198}	5792,2683 5771,1983 5462,2705 4359,5624	$(2—3) \cdot 10^{-8}$
Cd^{114}	6440,2480 5087,2379 4801,2521 4679,4581	$(3—4) \cdot 10^{-8}$

Las normales secundarias se obtienen por la comparación interferométrica con la longitud de onda de la línea patrón naranja del Kr^{86}. Esta comparación fue efectuada en varios laboratorios de diferentes países (URSS, EE.UU., Canadá y otros), y la última columna de la tabla da una idea acerca de la divergencia de los resultados de las mediciones hechas.

La monocromaticidad de la emisión de algunos láseres gaseosos es (en medida relativa) 10^{-10} e inclusive 10^{-11}, lo que es considerablemente mejor que la monocromaticidad de la emisión patrón (aproximadamente 10^{-7}). Sin embargo la reproductibilidad de la longitud de onda de la emisión de estos láseres (es decir, el grado de coincidencia de las longitudes de onda en los láseres construidos en diferentes laboratorios) en la actualidad, según parece, no sobrepasa la reproductibilidad de la longitud patrón de onda. Se puede pensar que el perfeccionamiento de la técnica de láseres y la investigación profunda de las causas que influyen en la magnitud absoluta de la longitud de onda de su emisión conducirán a un nuevo patrón láser de longitud.

§ 32. Algunas aplicaciones de los métodos interferenciales de investigación

En la actualidad, no sólo las mediciones científicas sino también las técnicas exigen la medición de longitudes con una exactitud muy grande. En calidad de modelos (patrones) para tales mediciones se utilizan los llamados *etalones combinables* (*galgas patrón* o *galgas*

Johansson) que representan unas láminas de acero de diferente espesor con las superficies opuestas perfectamente pulidas, rigurosamente planas y paralelas entre sí. Disponiendo de un juego de estas planchas, se puede, apretando (acomodando) fuertemente unas contra otras, formar combinaciones de diferente longitud, las cuales están determinadas con gran exactitud, acerca de lo cual dan una idea las siguientes cifras:

Longitud del etalón combinable, en mm	1	10	50	100	1000
Divergencias admisibles, en μm	0,1	0,1	0,2	0,3	2

Para alcanzar esta exactitud en la confección de los etalones combinables y en su corrección se utilizan métodos interferenciales. Existen muchas diversidades de estos métodos, la esencia de los cuales se reduce a la realización de un interferómetro del tipo de Michelson o de Fabry—Perot, una de las superficies reflectoras del cual es la superficie del etalón combinable que se investiga, y el espesor del etalón combinable representa la distancia hasta la segunda superficie reflectora (a veces se introducen también espejos adicionales). Existen diversos comparadores de interferencia de este género adaptados para la comparación de longitudes de dos etalones combinables o para la determinación absoluta de ellos. Comparadores de este tipo, utilizados en los mejores laboratorios estatales de metrología, permiten determinar medidas de hasta 100 mm con un error desde 0,010 hasta 0,005 μm y medidas de hasta 1000 mm con un error desde 0,1 hasta 0,05 μm.

El método interferencial permite junto con las mediciones exactas de distancias calificar también con gran exactitud la calidad de una superficie pulida. Una exactitud extraordinaria en la confección de superficies de los espejos, de lentes y prismas es una condición necesaria para la creación de instrumentos ópticos modernos de alta calidad. En los mejores sistemas ópticos la discrepancia entre estas superficies y las superficies deseables no debe sobrepasar décimas y hasta centésimas de la longitud de onda. Como métodos más convenientes para la prueba de la calidad de este tipo de superficies sirven los interferenciales, que ya hace tiempo se han difundido ampliamente en la industria mecánico-óptica.

Generalmente la aplicación de los métodos de interferencia está basada en la utilización del patrón modelo hecho con sumo cuidado. Al colocar con todas las precauciones necesarias (eliminación de las partículas de polvo, nivelación de la temperatura) la superficie que se investiga sobre una superficie patrón dada (fig. 7.10), obtenemos entre estas superficies una fina capa intermedia de aire que da en la luz reflejada un nítido cuadro de interferencia. Según la forma y la anchura de las franjas interferenciales se puede juzgar acerca de los defectos de la superficie confeccionada y ver, qué sectores divergen de la forma dada, a qué lado (convexidad o concavidad) y apreciar en

forma aproximada la magnitud de las desviaciones. Si la imperfección de la superficie examinada no es muy grande, entonces los anillos de interferencia serán anchos, y en ausencia de desviaciones toda la superficie tendrá un matiz homogéneo.

En el control de superficies planas es muy cómodo colocar la superficie patrón y la que se examina de tal manera que entre ellas quede una capa intermedia cuneiforme de aire con un ángulo muy pequeño (para esto es suficiente apretar por un lado ambas superficies una contra la otra). Las franjas de igual espesor entre los planos ideales deben tener la forma de rectas paralelas a la arista de la cuña.

Pequeñísimas desviaciones de lo plano provocan la curvatura de estas rectas, que es muy notable y característica: de acuerdo con su forma es fácil de diferenciar un «hueco» de una «colina» y medir la desviación de lo plano con una exactitud superior a 0,01 μm. Cambiando la posición de la arista de la cuña (apretando por un lado,

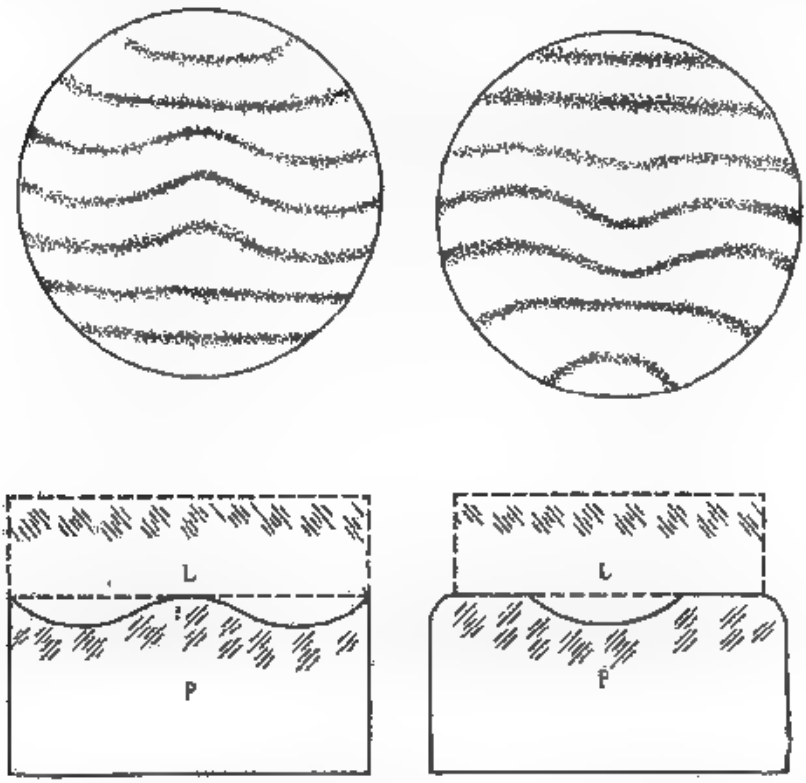


Fig. 7.10. Método de interferencia para el control de la superficie.
P es la lámina a examinar, L, la lámina patrón. Arriba el cuadro esquemático de interferencia (líneas de igual espesor).

o por otro), se puede investigar rápidamente la calidad de la superficie en todas las direcciones.

Cuando se realizan investigaciones minuciosas de la superficie es necesario utilizar haces casi normales y emplear luz monocromática, para aumentar la nitidez de los cuadros de interferencia.

Si se platea la superficie a examinar y la del vidrio de prueba, entonces gracias a la reflexión reiterada se observarán franjas aún más delgadas y nítidas, lo que permitirá aumentar la exactitud de control hasta 0,003 μm (M. F. Romanova, año 1932; Tolanski, año 1944). Las superficies que son controladas en este proceso son separadas por una fina capa intermedia de aire.

Existen interferómetros (V. P. Lianik, Twaiman) designados para el control de calidad de los sistemas ópticos acabados (objetivos), que controlan no sólo la calidad de la elaboración de la superficie, sino también la homogeneidad del vidrio, del cual está confeccionado el sistema.

Cuando se controlan superficies de grandes dimensiones (hasta unos cuantos metros) el vidrio de prueba, por supuesto, no es aplicable. V. P. Linnik construyó un interferómetro, en el cual la luz incide muy inclinadamente sobre una gran superficie, gracias a lo cual disminuye considerablemente la sección del haz reflejado y se hace posible realizar la observación de interferencia. El interferómetro de Lianik permite controlar la rectitud de las superficies de hasta 5 m de longitud con una exactitud de hasta 1 μm.

Los métodos de interferencia también se utilizan ampliamente para controlar la calidad del acabado de superficies metálicas. El microinterferómetro de V. P. Linnik, mencionado en el § 29, pertenece a los interferómetros de este género.

El fenómeno de interferencia en láminas delgadas se utiliza en una serie de aparatos como método muy sensible que permite juzgar acerca de pequeñísimos cambios en el espesor de alguna capa intermedia de aire. Así, por ejemplo, en el dilatometro Fizeau—Abbe una insignificante dilatación térmica acarrea la variación del espesor de la capa intermedia de aire entre el cuerpo que se investiga y el vidrio patrón.

Un dilatómetro en su forma más perfecta contiene un anillo K de cuarzo fundido (sus propiedades térmicas son bien conocidas), sobre el cual está colocada una lámina patrón de vidrio P (fig. 7.11). Dentro del anillo se introduce la sustancia a examinar R en forma de una pequeña columna con superficies correctamente pulidas. La fina holgura de aire M (generalmente cuneiforme) entre las superficies es iluminada con luz monocromática y da un cuadro de interferencia.

En el proceso de calentamiento, a consecuencia de la diferencia en los coeficientes de dilatación de K y R, la holgura M cambia, gracias a lo cual se produce un desplazamiento de las franjas de in-

terferencia que es registrado con ayuda de la marca m. El desplazamiento de éstas en una franja indica el cambio de la diferencia ed recorrido en λ, es decir, el cambio de la holgura de aire en $\lambda/2$. eD esta manera, observando el cuadro de interferencia, se puede medir exactamente la variación de la holgura y de aquí calcular el coeficiente de dilatación. Cuando se realizan mediciones exactas de este género es necesario tomar en consideración la dependencia del índice de refracción del aire con respecto a la temperatura.

El método de control de las láminas planoparalelas fue descrito en el § 27.

Como se ha mencionado anteriormente (véase § 28), los métodos interferenciales dan posibilidad de determinar con gran exactitud pequeñísimas variaciones del índice de refracción, que conllevan a un cambio en la longitud óptica de recorrido y, por consiguiente, a un desplazamiento del cuadro de interferencia.

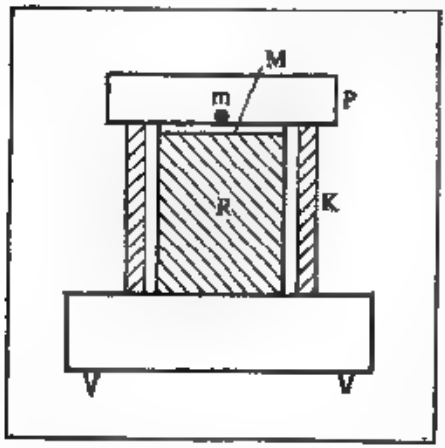


Fig 7.11. Esquema del dilatómetro de interferencia.

A excepción del refractómetro ya citado de Jamin, para este fin sirven también numerosos refractómetros interferenciales de uso técnico adaptados también para la medición de pequeñas variaciones del índice de refracción de los gases y líquidos, provocadas por las impurezas (por ejemplo, el interferómetro técnico para la determinación de la composición de los gases en las minas o para el análisis de cantidades despreciables de sales disueltas en el agua). En los últimos tiempos, la refractometría interferencial comienza a encontrar aplicación incluso en los laboratorios clínicos para la investigación de las alteraciones en la composición de la sangre provocadas por enfermedades. Por último, existe gran cantidad de refractómetros de interferencia que se utilizan para la determinación de los índices de refracción de los cuerpos sólidos. En la actualidad, con la ayuda de estos métodos y con la introducción de todas las correcciones necesarias se ha logrado determinar el índice de refracción con una exactitud de hasta una cienmillonésima.

Los fenómenos de interferencia se utilizan también para la determinación muy exacta de ángulos. Aquí también resulta posible el empleo de métodos muy variados. Así, por ejemplo, para el control de la regularidad de los ángulos en los prismas de vidrio se aprovecha de los fenómenos en láminas delgadas (cuña de aire). Confeccionando

una escuadra estándar de vidrio y colocándola sobre las caras del prisma, se puede según los cuadros de interferencia controlar la regularidad del ángulo del prisma con la exactitud correspondiente a la cuña de aire, cuyo cateto no sobrepasa 0,03 μm.

Michelson aplicó la observación interferométrica para la valoración de las pequeñas distancias angulares entre dos estrellas y también para la valoración del diámetro angular de las estrellas. El método de Michelson, así como su aplicación para la determinación de las dimensiones de las partículas submicroscópicas, será expuesto más adelante (véase § 45). Por último, está claro que los métodos interferenciales, que permiten determinar la longitud de onda con gran exactitud, pueden servir para las investigaciones espectroscópicas más delicadas (estructura hiperfina de las líneas espectrales, investigación de la forma y del espesor de las líneas espectrales, insignificantes variaciones en la estructura de las líneas espectrales). Los espectroscopios interferenciales, sus ventajas y desventajas serán discutidos junto con otros aparatos espectroscópicos (red de difracción, prisma) en el § 50.

DIFRACCIÓN DE LA LUZ

8. EL PRINCIPIO DE HUYGENS Y SU APLICACIÓN

§ 33. El principio de Huygens—Fresnel

Los fenómenos de interferencia de la luz en toda su variedad sirven como demostración convincente de la naturaleza ondulatoria de los procesos luminosos. Sin embargo, el triunfo definitivo de las concepciones ondulatorias era imposible sin la interpretación desde el punto de vista ondulatorio de la ley fundamental de *la propagación rectilínea de la luz* bien comprobada por el experimento.

Las concepciones ondulatorias en aquella forma inicial, en la cual las desarrolló Huygens («Tratado sobre la luz», año 1690), no podían dar una respuesta satisfactoria al problema planteado. En la base del estudio acerca de la propagación de la luz Huygens colocó el principio que lleva su nombre. De acuerdo con las concepciones de Huygens, la luz, por analogía con el sonido, representa unas ondas que se propagan en un medio especial, llamado éter, el cual ocupa todo el espacio y que en particular llena todos los espacios intermedios entre las partículas de todas las sustancias, las cuales están como si fuesen sumergidas en el océano del éter. Desde este punto de vista, era natural considerar que el movimiento oscilatorio de las partículas del éter se transmite no sólo a la partícula que se encuentra en el «camino» del rayo luminoso, es decir, en la recta que une la fuente de luz L (fig. 8.1) con el punto en consideración A, sino a todas las partículas contiguas a A, es decir, la onda luminosa se propaga desde A en todas direcciones, como si el punto A sirviera de fuente de luz. La superficie, que envuelve estas ondas secundarias, representa justamente el frente de onda. Para el caso representado en la fig. 8.1 esta envolvente (el arco grueso) se presenta como la parte de una superficie global con el centro en L, que está limitada por un cono que pasa por los bordes del orificio circular en la pantalla MN. Como se indicó en la Introducción, el principio de Huygens permitió aclarar los problemas de la reflexión y refracción de la luz, incluyendo también el complicado problema acerca de la birrefringencia; pero el problema acerca de la propagación rectilínea de

la luz en esencia no fue resuelto, ya que no fue establecida su relación con los fenómenos de la desviación de la rectitud de la propagación, es decir, con los fenómenos de difracción.

La causa está en que el principio de Huygens en su forma inicial era un principio, cuyo campo de aplicación era el de la óptica geométrica. Expresándonos en el lenguaje de la óptica ondulatoria, este principio se relacionaba con los casos, cuando la longitud de onda podía considerarse infinitamente pequeña en comparación con las dimensiones del frente de onda. Por eso él permitía resolver solamente los problemas acerca de la dirección de propagación del frente luminoso y en esencia no tocaba el problema de la intensidad de las ondas que iban en diferentes direcciones. Esta insuficiencia fue eliminada por Fresnel, el cual introdujo un sentido físico en el principio de Huygens, al completarlo con la idea de *la interferencia* de ondas. Gracias a esto, la superficie envolvente de las ondas elemen-

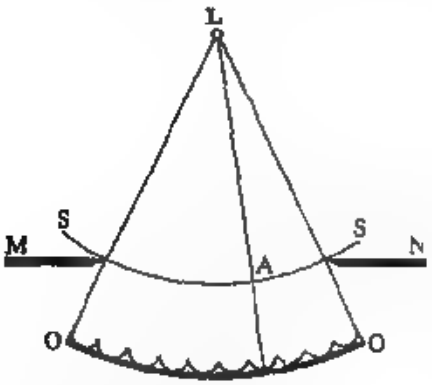


Fig. 8.1. Ilustración para el principio de Huygens.

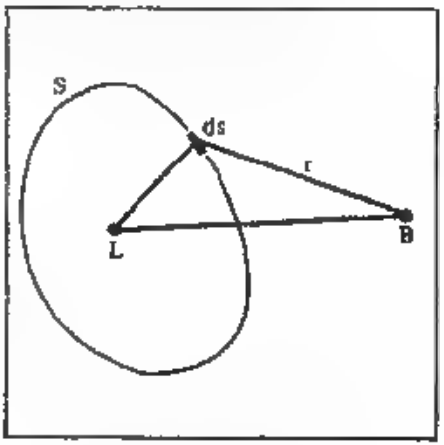


Fig. 8.2. Explicación del principio de Huygens—Fresnel.

tales, introducida por Huygens de manera puramente formal, adquirió un claro contenido físico como la superficie, donde debido a la interferencia mutua de las ondas elementales la onda resultante tiene una intensidad apreciable.

El principio de Huygens—Fresnel modificado de esta manera se convierte en el principio fundamental de la óptica ondulatoria y permite investigar los problemas relacionados con la intensidad de la onda resultante en diferentes direcciones, es decir, resolver el problema acerca de *la difracción* de la luz (véase más adelante). En correspondencia con esto, fue resuelto el problema acerca de los límites de aplicación de la ley de propagación rectilínea de la luz, y el prin-

cipio de Huygens—Fresnel resultó aplicable para aclarar la ley de propagación de ondas de cualquier longitud.

Para la búsqueda de la intensidad (amplitud) de la onda resultante es necesario, según Fresnel, formular el principio de Huygens de la siguiente manera.

Rodeemos la fuente L con una superficie imaginaria cerrada S de cualquier forma (fig. 8 2). El valor correcto de la intensidad (amplitud) de la perturbación en cualquier punto B fuera de S se puede obtener así: eliminemos L y consideremos la superficie S como una superficie luminosa, la emisión de cada uno de los elementos de la cual, al llegar a B, caracteriza en su conjunto la acción en este punto. Es necesario considerar la emisión de cada elemento ds de la superficie S como una onda esférica (onda secundaria), la cual lleva al punto B la oscilación (compárese con (6.1))

$$\frac{a_0}{r}\operatorname{sen}(\omega t - kr - \varphi), \tag{33.1}$$

donde a_0 se define por la amplitud, y φ, por la fase de la oscilación verdadera que llega desde L hasta el elemento ds que se encuentra a una distancia r del punto B. Se supone que las dimensiones del elemento ds son tan pequeñas, que φ y r para cualquier parte del mismo tienen unos mismos valores. En otras palabras, cada elemento ds es observado como cierta fuente auxiliar, de tal manera que la amplitud a_0 es proporcional a la superficie ds.

El postulado de Fresnel que permite determinar a_0 y φ a través de la amplitud y la fase de la oscilación que llega hasta ds, constituye cierta *hipótesis*, cuya validez puede ser establecida al comparar las conclusiones, hechas a base de la misma, con los resultados del experimento. Nosotros regresaremos a este problema en el § 38.

Debido a que las fases de todas las fuentes auxiliares son definidas por la perturbación que va desde L, entonces ellas están rigurosamente coordinadas entre sí, y, por consiguiente, las fuentes auxiliares son *coherentes*. Por eso las ondas secundarias, provenientes de ellas, interfieren entre sí. Su acción conjunta en cada punto puede ser calificada como efecto de interferencia, y por consiguiente, la idea de Huygens acerca del papel especial que desempeña la envolvente deja de ser una suposición y debe ser solamente una consecuencia de las leyes de interferencia. De acuerdo con el postulado de Fresnel citado anteriormente, el problema acerca de las fuentes auxiliares que reemplazan a L tiene una única solución, una vez escogida la superficie auxiliar S. La elección de esta superficie es completamente arbitraria; por eso para cada problema concreto es necesario escogerla de la manera más apropiada para la solución. Si la superficie auxiliar S coincide con el frente de onda, que va desde L (constituye una esfera con centro en L), entonces todas las fuentes auxiliares tendrán la misma fase. En cambio, si la elección de S se hace de otra manera,

las fases de las fuentes auxiliares no serán iguales, pero las fuentes, por supuesto, se mantendrán coherentes.

En el caso, cuando entre las fuentes L y el punto de observación se colocan pantallas no transparentes con orificios, la acción de estas pantallas puede ser tomada en consideración de la siguiente manera. Nosotros escogemos la superficie S de tal modo que ella coincida por doquier con la superficie de las pantallas y que cubra los orificios de éstas de una manera arbitraria, escogida en dependencia del problema examinado. En la superficie de las pantallas no transparentes las amplitudes de las fuentes auxiliares deben considerarse iguales a cero; en cambio, en la superficie, que pasa a través de los orificios de las pantallas, las amplitudes son escogidas de acuerdo con el postulado de Fresnel, es decir, como si estuviera ausente la pantalla. De esta manera, se supone que el material de la pantalla no juega ningún papel, si es que esta última no es transparente*).

Calculando los resultados de la interferencia de las ondas elementales enviadas por las fuentes auxiliares, hallamos el valor de la amplitud (intensidad) en cualquier punto B, es decir, determinamos las leyes de propagación de la luz. Los resultados de estos cálculos son confirmados por los datos experimentales. De esta manera, con el método de Huygens—Fresnel se logra obtener una solución correcta del problema acerca de la distribución de la intensidad de la luz tanto en el caso de la propagación libre de las ondas luminosas (propagación rectilínea), como en presencia de pantallas-obstáculos (difracción).

El primer problema que tuvo que analizar Fresnel al proponer la nueva formulación del principio de Huygens, fue el problema acerca de la propagación rectilínea de la luz. Fresnel lo resolvió al examinar la interferencia mutua de las ondas secundarias, utilizando un método extraordinariamente demostrativo, que reemplaza los cálculos complicados y que posee una importancia general en el análisis de problemas acerca de la propagación de ondas. Este método recibió el nombre de método *de las zonas de Fresnel*.

Observemos la acción de la onda luminosa, emitida desde el punto A, en algún punto B de observación. De acuerdo con el principio de Huygens—Fresnel sustituyamos la acción de la fuente A por la de las fuentes imaginarias dispuestas en la superficie auxiliar S.

---

*) Los experimentos del mismo Fresnel confirmaron la independencia de los resultados de la observación con respecto al material de la pantalla no transparente. Sin embargo experimentos más meticulosos y una teoría detallada muestran que el material de la pantalla influye en el carácter del campo luminoso en las cercanías inmediatas a los bordes de la pantalla, es decir, a una distancia comparable con la longitud de onda.

En calidad de esta fuente auxiliar S escojamos la superficie del frente de la onda, que va desde A (superficie de la esfera con centro en A, fig. 8.3). El cálculo del resultado de la interferencia de las ondas secundarias se simplifica mucho, si se utiliza el siguiente método indicado por Fresnel: para calcular la acción en el punto B unamos A con B y dividamos la superficie S en zonas de tal dimensión que las distancias desde los bordes de la zona hasta B se diferencien en $^1/_2\lambda$, es decir,

$$M_1B - M_0B = M_2B - M_1B = M_3B - M_2B = \ldots = {}^1/_2\lambda$$

(véase fig. 8.3). No es difícil calcular las dimensiones de las zonas obtenidas de este modo. De la fig. 8.4 obtendremos para la primera zona

$$r^2 = a^2 - (a - x)^2 = (b + {}^1/_2\lambda)^2 - (b + x)^2.$$

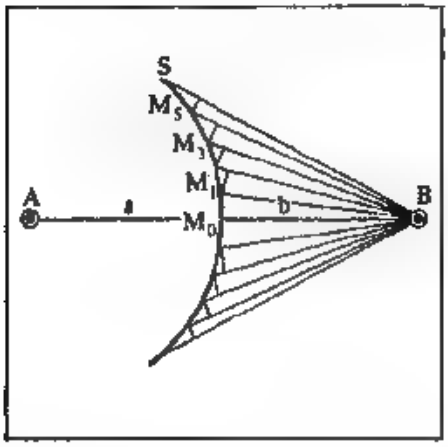


Fig. 8.3. Construcción de las zonas de Fresnel.

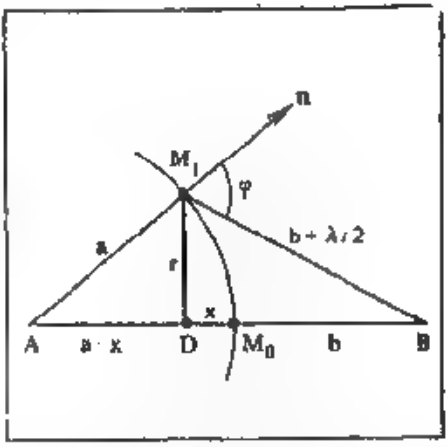


Fig. 8.4. Cálculo del área de la zona central de Fresnel.

Debido a que λ es muy pequeño en comparación con a ó b, entonces

$$x = \frac{b}{a+b}\,\frac{\lambda}{2},$$

y, por consiguiente, el área del segmento esférico que constituye la primera zona (ó zona central), es

$$2\pi a x = 2\pi a\,\frac{b}{a+b}\,\frac{\lambda}{2} = \frac{\pi ab}{a+b}\,\lambda.$$

Para el área del segmento que constituye las dos primeras zonas, hallaremos el valor de $\frac{2\pi ab}{a+b}\,\lambda$, es decir, el área de la segunda zona también es igual a $\frac{\pi ab}{a+b}\,\lambda$. Cada una de las siguientes zonas tendrán

prácticamente la misma área. De esta manera, la construcción de Fresnel divide la superficie de la onda esférica en zonas de iguales dimensiones, cada una de las cuales posee un área de

$$\pi \frac{ab}{a+b}\lambda.$$

Para seguir calculando, es necesario tener en cuenta que la acción de las diferentes zonas sobre el punto B es tanto menor, cuanto mayor sea el ángulo φ entre la normal a la superficie de la zona y la dirección hacia B. De esta manera, la acción de las zonas disminuye paulatinamente desde la zona central (cerca de M_0) hacia las periféricas. La introducción arbitraria de este factor auxiliar debilitador constituye uno de los defectos del método de Fresnel.

Para obtener el resultado definitivo se puede razonar de la siguiente manera: sea que la acción de la zona central en el punto B se expresa a través de la perturbación de la oscilación con amplitud s_1, la acción de la zona vecina, a través de la oscilación con amplitud s_2, de la siguiente, con amplitud s_3, etc. Como se indicó, la acción de las zonas disminuye paulatinamente (aunque lentamente) desde el centro hacia la periferia, de tal manera que $s_1 > s_2 > s_3 > s_4$ y así sucesivamente; la acción s_n de la n-ésima zona puede ser muy pequeña, si n es lo suficientemente grande. Además, gracias al método escogido de división en zonas, es fácil ver que las acciones de las zonas adyacentes se debilitan mutuamente. En efecto, debido a que

$$M_1B - M_0B = \lambda/2 \text{ y } M_2B - M_1B = \lambda/2,$$

las fuentes imaginarias de la zona M_0M_1 están dispuestas $^1/_2\lambda$ más cerca hacia B que las correspondientes fuentes de la zona M_1M_2, de tal manera que las oscilaciones enviadas llegarán hacia B con fases contrarias. Así, para el punto B la acción de la zona central es debilitada por la acción de la zona vecina, etc. Al continuar este razonamiento, hallaremos que el valor definitivo de *la amplitud* de la oscilación que ha sido provocada en el punto B por todo el conjunto de zonas, es decir, por toda la onda luminosa, será igual a

$$s = s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + s_5 - s_6 + \ldots = \\ = s_1 - (s_2 - s_3) - (s_4 - s_5) - (s_6 - s_7) - \ldots \qquad (33.2)$$

De la condición $s_1 > s_2 > s_3 > s_4 \ldots$ se deduce que todas las expresiones en los paréntesis son positivas, de tal manera que $s < s_1$. La iluminación E en el punto de observación B es proporcional al cuadrado de la amplitud resultante de las oscilaciones. Por consiguiente, $E \sim s^2 < s_1^2$.

De esta forma, la amplitud s de la oscilación resultante, que se obtiene a consecuencia de la interferencia mutua de la luz, y que va hacia el punto B desde los diferentes sectores de nuestra onda es-

férica, es menor que la amplitud creada por la acción de la zona central sola. Así pues, la acción de toda la onda en el punto B se reduce a la acción de su pequeño sector que es menor que la zona central con área $\frac{\pi ab}{a+b}\lambda$. La longitud λ de la onda luminosa es bastante pequeña (para la luz verde $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$ mm). Por eso incluso para distancias a y b del orden de 1 m el área de la parte activa de la onda es menor que 1 mm². Por lo tanto, la propagación de la luz desde A hacia B efectivamente ocurre de tal manera, *como si* el flujo luminoso viajase dentro de un canal muy estrecho a lo largo de AB, es decir, *en forma rectilínea*.

Sin embargo, esto no significa que, si nosotros colocamos en la línea AB alguna pequeña pantalla no transparente, entonces la luz no llegará hasta el punto B, ya que la introducción de esta pantalla, la cual tapará, por ejemplo, la primera zona, violará la justeza de nuestros razonamientos. En este caso desaparecerá el primer término de nuestra serie alternativa (33.2) y ahora resultará que $s < |s_2|$ y así sucesivamente, es decir, s es menor que el módulo de s_m, donde m es el número de la primera zona abierta cerca de los bordes de la pantalla. Si m no es grande, por ejemplo, $m < 10$, entonces en *el eje de la pantalla* la iluminación en el punto de observación B se quedará casi la misma, como en su ausencia (véase § 36). Pero si la pequeña pantalla tiene bordes irregulares con mellas comparables con el ancho de la zona de Fresnel, por la cual pasa este borde, entonces ella disminuirá considerablemente la intensidad en el punto de observación B.

§ 34. Placa zonal

Una buena ilustración que comprueba la justeza del citado método de razonamiento de Fresnel puede ser el experimento con la placa zonal. Como se deduce de lo dicho anteriormente, el radio de la m-ésima zona de Fresnel es igual a

$$r_m = \sqrt{m \frac{ab}{a+b}\lambda}. \tag{34.1}$$

Confeccionemos una pantalla compuesta de alternados anillos transparentes y no transparentes, cuyos radios satisfacen la relación escrita para ciertos valores de a, b y λ. Con este fin se puede, por ejemplo, hacer el correspondiente dibujo a gran escala y después disminuirlo como una copia fotográfica hasta la dimensión deseada*).

*) La sucesión de los radios de la placa zonal se subordina a la misma ley que la sucesión de radios de los anillos de Newton en la luz monocromática de longitud de onda λ (véase § 26). Por eso en lugar de dibujar tales anillos, ellos pueden ser obtenidos con ayuda del dispositivo de Newton y después se puede fotografiar este cuadro de interferencia en la escala adecuada.

La pequeña pantalla confeccionada de esta manera lleva el nombre de *placa zonal* (Soret, año 1875).

Las representaciones de tales placas son mostradas en la fig. 8.5. Si se coloca la lámina mostrada en la fig. 8.5, *a* en el lugar correspondiente de la onda esférica, es decir, si se dispone a una distancia *a* de la fuente puntual y a una distancia *b* del punto de observación sobre la línea que une a estos dos puntos, entonces para la luz de longitud de onda λ, nuestra placa tapará todas las zonas pares y dejará libres todas las impares comenzando por la zona central.

El frente ondulatorio filtrado a través de la placa zonal, dispuesta de esta manera, debe dar en el punto *B* una *amplitud* resultante que se expresa por la relación $s = s_1 + s_3 + s_5 + s_7 + \ldots$, es decir, una amplitud mayor que en el caso del frente completamente abierto. Hasta el punto *B* deberá llegar *más* luz, que sin la placa zonal.

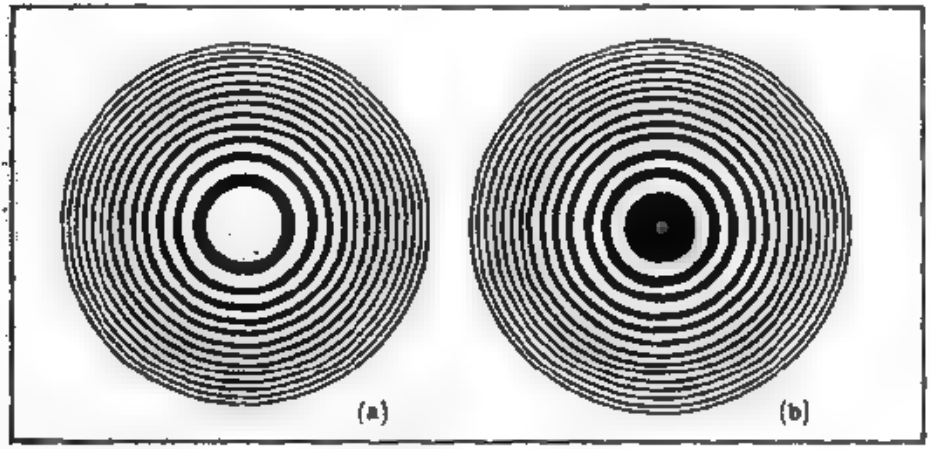


Fig. 8.5. Placas zonales.
a, están abiertas las zonas impares; b, las zonas pares.

El experimento confirma esta conclusión: la placa zonal aumenta la iluminación en el punto *B*, funcionando en forma análoga a como lo hace una lente convergente (véase ejercicio 88). Es necesario tener en cuenta que la placa zonal tiene también focos virtuales y por eso trabaja simultáneamente como una combinación de lentes convergentes y divergentes (véase fig. 8.6).

La analogía entre la placa zonal y la lente puede hacerse más evidente, si modificamos un tanto el planteamiento del problema. Vamos a considerar que la magnitud $f = r_m^2/m\lambda$, que caracteriza la placa zonal y la emisión, es conocida y hallaremos los valores *a* y *b*, para los cuales las ondas que pasan a través de los anillos transparentes de la placa resulten cofásicas. Con ayuda de la relación

34.1) obtenemos

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}, \tag{34.2}$$

es decir, a y b están relacionados con la fórmula de la lente, y la magnitud f desempeña el papel de distancia focal. Por lo tanto, para una determinada posición de la fuente siempre se puede hallar el punto, en donde se encuentra la imagen de ésta. En particular, si sobre la placa incide una onda plana ($a = \infty$), entonces la imagen se encontrará en el punto alejado de la placa zonal a una distancia $b = f$. También son posibles imágenes virtuales, si $a < f$; este caso responde a un valor elevado de la amplitud de la onda divergente, como si ésta saliera del punto situado a la izquierda de la placa zonal.

A diferencia de la lente, la placa zonal no da una sola imagen de la fuente, sino varias. En realidad, traslademos el punto de obser-

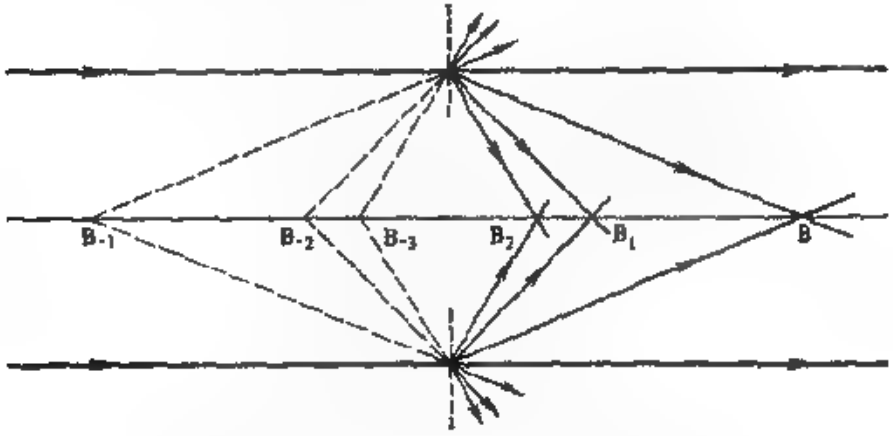


Fig. 8.6. Conjunto de focos de la lámina zonal de amplitud. La escala en la dirección transversal ha sido fuertemente aumentada.

vación a tal posición B_1 que cada anillo transparente de la placa zonal contenga tres zonas de Fresnel y no una sola. La acción de dos de ellas será compensada mutuamente, y la amplitud de las oscilaciones en el punto B_1 se definirá solamente por la tercera zona. Al mismo tiempo, las ondas que llegan a B desde las zonas no compensadas de todos los anillos de la placa, se mantendrán cofásicas, es decir, la amplitud de las oscilaciones en el punto escogido B_1 también tendrá un valor elevado. La diferencia de fase entre las ondas procedentes de las zonas no compensadas de los anillos adyacentes aumentará tres veces (en comparación con el punto B), y la posición b_1 del punto B_1 se definirá por la relación $\frac{1}{a}+\frac{1}{b_1}=\frac{3}{f}$. Estos razo-

namientos son válidos también para cualquier otro punto de observación, si cada anillo de la placa cabe cualquier número impar $2n+1$ de zonas de Fresnel. La posición de estos puntos se da por la relación

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b_n}=\frac{2n+1}{f}=\frac{1}{f_n}; \quad f_n=\frac{f}{2n+1}; \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (34.3)$$

que puede ser interpretada como la existencia de muchas distancias focales f_n en la placa zonal. A los números enteros en (34.3) también se les puede dar valores negativos $n=-1,\ -2,\ \ldots$. A estos valores les corresponden ondas divergentes, ya que justamente para estas últimas la diferencia de fase entre la perturbación de zonas de Fresnel más alejadas y de zonas menos alejadas es negativa.

De esta manera, detrás de la placa zonal se crea un complicado campo ondulatorio con un conjunto de puntos B_0, B_1, B_2, $\ldots$ $\ldots$, B_{-1}, B_{-2}, de elevada iluminación en el eje de la placa, los cuales son mostrados en la fig. 8.6. La aparición de muchas imágenes es originada por la difracción de la onda incidente en la pantalla complicada que representa la placa zonal (ejercicio 88).

Las propiedades de enfoque de las placas zonales permiten utilizarlas en calidad de lentes. En este caso es necesario tener en cuenta las considerables aberraciones cromáticas, debido a que f es inversamente proporcional a la longitud de onda.

Se puede lograr un brillo aun mayor de las imágenes, si en vez de retener las oscilaciones que llegan al punto B desde las zonas pares, se les comunica una variación de fase en π. Tal *placa fásica zonal* fue confeccionada por primera vez por R. Wood, el cual cubrió el vidrio con una fina capa de laca y grabó en ella la placa zonal de tal manera que el espesor óptico de las zonas impares se diferenciase del espesor de las pares en $^1/_2\lambda$.

La transmición de la luz a través de una placa zonal de amplitud con otra distribución de la transparencia se examina en el § 59 del cap. XI.

§ 35. Cálculo gráfico de la amplitud resultante

El estudio del problema acerca de la acción de la onda luminosa en el punto B (véase fig. 8.4), al igual que de muchos otros problemas análogos, es extraordinariamente cómodo de realizar, utilizando el método gráfico de sumación de oscilaciones que poseen cierta diferencia de fase. Para representar gráficamente la acción de *la zona entera*, es necesario dividirla en iguales *sectores* tan pequeños, que la fase de las oscilaciones ocasionadas en el punto B por las diferentes fuentes imaginarias de este sector pueda considerarse prácticamente constante. Entonces la acción de todo el sector se puede expresar como un vector, cuya longitud da la amplitud resultante, y la dirección muestra la fase condicionada por este sector. La acción del

sector adyacente se puede expresar con un segundo vector, algo inclinado con respecto al primero, ya que la fase definida por el conjunto de fuentes del segundo sector se diferencia un poco de la fase en el primer sector. Por su longitud este vector prácticamente no difiere del primero, debido a que la amplitud de la oscilación ocasionada por sectores iguales del frente de onda se diferencia sólo a consecuencia de la variación de la inclinación del frente de onda con respecto a la línea trazada hacia el punto B, y para dos sectores adyacentes esta variación es despreciablemente pequeña. Incluso al pasar de una zona a la siguiente la influencia de la variación de la inclinación, como vimos, es insignificante. De esta manera, el diagrama vectorial que da la representación de la acción de los diferentes sectores que componen una zona entera, resulta ser una línea quebrada, la cual se muestra en la fig. 8.7.

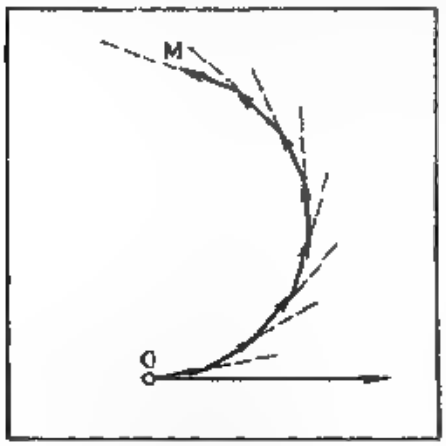


Fig. 8.7. Diagrama vectorial de la suma de las acciones de los diferentes sectores de la zona.

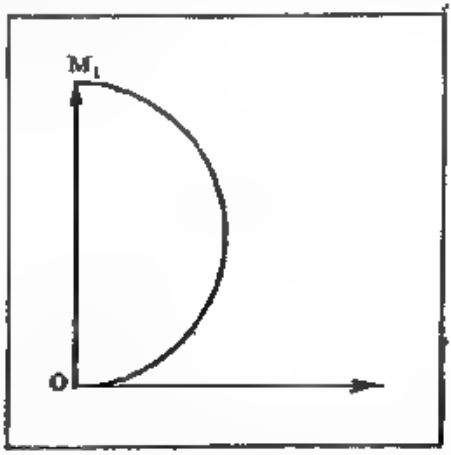


Fig. 8.8. Diagrama vectorial de la acción de la zona central (de la primera zona).
OM_1 es el vector resultante.

Para concretizar, supongamos que la zona ha sido dividida en 8 sectores elementales. Si se divide la zona en un número infinitamente grande de sectores pequeños, entonces la línea quebrada se convertirá en un arco que se diferenciará muy poco de una semicircunferencia. Además el vector tangente al arco en el punto M tendrá una dirección completamente contraria a la del correspondiente vector en las cercanías del punto O, debido a que la fase de la oscilación en B, condicionada por la acción del último sector de la zona, por supuesto, es contraria a la fase de las oscilaciones emitidas por el sector inicial de la zona; el diagrama vectorial de la acción de la zona central puede ser representada como se muestra en la fig. 8.8, y la

resultante que caracteriza la oscilación en B y que es ocasionada por la acción sólo de la zona central, es el vector OM_1.

Para tomar en consideración la acción de la segunda zona, es necesario continuar nuestro diagrama vectorial. Entonces obtendremos la fig. 8.9, en donde la cuerda M_1M_2 del arco es algo menor que la del arco OM_1 a consecuencia de la inclinación creciente de la zona. Continuando nuestra construcción obtendremos el diagrama de la acción de toda la onda representado en la fig. 8.10.

La resultante que caracteriza la acción de todo el frente ondulatorio se expresa mediante el vector $ON = s$. De la fig. 8.10 es fácil ver que este vector es igual aproximadamente a la mitad del vector $OM_1 = s_1$, que representa la acción de la zona central, y coincide con él en dirección. En otras palabras, la oscilación en el punto B condicionada por todo el frente ondulatorio, coincide en fase con la

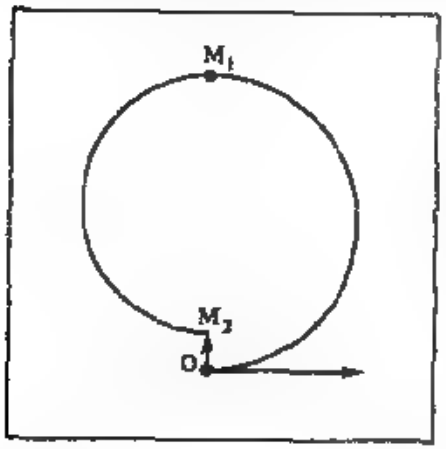


Fig. 8.9. Diagrama vectorial de la acción de la primera y segunda zonas. OM_2 es el vector resultante.

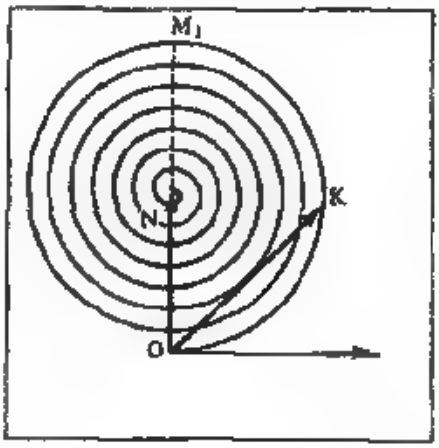


Fig. 8.10. Diagrama vectorial de la acción de toda la onda.

El vector resultante ON es igual a la mitad del vector que corresponde a la acción de la primera zona. El vector OK caracteriza la acción de la mitad de la primera zona.

oscilación que podría ser creada sólo por la zona central, y su amplitud constituye aproximadamente la mitad de la de esta última oscilación. Los razonamientos expuestos muestran que la acción (amplitud), ocasionada por todo el frente ondulatorio, es aproximadamente igual *a la mitad* de la acción de la zona central, y no a la acción de la mitad de la zona central, como se afirma frecuentemente. En efecto, la acción de la mitad de la zona central se expresaría con el vector OK que se diferencia del vector ON encontrado correctamente.

§ 36. Problemas elementales de difracción

La utilización del método de Fresnel permite prever y explicar las particularidades de la propagación de las ondas luminosas que se observan cuando una parte del frente de la onda viajera (móvil) interrumpe su acción a consecuencia de que la luz se propaga entre obstáculos que tapan parte del frente de onda. Estos fenómenos *de contorno* de los impedimentos (pantallas y los bordes de los diafragmas) llevan el nombre de fenómenos *de difracción*.

Veamos algunos casos simples. Demos uso a la hipótesis, puesta por Fresnel en la base de sus razonamientos, suponiendo que la parte del frente de la onda luminosa, tapada por una pantalla no transparente, no actúa por completo, y los sectores no tapados del frente actúan como si la pantalla estuviera completamente ausente. Esta hipótesis no es evidente de por sí y en las cercanías inmediatas a los bordes de los orificios no es completamente correcta (véase la observación en la pag. 159). Sin embargo, para la mayoría de los casos de interés práctico, cuando las dimensiones del orificio son mucho mayores que la longitud de onda λ, el método de Fresnel describe bastante bien los fenómenos de difracción. La causa del éxito del método de Fresnel está en que la influencia del material de la pantalla se deja sentir solamente en las cercanías inmediatas a su borde, es decir, a distancias del orden de la longitud de onda. En el caso de orificios lo suficientemente grandes, la influencia de esta zona límite es despreciable y prácticamente puede no considerarse. En estas condiciones se puede utilizar exitosamente el método de Fresnel.

a. *Difracción por un orificio circular.* Sea que la onda Σ que va desde A encuentra en su camino la pantalla MN con un orificio circular (fig. 8.11). Investiguemos el fenómeno en el punto B, dispuesto en la línea que une A con el centro del orificio circular.

La superficie auxiliar de Fresnel Σ tocará la pantalla MN. La división de aquella en zonas de Fresnel realizada como fue descrito en el § 33, muestra que en dependencia de la dimensión del orificio en este último cabrá un número mayor o menor de zonas. En el caso de un orificio pequeño y para las correspondientes distancias hasta los puntos A y B se puede considerar solamente un número limitado de zonas activas. Es fácil ver que, si el orificio abre solamente una zona o un número pequeño *impar* de zonas, entonces la acción en el punto B será mayor que en ausencia de la pantalla*). El máximo de la acción corresponde a la dimensión del orificio igual a una zona. En cambio, si el orificio abre un número *par* de zonas, entonces la perturbación luminosa en el punto B será *menor* que en el caso de una

*) Sin embargo, la dimensión del orificio es todavía mucho mayor que λ, de tal manera que las condiciones de aplicabilidad del método de Fresnel son observadas. En efecto, por ejemplo, para $a = b = 100$ cm y $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$ cm hallamos $r = \sqrt{1{,}5a\lambda} = \sqrt{25 \cdot 10^{-3}}$ cm $= 5 \cdot 10^{-2}$ cm $= 1000\lambda$.

onda libre. La menor iluminación corresponde a *dos* zonas abiertas (fig. 8.12).

Utilizando el método gráfico, descrito en el § 35, nosotros obtendremos unos diagramas parecidos a los representados en las figs. 8.8—8.10, los cuales aclaran la perturbación luminosa en el punto B en dependencia del número de zonas incluidas en el orificio.

Un cuadro análogo se observará para cualquier punto dispuesto en la línea AB. Los cálculos del cuadro para los puntos dispuestos en el plano perpendicular a AB, a un costado de esta línea, son algo más complicados. Pero es fácil ver que a consecuencia de la simetría de todas las posiciones respecto de la línea AB la distribución de la luz en el plano indicado debe ser simétrica, es decir, las regiones de igual iluminación deben disponerse anularmente cerca del punto B. En condiciones adecuadas del experimento, se puede observar varias

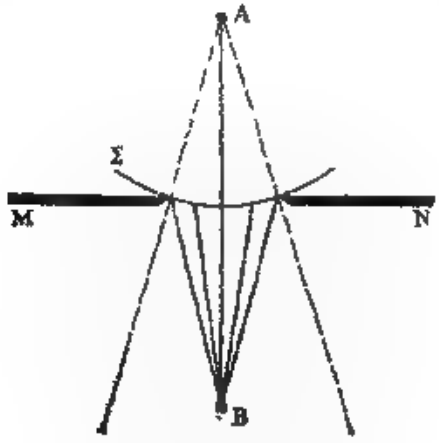


Fig. 8.11. Esquema de la difracción por un orificio circular.
Las zonas están construidas para el punto central B del campo.

regiones concéntricas de máximos y mínimos de iluminación, con una suave transición de unos a otros (véase fig. 8.12).

b. *Difracción por una pantalla circular.* Para el punto B dispuesto en la línea que une la fuente A con el centro de la pantalla (fig. 8.13), la construcción de Fresnel da: la primera zona desde el borde de la pantalla hasta la línea de intersección de la superficie de la onda con el cono, cuya generatriz es igual a $b + {}^1/_2\lambda$; la segunda zona, hasta el cono con generatriz $b + \lambda$ y así sucesivamente. Repitiendo los razonamientos de § 33, obtenemos que la amplitud de las oscilaciones luminosas en B es igual a la mitad de la amplitud condicionada por la primera zona *abierta*. Si la dimensión de la pantalla es

pequeña (abarca una pequeña cantidad de zonas), entonces la acción de la primera zona abierta prácticamente no se diferencia de la acción de la zona central del frente ondulatorio. De esta manera, la iluminación en el punto B (al igual que en los otros puntos sobre la línea AB lo suficientemente alejados de la pantalla) será la misma que en ausencia de la pantalla. A consecuencia de la simetría de todo el cuadro con respecto a la recta AB, el punto brillante en B está rodeado de zonas anulares alternadas de sombra y luz (fuera de los límites de la sombra geométrica). A medida que nos alejamos de B en dirección perpendicular a la línea AB, los anillos se vuelven cada vez menos nítidos, hasta que lejos de B se establece una iluminación uniforme. La fotografía en la fig. 8.14 muestra los resultados del experimento correspondiente.

La deducción paradójica a primera vista según la cual en el mismo

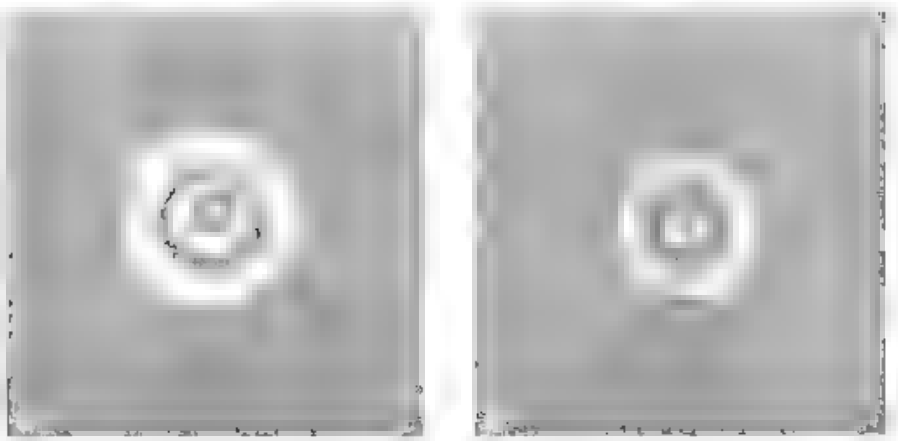


Fig. 8.12. Cuadros de difracción por un orificio circular.
a—el orificio deja abierto un número impar de zonas, en el punto central del campo (B en la fig. 8.11) hay luz. b—el orificio deja abierto un número par de zonas: en el punto central del campo hay oscuridad.

centro de la sombra geométrica debe encontrarse un punto brillante, fue enunciada por Poisson en el año 1818, cuando él examinaba las memorias de Fresnel en la Academia de París, como demostración de la inconsistencia de los razonamientos de Fresnel. Sin embargo, Arago realizó el experimento correspondiente y demostró que las conclusiones de Poisson corresponden a la realidad y, por consiguiente, sólo confirman la teoría de Fresnel*). La mancha brillante

*) La manchita brillante arrojada por bolitas de diferentes dimensiones en el centro de la sombra geométrica, fue observada por Maraldi (1723) y, al parecer, aún antes por Delil (1715), aunque las indicaciones de este último no son sufi-

en el centro de la sombra geométrica, predicha por Poisson en calidad de *aparente* refutación de la naturaleza ondulatoria de la luz, recibió la denominación de *mancha de Poisson*.

Para realizar con éxito el experimento, es necesario que el borde de la pantalla coincida bien con los límites de la zona, es decir, la pantalla debe ser un círculo exacto. Para este fin son cómodas, por ejemplo, las bolas de acero de los cojinetes de bolas. En el caso cuando los bordes de la pantalla tienen irregularidades comparables con las dimensiones de la primera zona abierta de Fresnel, los cálculos y el experimento muestran que la pequeña pantalla violará las predicciones unívocas de la teoría de Fresnel acerca de la presencia de la mancha de Poisson.

c. *Difracción por el borde de una pantalla, por una rendija y por una pantalla larga y angosta*. Hasta ahora hemos visto impedimentos

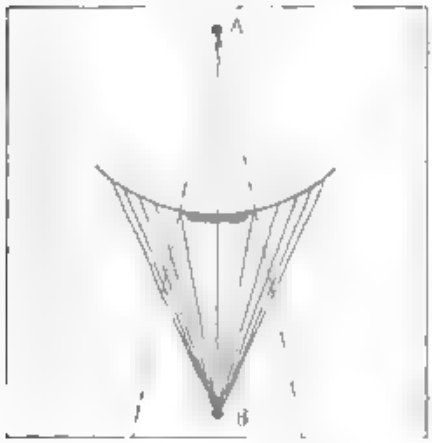


Fig. 8.13. Esquema de la difracción por un disco circular.
Las zonas están construidas para el punto central B del campo.

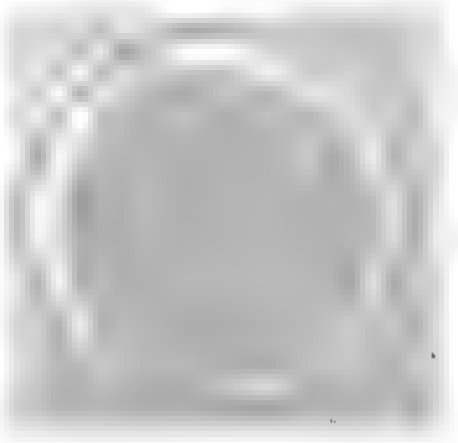


Fig. 8.14. Cuadro de difracción por un disco circular.

con tal forma que para ellos la construcción de las zonas anulares de Fresnel era un método cómodo de resolución del problema. Prácticamente un gran significado tienen también otros casos, por ejemplo, el paso de la luz a través de una rendija angosta o cerca de una pantalla con un borde ostensiblemente rectilíneo que tapa una parte del frente de la onda luminosa (semiplano). En estos casos los cálculos cuantitativos del cuadro observado según el método de las zonas

---

cientemente claras; sin embargo este experimento quedó desapercibido y fue olvidado, debido a que en aquel entonces el fenómeno de difracción todavía no había sido comprendido.

anulares de Fresnel no son cómodos, debido a que el borde rectilíneo de la pantalla no separa zonas enteras, sino que las interseca (fig. 8.15). Por eso la consideración de la acción de zonas parcialmente abiertas o cerradas es dificultosa.

La solución del problema puede simplificarse considerablemente, si se divide la superficie de la onda en zonas de una manera algo diferente (fig. 8.16). Sea A el punto luminoso, B, el punto de observación, Σ, la superficie de la onda esférica y D, la pantalla infinita, cuyo borde es perpendicular al plano del dibujo. Tracemos desde el punto B en el plano del dibujo las líneas BM_0, BM_1, BM_2, . . . y BM'_1, BM'_2, . . ., que se diferencian en $\lambda/2$ por su longitud. A través del centro A y de los puntos M_1, M'_1, M_2, M'_2, etc. tracemos *los planos paralelos* a la arista de la pantalla D y dividamos de esta manera la superficie de la onda con ayuda de los arcos de las circunferencias mayores en muescas circulares, del mismo modo como la superficie de la Tierra es dividida en sectores por los meridianos. A diferencia de la red meridional, la superficie de la onda es dividida en muescas por arcos dispuestos a distancias *desiguales* uno de otro, y en concordancia con esto las áreas de las muescas no serán iguales (fig. 8.17). Razonamientos parecidos a los expuestos en el § 33 muestran que las distancias M_0M_1, M_1M_2, ..., y por consiguiente, también las áreas de las correspondientes muescas se relacionan entre sí aproximadamente como

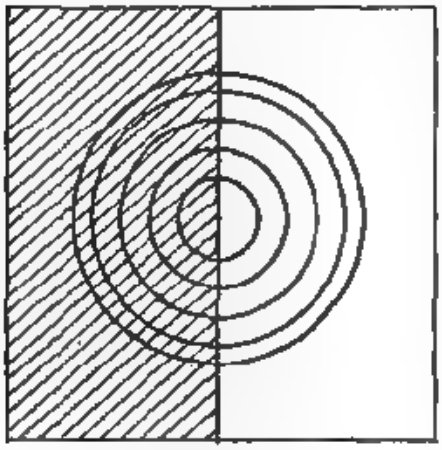


Fig. 8.15. Intersección de las zonas de Fresnel con la pantalla de borde rectilíneo.

$$1 : 0{,}41 : 0{,}32 : 0{,}27 : 0{,}23 : 0{,}22 : 0{,}20 : 0{,}18 : 0{,}17$$

y así sucesivamente*). Como vemos, las áreas de las muescas, a medida que nos alejamos de M_0, disminuyen al principio muy rápidamente, y después más despacio. La perturbación luminosa desde los correspondientes puntos que están en el plano de la fig. 8.16 para las muescas adyacentes alcanza a B en fases contrarias, como en el caso de las zonas divididas según la construcción común de Fresnel; sin embargo las amplitudes, condicionadas por la acción de la primera, segunda y siguientes muescas, disminuyen mucho más rápide

*) Para simplificar, los cálculos han sido realizados para un frente plano, lo que es admisible, ya que en muchos casos la curvatura de Σ no es grande.

que en el caso estudiado en el § 33, ya que, además del aumento de la inclinación del frente de onda con respecto a la línea MB, las áreas de las muescas disminuyen notablemente a medida que nos alejamos del polo M_0.

Utilizando la división indicada de la superficie de onda en zonas, nosotros podemos resolver el problema con más facilidad según el plan enunciado en los apartados a y b.

d. *Principio de semejanza en la formación de cuadros de difracción.* No es difícil comprender que dos sistemas de objetos (orificios y pantallas) darán cuadros de difracción completamente parecidos, si la disposición de la fuente de luz y del ojo del observador y las dimensiones de los orificios y de las pantallas son tales que a ambos objetos les corresponde un número igual de zonas de Fresnel y de sus partes. En efecto, el carácter del cuadro de difracción se define precisa-

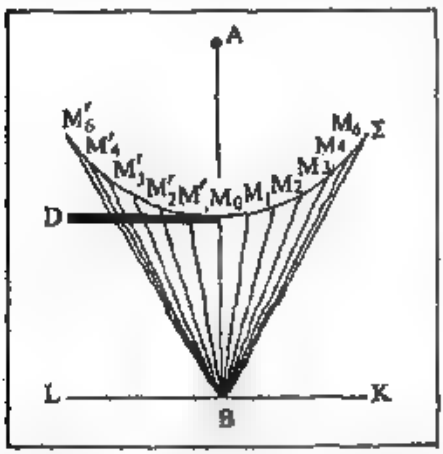


Fig. 8.16. División del frente ondulatorio en muescas análogas a las zonas de Fresnel.

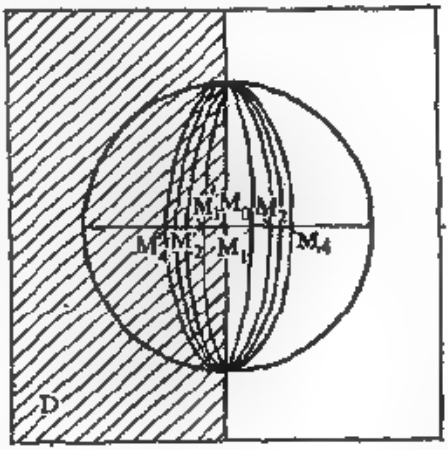


Fig. 8.17. División del frente ondulatorio en muescas.

Las curvas elípticas son las proyecciones de los límites de las muescas sobre el plano de la pantalla D.

mente por el número de zonas de Fresnel, y no por las dimensiones absolutas de las pantallas y orificios.

En el caso de una onda plana (fuente infinitamente alejada), el área de la zona de Fresnel es igual a $\pi f\lambda$, donde f es la distancia hasta el ojo del observador, y el radio de la zona, $r = \sqrt{f\lambda}$. De esta manera, para igualar el número de zonas de Fresnel es necesario escoger la distancia f tal que $x/r = x/\sqrt{f\lambda}$ (x es la dimensión del orificio) tenga un mismo valor. Esta es la condición de semejanza de los cuadros de difracción. Como se ve, en el caso de dos objetos similares con dimensiones x_1 y x_2 se puede observar cuadros semejantes de difrac-

ción, si se escoge la distancia hasta el lugar de observación f_1 y f_2 de tal manera que $f_1/f_2 = r_1^2/r_2^2$. Así en los experimentos en modelos de V. K. Arkadiev (fig. 8.18), se pudo simular el cuadro de difracción producido por una mano que sostenía un plato, en una pantalla dispuesta a una distancia de 11 km, donde una distancia fácilmente realizable de 40 m, cambiando la mano y el plato por un modelo cortado de hojalata a una escala disminuida en $\sqrt{11000:40} \approx 16{,}5$ veces.

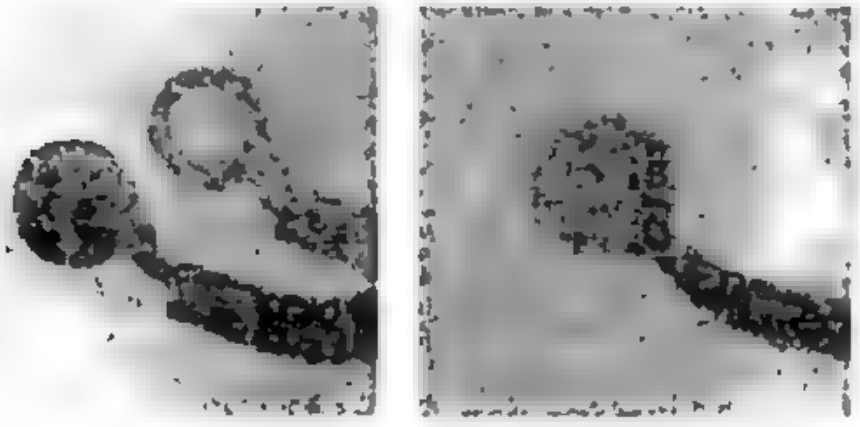


Fig. 8.18. Simulación del cuadro de difracción en una pantalla.

a la sombra proyectada por una mano que sostiene un plato situada sobre una pantalla dispuesta perpendicularmente a la sombra proyectada por una mano que sostiene un plato situada sobre una pantalla dispuesta a una gran distancia (11 km). La sombra se diferencia por la difractada. (La fotografía de V. K. Arkadiev ha sido realizada en el modelo calculado según el principio de semejanza.)

§ 37. La espiral de Cornu y su utilización para la resolución gráfica de los problemas de difracción

Del mismo modo como nosotros construimos el diagrama vectorial para considerar la acción de las diferentes zonas anulares (véase § 35), se puede construir un diagrama de la acción de las diferentes muescas. Por supuesto, se obtendrá también una curva en forma de espiral, sin embargo, a consecuencia de la diferencia en las áreas de las muescas la acción de éstas a medida que nos alejamos del punto central de la onda (punto M_0) disminuye rápidamente, particularmente cerca de M_1. De acuerdo con esto los vectores que representan la acción de los sectores posteriores de cada muesca disminuyen más rápidamente en su longitud que en el caso de la construcción del § 35, correspondiente a la división en zonas de Fresnel, y la espiral

se obtendrá con más declividad. Este problema fue resuelto analíticamente por Fresnel con ayuda de integrales de un tipo especial que adquirieron el nombre de integrales de Fresnel. El gráfico correspondiente a esta solución del problema de difracción, fue construido por Cornu y lleva el nombre de *espiral de Cornu*. Esta última está representada en la fig. 8.19, donde F_- y F_+ constituyen los polos, hacia los cuales la espiral tiende asintóticamente. La rama $OB_1B_2 \ldots F_-$ de la espiral, que expresa la acción de la mitad izquierda del frente ondulatorio, consta de sectores paralelos a los correspondientes sectores de la rama $OA_1A_2 \ldots F_+$ que representa la acción de la mitad derecha, ya que las partes correspondientes del frente de onda están dispuestas simétricamente con respecto al punto B (véase fig. 8.16), para el cual se hacen los cálculos. De esta manera, ambas ramas de la curva son simétricas, O constituye el punto de inflexión, y la recta F_-OF_+ que une los polos de la espiral, forma un ángulo de 45° con la tangente en el punto O*).

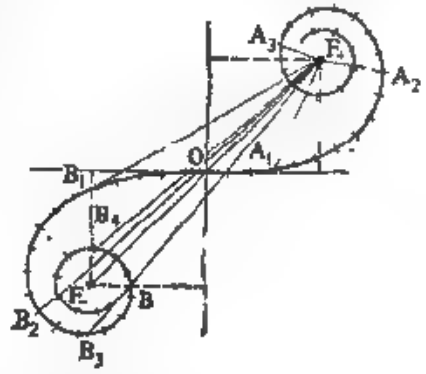


Fig. 8.19. Espiral Cornu.

Utilizando la espiral de Cornu, se puede resolver cuantitativamente problemas parecidos a los mencionados anteriormente, es decir, problemas acerca de la difracción en impedimentos que son limitados por bordes rectilíneos. La amplitud de la oscilación condicionada por alguna parte del frente de la onda luminosa se expresa por un vector que cierra el sector de la espiral correspondiente a la parte dada del frente de onda. La acción de todo el frente de onda, es decir, del frente no tapado por ningún impedimento, se representará con el vector F_+F_- que une los extremos de la espiral.

Veamos en calidad de ejemplo la aplicación de la espiral de Cornu para el análisis del problema acerca de la difracción por el borde de una pantalla. La iluminación en el punto B (fig. 8.20) que se encuentra en el límite de la sombra geométrica está condicionada por la acción de la mitad de la superficie del frente de onda, debido a que su segunda mitad está tapada por la pantalla; en nuestro diagrama a esto le corresponde el vector OF_+ que une el centro de la

*) La descripción de las propiedades geométricas de la espiral de Cornu, del método de su construcción y de su relación con las integrales de Fresnel se puede encontrar en cualquier curso de Óptica Teórica, por ejemplo: *P. Drude*, Óptica, ONTI, 1935, o *R. Ditchburn*, Óptica física, «Naúka», 1965 (*en ruso*).

espiral con su polo F_+ (véase fig. 8.19). Debido a que $OF_+ = \frac{1}{2}F_+F_-$, la amplitud en el punto B será igual a la mitad, y la intensidad, a una cuarta de la intensidad observada en ausencia de la pantalla D. Al pasar a la región BK el polo de la onda*) se desplaza a la derecha, de tal manera que para el punto B_2 está abierta toda la mitad derecha del frente de onda y cierta parte de la mitad izquierda. Por eso la amplitud se definirá por el vector que une F_+ con los puntos cada vez más alejados de la espiral, es decir, por el vector F_+B_1, F_+B_2, F_+B_3 y así sucesivamente. La fig. 8.19 muestra que estos vectores pasan a través de una serie de máximos mayores que F_+F_- y de mínimos menores que F_+F_-, lo que corresponde al cambio de máximos y mínimos en la parte iluminada de la pantalla. La mayor intensidad, igual a 1,37, se alcanza en el primer máximo, el cual aparece cuando el polo de la onda se traslada a una distancia aproximadamente igual al ancho de la primera zona de Fresnel (el punto B_2 en las figs. 8.19 y 8.20). La caída de la intensidad en la región de la sombra geométrica BL, donde la pantalla D tapa una parte cada vez mayor de la onda, se lleva a cabo suavemente, como se ve en la fig. 8.19, donde están representados los valores consecutivos de la amplitud: F_+A_1, F_+A_2, F_+A_3, etc.

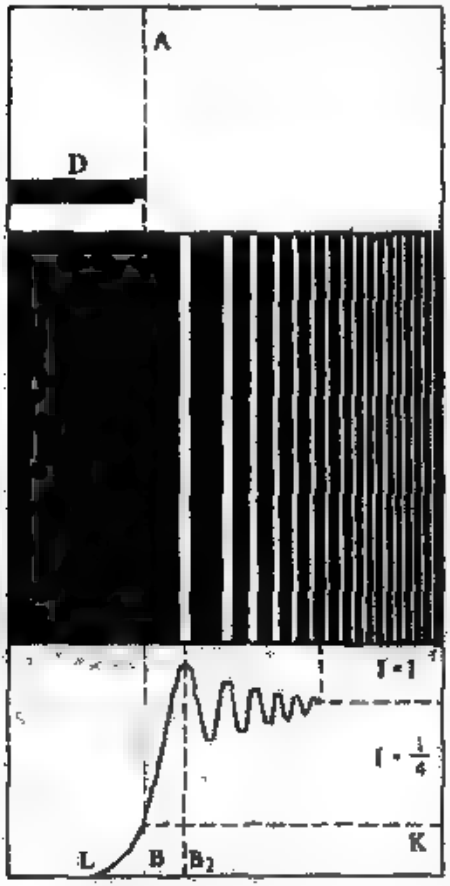


Fig. 8.20. Difracción por el borde de la pantalla.

Teniendo a nuestra disposición la espiral de Cornu debidamente trazada a una escala lo suficientemente grande, nosotros podemos determinar la distribución cuantitativa de la intensidad con una suficiente exactitud.

El esquema y la fotografía de la fig. 8.20 dan el cuadro de difracción observable, bajo el cual ha sido trazada la distribución teórica de la intensidad. De manera análoga, se puede investigar la acción de una rendija infinita y angosta o de una angosta pantalla, etc.

*) Se llama polo de la onda el punto de intersección del frente de onda con la recta que une la fuente A y el punto de observación (B_1, B_2, ...).

§ 38. Observaciones sobre el principio de Huygens—Fresnel

Los ejemplos estudiados anteriormente muestran de una manera lo suficientemente convincente que los cálculos (analíticos y gráficos), realizados a base del postulado de Fresnel, dan un valor correcto de la distribución de la intensidad en los fenómenos de la difracción, es decir, permiten determinar correctamente *la amplitud* de la onda resultante si las dimensiones de los impedimentos o de los orificios son considerablemente mayores que la longitud de onda.

Sin embargo, en estos casos hay que notar lo siguiente. En primer lugar, en los cálculos de los resultados de interferencia de ondas elementales es necesario suponer que la amplitud condicionada por las fuentes auxiliares depende del ángulo de inclinación φ entre la normal al sector correspondiente de la superficie auxiliar y la dirección hacia el punto B para el cual se hacen los calculos.

La superficie S es similar a una superficie luminosa, de tal manera que la amplitud de las ondas emitidas es tanto menor, cuanto mayor sea el ángulo entre la normal a la superficie y la dirección hacia el punto de observación B. Ella posee el mayor valor en el radio que coincide con la normal ($\varphi = 0$) y se reduce a cero para $\varphi = \pi/2$ (fig. 8.21).

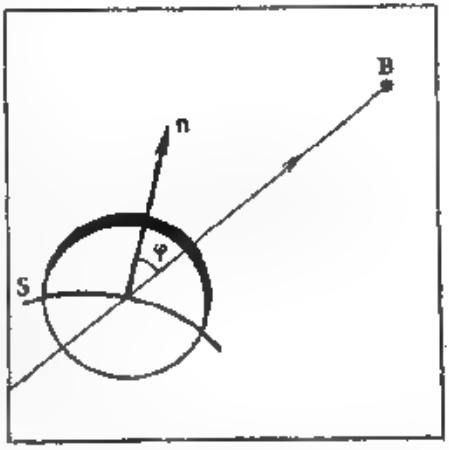


Fig. 8.21. Dibujo que ilustra la amplitud de las ondas secundarias en dependencia del ángulo φ.

En segundo lugar, es necesario señalar que en todos los razonamientos anteriores nosotros hemos tratado de determinar la amplitud de la onda resultante, sin tocar el problema acerca de su fase. En la mayoría de los casos, el problema acerca de la fase no tiene ninguna importancia, ya que a nosotros nos interesa la intensidad de la onda resultante, la cual es proporcional *al cuadrado de la amplitud*. Si se realizan también los cálculos de la fase resultante, entonces de éstos se desprende que ella difiere $\pi/2$ de la fase observable. Esto es fácil de ver, por ejemplo, de la fig. 8.10. La dirección de la tangente a la curva en el punto inicial O elegido como origen de referencia da en el punto de observación la fase de la oscilación creada por la acción del elemento central de la primera zona, es decir, el valor de la fase condicionado por la propagación de la luz por la recta LB (véase fig. 8.2). Justamente este es el valor de la fase que corresponde a la

realidad. Nuestro gráfico muestra que el vector resultante ON está virado 90°, es decir, la fase resultante se retrasa en $\pi/2$. De esta manera, el postulado de Fresnel, al dar correctamente las amplitudes de las fuentes auxiliares, no permite determinar bien las fases de sus oscilaciones. Para obtener un resultato correcto también para la fase nosotros deberíamos cambiar el postulado de Fresnel en esta parte y atribuir a las fuentes auxiliares fases aumentadas en $\pi/2$.

Por último, la formulación de Fresnel no elimina la dificultad del principio de Huygens en su forma original que consiste en que de éste se deduce la presencia de dos ondas, una que parte de la fuente hacia adelante y la otra, construida del mismo modo, como la envolvente de las ondas elementales, pero dirigida contrariamente, hacia la fuente.

La negación de la presencia de una onda contraria se encierra hasta cierto grado en la suposición de Fresnel acerca de la variación de la amplitud de las ondas secundarias en función del ángulo φ entre la normal a la superficie auxiliar y la dirección hacia el punto de observación. De acuerdo con esta suposición, la amplitud disminuye con el aumento del ángulo φ y se hace igual a cero, cuando la magnitud absoluta de φ se igual o mayor que 90°. Esta suposición se aclara por la fig. 8.21, en donde la disminución de la amplitud está representada por la disminución del espesor de la curva. Debido a que para $\varphi > 90°$ la amplitud de la emisión de las fuentes auxiliares se reduce a cero, la onda contraria es imposible. Sin embargo, como ya se indicó, la consideración respecto a la distribución de las amplitudes es una hipótesis adicional del principio de Fresnel. Se puede hacer comprensible la ausencia de la onda contraria por medio de los siguientes razonamientos. En efecto, desde cada punto de la superficie S la perturbación se propaga hacia adelante y hacia atrás. Pero *delante* de la superficie S todavía no hay ninguna perturbación, y la acción se reduce a la formación de la perturbacion que nosotros realmente observamos. *Por detrás* de S la perturbación ya ha llegado, y la acción de S se reduce a compensar esta perturbación ya llegada. Como resultado de ambas acciones, directa y contraria, la perturbación pasa a través de S y se propaga hacia adelante en la dirección de B.

La propagación del impulso por una serie de bolas en contacto puede servir de analogía que esclarece este razonamiento. La bola, contra la cual choca por un lado otra bola, se deforma, y después, al tratar de corregirse, ella misma se convierte en fuente de un impulso dirigido tanto *hacia adelante* como *hacia atrás*.

Pero el impulso hacia atrás se gasta en detener la bola que choca desde atrás, y el impulso hacia adelante mueve la bola delantera en la dirección del impulso inicial. Así resulta que el impulso se propaga de una bola a otra hacia un solo lado, es decir, hacia adelante.

En el § 33 nosotros ya hemos hecho mención de que el postulado de Fresnel que sirve para caracterizar las ondas secundarias, cuya interferencia explica todos los procesos de propagación de ondas, constituía cierta hipótesis o conjetura de Fresnel. La realización de los cálculos según el método de Fresnel y su comparación con el experimento muestran que es necesario variar algo esta hipótesis: introducir un factor complementario que considere la inclinación de la superficie auxiliar respecto a la dirección de la acción, fundamentar con razonamientos adicionales la ausencia de la onda contraria y variar la fase inicial de las ondas secundarias en $\frac{1}{2}\pi$. Si los dos primeros complementos se desprenden de razonamientos más o menos evidentes, en cambio el adelanto de la fase que considera a veces como algo enigmáticos, según se expresó Rayleigh en su «Teoría ondulatoria de la luz». Por supuesto, por cuanto el postulado de Fresnel no es otra cosa que una receta que da un método general de resolución de los problemas de la óptica ondulatoria, entonces es evidente que la modificación de este postulado no representa nada especial, solamente un análisis más minucioso muestra que para la resolución de los problemas ondulatorios es necesario utilizar una receta algo diferente que asegure una mejor concordancia con el experimento.

En esencia, con los trabajos de Fresnel fue fundamentada sólidamente la óptica ondulatoria, fueron aclarados a rasgos generales todas las dificultades más esenciales relacionadas con los fenómenos de difracción, y se comprendió el significado de la longitud de la onda luminosa para todos estos fenómenos.

Posteriormente (1882), Kirchhoff mostró que el principio de Huygens—Fresnel puede ser obtenido de las ecuaciones diferenciales de la óptica (de las ecuaciones ondulatorias), adonde todas las correcciones señaladas por nosotros se incluyen automáticamente.

En la teoría de Kirchhoff, el factor que define la variación de la amplitud como función del ángulo φ se calcula a base de las posiciones generales de la teoría, y este factor resulta ser igual a $(1 + \cos\varphi)/2\lambda$, es decir, se reduce a cero sólo para $\varphi = 180°$, y no para $\varphi = 90°$, como suponía Fresnel. El hecho de que Fresnel obtuvo un resultado correcto a pesar de ser su suposición incorrecta, se explica por la inexactitud de su método de cálculo. Sin embargo, tampoco la teoría de Kirchhoff está libre de ciertas suposiciones matemáticas y físicas. En particular, tampoco en el método de Kirchhoff se presta atención a la influencia de la sustancia de la pantalla en el campo luminoso en las cercanías de esta última, lo que, como ya hemos mencionado, no corresponde a la realidad, aunque conduce solamente a errores insignificantes en aquellos casos, cuando las dimensiones de los orificios son grandes en comparación con la longitud de onda. No obstante, a pesar de esta limitación, el método de Fresnel—Kirchhoff tiene un gran significado para un

círculo grande de problemas, siendo un procedimiento efectivo para la resolución de éstos.

Una solución rigurosa de los problemas de difracción como problemas acerca de la propagación de ondas electromagnéticas en las cercanías de impedimentos se ha logrado obtener solamente para unos cuantos casos (4—5). Así, por ejemplo, Sommerfeld (1894) resolvió el problema acerca de la difracción en el borde de una pantalla recta idealmente conductora. La divergencia entre los resultados a base de la teoría de Sommerfeld y las mediciones exactas, al parecer, se puede relacionar con la imposibilidad de realizar exactamente en la práctica las condiciones de la teoría (no se puede hacer una pantalla real idealmente conductora e infinitamente delgada, y sus bordes no pueden ser idealmente agudos, como se supone en la investigación teórica). La confrontación de esta y de algunos otros casos, examinados según un método análogo al de Sommerfeld, muestra que la interpretación aproximada a base del principio de Huygens—Fresnel y del método de Young da una aproximación lo suficientemente buena para ángulos no muy grandes de difracción. De acuerdo con esto nosotros en adelante utilizaremos ampliamente el método de Fresnel, recordando, por supuesto, las limitaciones señaladas.

Históricamente la primera interpretación ondulatoria de la difracción fue dada por Thomas Young (1800), el cual partió de concepciones que anteriormente se diferencian bastante de las de Fresnel. Además de la ley de propagación del frente de onda en la dirección de los rayos, que se deduce de la construcción de la envolvente de las ondas secundarias de Huygens, Young introdujo el principio de la transmisión o difusión de la amplitud de las oscilaciones a lo largo del frente ondulatorio (transversalmente a los rayos). La velocidad de esta transmisión, según Young, es proporcional a la longitud de onda y crece con el aumento de la diferencia de las amplitudes en los puntos vecinos del frente ondulatorio. Además de esto, la difusión de la amplitud está acompañada de la variación de la fase de la oscilación. De esta manera, a medida que se propaga el frente ondulatorio tiene lugar una nivelación o una disipación de la distribución heterogénea de la amplitud en el frente ondulatorio. Las franjas que se observan cuando hay difracción en la pantalla con orificios (véanse figs. 9.13, 9.14 y 9.18) aparecen, según Young, como resultado del desfasaje entre las oscilaciones en la onda incidente y las oscilaciones que difunden hacia un punto dado desde las regiones adyacentes del frente ondulatorio. En la región de la sombra geométrica la onda incidente está ausente, se observa un efecto puro de difusión y las franjas no pueden aparecer, lo que concuerda con las observaciones.

Debido a que Young evitaba utilizar el análisis de magnitudes infinitamente pequeñas, la forma escogida por él de exposición de la

ley de difusión transversal de la amplitud (en su esencia, diferencial) ofrecía dificultades para su comprensión y aplicación práctica. Al parecer, por esta razón las concepciones de Joung desde los tiempos de Fresnel se consideraban erradas. El desarrollo posterior de la teoría mostró, sin embargo, que los resultados obtenidos con ayuda del método de Fresnel llevan después de transformaciones matemáticas a una forma que responde a las ideas de Joung*).

La interpretación de Joung de los fenómenos de difracción es particularmente fructífera en aquellos casos, cuando de antemano no se conoce la distribución de las amplitudes de las fuentes secundarias de Huygens—Fresnel en las superficies límites. Esto se refiere, por ejemplo, a la propagación de la onda a lo largo de una superficie absorbente o al contorneo de un impedimento convexo por la onda. Así es, en particular, el planteamiento del problema en la investigación de la propagación de ondas radioeléctricas sobre la superficie de la Tierra. Este problema de gran importancia práctica ha sido examinado detalladamente con ayuda del método de Joung (M. A. Leontóvich, V. A. Fok), que se denomina en la literatura moderna *teoría de difusión en la difracción*. El método de Joung se utiliza ampliamente en la investigación de la propagación de ondas en medios no homogéneos, en la óptica no lineal y en otras ramas.

9. DIFRACCION DE HACES PARALELOS (DIFRACCION DE FRAUNHOFER)

§ 39. Difracción de Fraunhofer por una rendija

Hasta el momento nosotros hemos observado la difracción de ondas esféricas o planas estudiando el cuadro de difracción en el punto de observación situado a una distancia finita del impedimento. Precisamente este círculo de problemas fue investigado por Fresnel, y por eso los fenómenos de difracción de este tipo comúnmente son llamados *difracción de Fresnel*.

Fraunhofer (1821—1822) estudió un tipo algo diferente de fenómenos. En el experimento de Fraunhofer el anteojo se enfocaba hacia una fuente lejana de luz (por ejemplo, hacia una rendija iluminada) y su imagen se observaba en las cercanías del plano focal del anteojo a través del ocular.

Delante del objetivo del anteojo se colocaba una pantalla con orificios, que en mayor o menor grado tapaban el objetivo. Resulta-

*) Más detalladamente sobre el método de Thomas Joung véase: *G. D. Malíujkinets*, Diccionario físico enciclopédico, «Enciclopedia soviética», 1960, t. I, pág. 606.

ha, que la forma de la imagen del objeto observado depende de las dimensiones y de la forma de estos orificios. Solamente cuando está abierta una parte suficiente del objetivo, la imagen tiene una forma que reproduce exactamente la forma del objeto. Cuando disminuye la parte efectiva del objetivo el cuadro observable en mayor o menor grado se distorsiona y puede incluso diferenciarse completamente de la forma de la fuente.

Así, por ejemplo, al ser observado un lejano hilo luminoso a través del objetivo tapado por una pantalla con una rendija angosta, en el plano focal del objetivo se ve una franja brillante derrubiada con unos cuantos máximos y mínimos.

De esta manera, la imagen dada por el objetivo es siempre un cuadro de difracción que aparece como consecuencia de la limitación de la sección del haz luminoso.

Esta limitación es realizada con ayuda del llamado diafragma de apertura del objetivo (véase § 88), cuyo papel en el caso más simple lo juega la montura de alguna lente del objetivo o un diafragma especial. Cuando la parte efectiva del objetivo es considerable (un ancho diafragma de apertura) el cuadro de difracción observable reproduce bien la forma del objeto; para dimensiones pequeñas de ella la imagen puede diferenciarse fuertemente (hasta lo irreconocible) del objeto.

Debido a que la observación según el método descrito se efectúa en un plano conjugado del de la fuente, es decir en el mismo lugar, en donde la luz es recogida por la lente del anteojo, el cuadro de difracción adquiere mucho más brillo, lo que facilita la observación. El tipo de difracción, en el cual se observa un cuadro de difracción formado por haces paralelos, recibió el nombre de *difracción de Fraunhofer*.

A pesar de que en principio la difracción de Fraunhofer no se diferencia de la difracción de Fresnel estudiada anteriormente, sin embargo una observación detallada de este caso es de importancia esencial. El análisis matemático de muchos ejemplos principales de la difracción de Fraunhofer no es dificultoso y permite examinar hasta el final el problema planteado. Desde el punto de vista práctico este caso es muy importante, ya que encuentra aplicación en el análisis de muchos problemas relacionados con el funcionamiento de los aparatos ópticos (red de difracción, instrumentos ópticos, etc.).

Las condiciones próximas a las de Fraunhofer pueden ser realizadas, al colocar una fuente pequeña de luz en el foco de la lente y al recoger la luz con ayuda de una segunda lente en algún punto de la pantalla dispuesta en su plano focal. Este punto sirve de imagen de la fuente. Colocando entre las lentes pantallas con orificios de diferente magnitud y forma, nosotros cambiamos el carácter del cuadro de difracción, el cual representa la imagen de la fuente; en dependencia de las dimensiones y de la forma de los orificios una parte de la

luz irá por unas u otras direcciones y se recogerá en diferentes puntos de la pantalla receptora. Como resultado la imagen tendrá la forma de una mancha, cuya iluminación cambiará de un lugar a otro. Resolver un problema de difracción significa determinar esta distribución de la iluminación en la pantalla en dependencia de las dimensiones y de la forma de los impedimentos que provocan la difracción de la luz. Nosotros nos limitaremos a analizar los casos más simples y al mismo tiempo más importantes, cuando el orificio en las pantallas no transparentes tiene forma de un rectángulo o de un círculo.

Un mayor significado ofrece el caso, cuando el orificio rectangular es de un ancho insignificante y una longitud infinita, es decir representa una rendija. Por supuesto, prácticamente es suficiente que su longitud sea considerablemente mayor que su ancho. Así, por ejemplo, para un ancho de 0,01—0,02 mm la longitud de la rendija en unos milímetros puede considerarse infinita. En este caso la imagen del punto se alargará formando una pequeña franja con máximos y mínimos en la dirección perpendicular a la rendija, ya que la luz experimenta difracción a la derecha y a la izquierda de la rendija. Con el giro de la rendija alrededor del eje del anteojo todo el cuadro también girará. Si en calidad de fuente se toma un hilo luminoso paralelo a la rendija, entonces los diferentes puntos del hilo serán fuentes no coherentes entre sí y el cuadro general será la simple superposición de los cuadros provenientes de las fuentes puntuales. Nosotros observaremos la imagen del hilo estirada en la dirección perpendicular a la dirección de la rendija, es decir de nuevo podemos limitarnos al análisis del cuadro en una dimensión.

Sea que la onda incide *normalmente* sobre el plano de la rendija. Dividamos el área de la rendija en una serie de pequeñas franjas estrechas paralelas de igual ancho. Cada una de estas pequeñas franjas puede considerarse como fuente de ondas de fases iguales, ya que en el caso de incidencia normal el plano de la rendija coincide con el frente de onda; además, las amplitudes de nuestras ondas elementales también serán iguales, debido a que los elementos escogidos poseen iguales áreas y están igualmente inclinados con respecto a la dirección de observación.

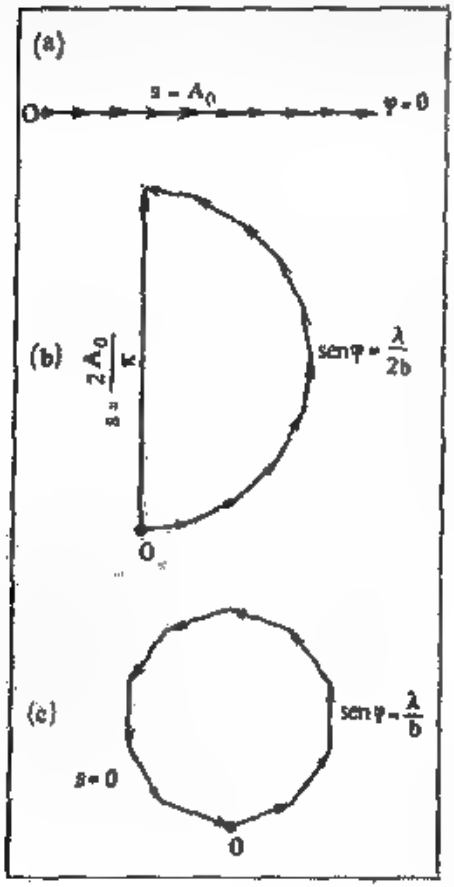
Estas dos circunstancias, la igualdad de las fases*) y la igualdad de las amplitudes, simplifican extraordinariamente tanto la resolución gráfica, como analítica del problema estudiado.

El resultado de la sumación de las amplitudes para cualquier punto de la pantalla puede ser representado gráficamente con los diagramas vectoriales de la fig. 9.1.

El diagrama de la fig. 9.1, *a* corresponde a la coincidencia de la dirección de observación y de la dirección inicial de la onda ($\varphi = 0$),

*) En el caso de incidencia oblicua, las fases en los diferentes puntos de la superficie de la rendija no serían iguales, sino que cambiarían según una simple ley. En este caso el cálculo no ofrece mucha dificultad.

cuando las ondas elementales no adquieren ninguna diferencia de fase. La amplitud resultante $s = A_0$. El diagrama de la fig. 9.1, *b* corresponde a la dirección, en la cual los elementos extremos del frente de onda en los límites de la rendija dan una diferencia de fase igual a π, es decir una diferencia de recorrido igual a $\lambda/2$. De la fig. 9.2 se ve que esta dirección responde a la condición $ED = b \operatorname{sen} \varphi = 1/2\lambda$, donde *b* es el ancho de la rendija *FE*. La amplitud resultante se expresa con el vector $s = 2A_0/\pi$, debido a que *S* es igual al diámetro de la semicircunferencia, cuya longitud es igual a A_0. El diagrama de la fig. 9.1, *c* corresponde a una diferencia de recorrido de los rayos de los elementos extremos de frente de onda, igual a λ, es decir corresponde a la dirección definida por la condición $b \operatorname{sen} \varphi = \lambda$. La amplitud resultante es igual a cero, es decir no habrá luz en la dirección señalada. No es difícil ver que la amplitud nula responde también a la dirección, en la cual la diferencia de recorrido de los elementos extremos será igual a 2λ; el siguiente mini-



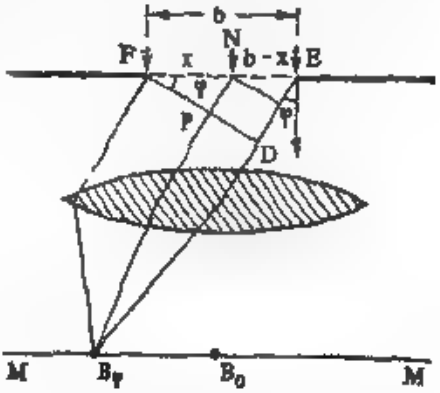


Fig. 9.2. Difracción por una rendija. *Ilustración para el cálculo analítico de la amplitud resultante.*

Fig. 9.1. Difracción por una rendija. *Cálculo gráfico de la amplitud resultante para diferentes direcciones.*

mo corresponde a una diferencia de recorrido de 3λ, y así sucesivamente, es decir los mínimos responden a las direcciones

$$\operatorname{sen}\varphi = \lambda/b,\ 2\lambda/b,\ \ldots,\ n\lambda/b,$$

donde n es un número entero.

Para calcular analíticamente la intensidad de la luz que se propaga detrás de la rendija en diferentes direcciones escribamos la expresión para la onda enviada por cada elemento del frente de onda y sumemos la acción de todos los elementos. La amplitud de la onda originada por uno de estos elementos es proporcional a su ancho dx, es decir es igual a $C\,dx$. El multiplicando C se determina de la condición de que en la dirección $\varphi = 0$ la amplitud de la onda enviada por toda la rendija es igual a A_0, es decir $Cb = A_0$ o bien $C = A_0/b$. De esta manera, la perturbación luminosa en el sector correspondiente de la rendija se expresa por la relación

$$ds = \frac{A_0}{b}\,dx\cos\omega t.$$

Para hallar la acción de toda la rendija en la dirección determinada por el ángulo φ con la dirección inicial, es necesario tomar en consideración la diferencia de fases, que caracteriza las ondas que llegan desde diferentes elementos del frente luminoso hasta el punto de observación B_φ (véase *fig.* 9.2).

Tracemos el plano FD perpendicular a la dirección de las normales a las ondas difractadas. La distribución de las fases que tendrá lugar en este plano define la interrelación de las fases de las ondas elementales que se reunen en el punto B_φ, ya que la lente no introduce ninguna diferencia adicional de fases (tautocronismo, véase § 20). De esta manera, es suficiente determinar la diferencia de recorrido, que aparece en el camino desde el plano FE hasta el plano FD. De la fig. 9.2 se ve, que la diferencia de recorrido entre las ondas que van desde la zona elemental con el punto F (borde de la rendija) y desde algún punto N (dispuesto a una distancia x del borde de la rendija) es $NP = x\operatorname{sen}\varphi$. La perturbación luminosa en el punto P del plano FD se escribe de la siguiente manera:

$$ds = \frac{A_0}{b}\,dx\cos(\omega t - kx\operatorname{sen}\varphi), \tag{39.1}$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda. La perturbación resultante en el punto B_φ se determinará como la suma de estas expresiones, es decir se expresará con el integral por todo el ancho de la rendija (por todos los valores de x desde cero hasta b). De esta manera,

$$s = \int ds = \int_0^b \frac{A_0}{b}\cos(\omega t - kx\operatorname{sen}\varphi)\,dx =$$

$$= A_0\,\frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}bk\operatorname{sen}\varphi)}{\frac{1}{2}bk\operatorname{sen}\varphi}\cos(\omega t - \tfrac{1}{2}kb\operatorname{sen}\varphi). \tag{39.2}$$

Por lo tanto, la onda resultante que va en la *dirección* φ posee una amplitud

$$A_\varphi = A_0 \frac{\operatorname{sen}(1/2 bk \operatorname{sen}\varphi)}{1/2 bk \operatorname{sen}\varphi} = A_0 \frac{\operatorname{sen}[(b\pi/\lambda)\operatorname{sen}\varphi]}{(b\pi/\lambda)\operatorname{sen}\varphi}, \quad (39.3)$$

ya que $k = 2\pi/\lambda$. En muchos casos prácticos, en particular en la observación con anteojo, el ángulo φ es tan pequeño, que se puede poner $\operatorname{sen}\varphi \approx \varphi$, y entonces obtendremos

$$A_\varphi = \frac{A_0 \operatorname{sen}(b\pi\varphi/\lambda)}{b\pi\varphi/\lambda}. \quad (39.3')$$

La expresión (39.3') muestra que a lo largo de la pantalla (al cambiar φ) la iluminación varía, pasando a través de máximos y mínimos.

Investiguemos la expresión (39.3). A_φ se reduce a cero para los ángulos φ que satisfacen la condición $(b\pi/\lambda)\operatorname{sen}\varphi = n\pi$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$ (números enteros), es decir para

$$\operatorname{sen}\varphi = n\lambda/b. \quad (39.4)$$

La condición (39.4) define las direcciones hacia los puntos de la pantalla (y correspondientemente sus posiciones), en los cuales la amplitud es igual a cero y, por consiguiente, la intensidad es mínima. Ella coincide con la condición deducida anteriormente por el método gráfico.

Para determinados valores intermedios del ángulo φ la amplitud alcanza los valores máximos y mínimos. El mayor máximo tiene lugar cuando

$$\frac{b\pi}{\lambda}\operatorname{sen}\varphi = 0, \quad \text{es decir,} \quad \varphi = 0; \quad \text{entonces} \quad A_\varphi = A_0.$$

Los siguientes máximos que ceden considerablemente por su magnitud absoluta ante el principal responden a los valores de φ que son determinados de las condiciones

$$\frac{b\pi}{\lambda}\operatorname{sen}\varphi = 1{,}43\pi, \quad \frac{b\pi}{\lambda}\operatorname{sen}\varphi = 2{,}46\pi, \quad \frac{b\pi}{\lambda}\operatorname{sen}\varphi = 3{,}47\pi,$$

$$\frac{b\pi}{\lambda}\operatorname{sen}\varphi = 4{,}47\pi, \text{ etc.} \quad (39.5)$$

(véase ejercicio 68). En la fig. 9.3 se muestra la curva de distribución de la intensidad (la curva continua)

$$I_\varphi = I_0 \frac{\operatorname{sen}^2[(b\pi/\lambda)\operatorname{sen}\varphi]}{[(b\pi/\lambda)\operatorname{sen}\varphi]^2}, \quad (39.6)$$

donde $I_0 = A_0^2$ es la intensidad de la luz que va desde la rendija de ancho b en la dirección del haz inicial.

Como se ve de la fig. 9.3, la magnitud de los máximos secundarios disminuye rápidamente. Los valores numéricos de las intensidades

del máximo principal y de los siguientes se relacionan entre sí como

$$1 : 0{,}045 : 0{,}016, \text{ etc.};$$

aproximadamente estas relaciones se pueden expresar de la forma

$$1 : \frac{4}{9\pi^2} : \frac{4}{25\pi^2} : \ldots$$

De las fórmulas establecidas en el presente parágrafo está claro que la posición de los mínimos y máximos depende de la longitud de onda λ. Por eso el cuadro de difracción posee la forma descrita sólo para una luz completamente monocromática. En el caso de luz blanca nosotros disponemos de un conjunto de cuadros correspondientes para diferentes colores (desplazados uno con respecto a otro según la diferencia en λ).

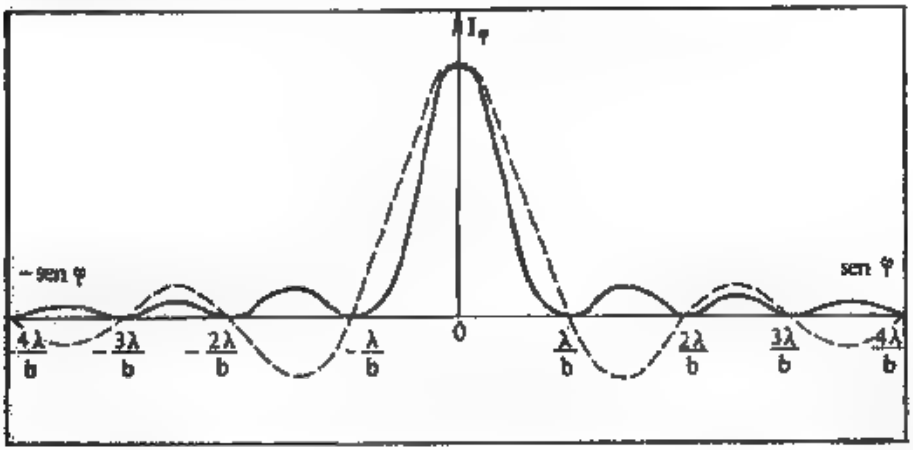


Fig. 9.3. Variación de la intensidad (línea continua) y de la amplitud (línea punteada) en función de la dirección en el caso de difracción por una rendija.

El máximo central ($\varphi = 0$) será, por supuesto, común para todas las longitudes de onda, por lo cual el centro del cuadro de difracción tendrá la forma de una pequeña franja blanca que se transforma en una orladura coloreada. Los máximos secundarios para diferentes longitudes de onda ya no coincidirán entre sí; más cerca al centro se dispondrán los máximos correspondientes a las ondas de menor longitud. Los máximos de las ondas de mayor longitud distarán entre sí más que los de menor longitud. Sin embargo estos máximos son tan imprecisos, que con ayuda de la difracción en una *sola* rendija no se puede alcanzar ninguna división clara de las diferentes longitudes de onda (descomposición espectral). Todos los detalles del cuadro pueden ser aclarados utilizando la fórmula (39.6) o la fig. 9.3.

Durante el análisis del problema acerca de la difracción por una rendija nosotros hemos supuesto que *a todo lo ancho* de la rendija la amplitud y la fase de las ondas secundarias son iguales. En otras palabras, nosotros hemos despreciado la influencia deterioradora de los bordes de la rendija, lo que es admisible, si el ancho b de la rendija es considerablemente mayor que la longitud de onda ($b \gg \lambda$). De esta manera, nosotros nos hemos mantenido dentro de los límites de aplicación del principio de Fresnel—Kirchhoff, y nuestra solución tiene sentido justamente en estas condiciones. Sin embargo, a menudo en la práctica nos vemos obligados a trabajar con difracción por rendijas, cuyo ancho es comparable con la longitud de onda. En particular, las modernas redes de difracción (véase § 45) representan un conjunto de rendijas con un ancho de 1—2 μm, es decir comparable con la longitud de onda. Surge la pregunta, ¿en qué medida es apto en estos casos el método de Fresnel—Kirchhoff? Para el caso límite de una rendija con un ancho pequeño en comparación con la longitud de onda ($b \ll \lambda$), se ha logrado dar una solución rigurosa, sin utilizar la hipótesis de Fresnel—Kirchhoff (Rayleigh, año 1897). En este caso para la amplitud en lugar del factor sen $\frac{b\pi\varphi}{\lambda} \Big/ \frac{b\pi\varphi}{\lambda}$ se obtiene otra expresión (mediante las funciones de Bessel), el gráfico de la cual posee, en general, una forma parecida a la representada en la fig. 9.3, pero con una caída algo más brusca a medida que crece φ y que difiere en el máximo $b\pi^2/4\lambda$ veces del valor dado por la fórmula (39.3). Así por ejemplo, para $b = {}^1/_{10}\lambda$ la amplitud máxima resulta 4 veces menor, que según la teoría de Kirchhoff. Para los casos intermedios, cuando el ancho de la rendija es comparable con la longitud de onda, la solución general, por supuesto, se aproximará mas a la obtenida según la teoría de Kirchhoff. En efecto, el calculo realizado por Morse y Rubinstein (1938) muestra que para rendijas con un ancho próximo y algo mayor que λ la aproximación de Kirchhoff puede considerarse bastante satisfactoria. De esta manera, incluso para las redes modernas más finas de difracción la utilización del método de Kirchhoff no trae consigo errores notables.

§ 46. Influencia del ancho de la rendija en el cuadro de difracción

Como muestra la fórmula (39.4), la distancia de los mínimos desde el centro del cuadro crece con la disminución de b. De esta manera, con la *reducción* del ancho de la rendija la franja brillante central *se ensancha*, apoderándose de una región cada vez más grande de la pantalla.

Si $b = \lambda$, entonces $\varphi_1 = 90°$, es decir el primer mínimo responde a un ángulo de 90°, por consiguiente, él ha sido desplazado al límite infinitamente alejado de la pantalla. La iluminación de esta última cae gradualmente desde el centro hacia los bordes, acercándose asintóticamente a cero; el ancho de la franja brillante central crece ilimitadamente. De esta manera con la disminución de b la iluminación tiende a volverse uniforme en toda la pantalla (fig. 9.4).

Al contrario, con el aumento del ancho de la rendija la posición de los primeros mínimos se acerca cada vez más al centro del cuadro, de manera que el máximo central se torna más ostensible. En este caso, como se deduce de (39.6), la intensidad *relativa* del máximo no varía; pero su magnitud *absoluta* crece, ya que crece la energía que pasa a través de la rendija ampliada. En el caso de una rendija muy ancha (en comparación con λ) nosotros obtendremos en el centro una imagen ostensible de la fuente lineal.

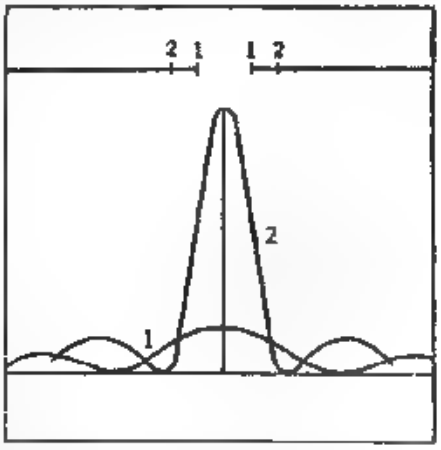


Fig. 9.4. Difracción por una rendija; influencia del ancho de la rendija sobre la distribución de la intensidad.
La curva 1 corresponde a una rendija angosta; la curva 2 a una rendija ancha.

§41. Influencia de las dimensiones de la fuente de luz

En cualquier experimento real la fuente posee dimensiones finitas. Supongamos que la dimensión angular de la fuente es igual a 2α. Esto significa que si nosotros realizamos el experimento con una fuente alejada (una estrella, el Sol), entonces 2α será su dimensión angular observada desde el punto dispuesto en el centro de la rendija S (fig. 9.5, *a*); si se realiza la observación con ayuda de un colimador, entonces 2α será la dimensión angular de la fuente observada desde el centro de la lente L del colimador (fig. 9.5, *b*). Tanto en uno como en el otro caso la fuente puede ser considerada como un conjunto de fuentes no coherentes y prácticamente puntiformes que envían ondas planas cuyos frentes están inclinadas dentro de los límites del ángulo 2α. Estas fuentes darán una serie de iguales cuadros de difracción desplazados uno con respecto a otro dentro *de los límites* del ángulo 2α (para simplificar, consideremos las diferentes fuentes igualmente brillosas).

En la fig. 9.5 son mostradas las posiciones de los máximos principales con respecto a los bordes de la fuente, los cuales se disponen a ambos lados del máximo central a unas distancias angulares de

$\pm\alpha$ desde el punto central C de nuestra fuente. Los puntos intermedios de la fuente dan máximos situados entre A y B. Si la rendija es ancha, de manera que $\varphi = \lambda/b$ es considerablemente menor que α, entonces la imagen de la fuente es casi semejante geométricamente a la fuente y solamente por los bordes estará orlada por franjas débiles de difracción (máximos secundarios). Conforme disminuye el ancho de la rendija, φ aumenta acercándose a α. La imagen de la fuente se vuelve más imprecisa, y el ensanchamiento de difracción constituirá una parte cada vez mayor del ancho geométrico de la

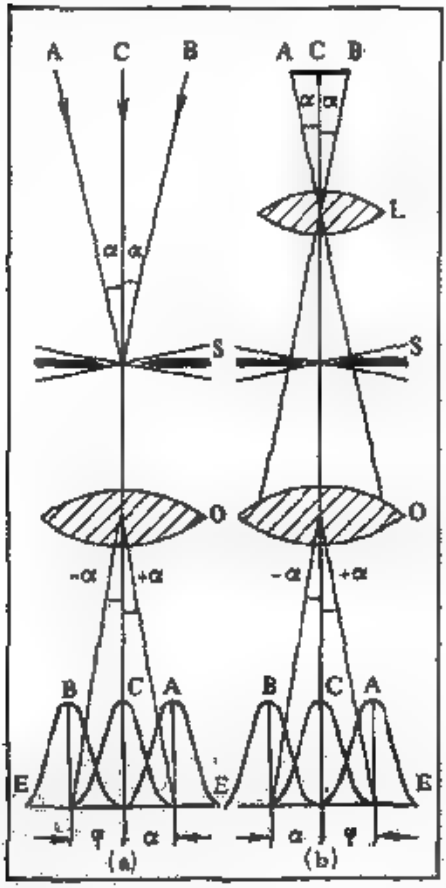


Fig. 9.5. Difracción por una rendija; influencia de las dimensiones de la fuente.

2α es el ancho angular de la fuente; $2\varphi = 2\lambda/b$ el ancho del máximo central de difracción, a: la fuente AB está situada en el infinito; b, la fuente está situada en el plano focal principal de lente colimadora L.

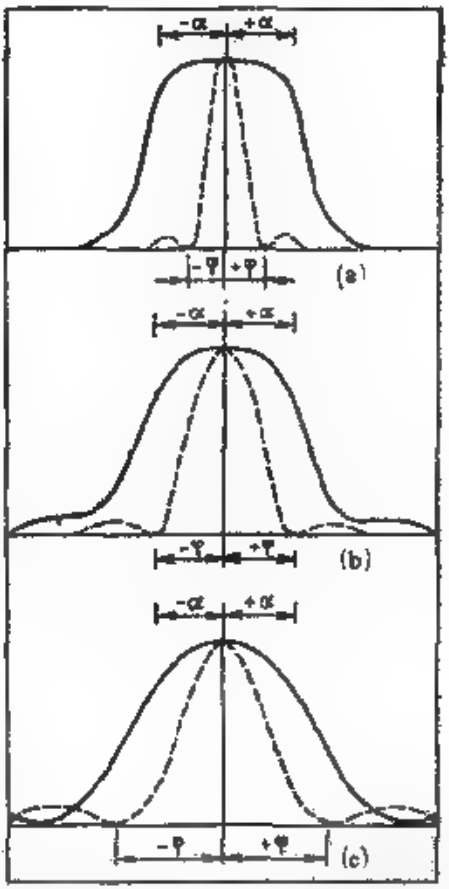


Fig. 9.6. Difracción por una rendija de ancho b para un ancho angular de la fuente de 2α.

La línea continua representa la imagen de la fuente, la línea punteada, la de un punto dispuesto en el centro de la fuente; a, una rendija ancha, $\varphi = \lambda/b > \alpha$, una rendija más angosta, $\varphi = \lambda/b \approx \alpha$; c, una rendija angosta, $\varphi = \lambda/b > \alpha$.

imagen. Para una rendija muy angosta, es decir para un φ considerablemente mayor que α, el ensanchamiento de difracción se tornará mucho mayor que el ancho geométrico de la imagen, de manera que el cuadro observable poco se diferenciará del cuadro creado por una fuente puntual.

Los cuadros de difracción observados en estos casos son mostrados en la fig. 9.6. Para $\varphi \gg \alpha$ la línea punteada, que representa el cuadro de una fuente puntual, coincidirá prácticamente con la línea continua que da el cuadro producido por una fuente con un ancho de 2α.

La influencia de las dimensiones de la fuente de luz sobre el cuadro de difracción puede ser aclarada con ayuda de otro método basado en la concepción acerca de la coherencia espacial parcial de la emisión (véase § 22). Examinemos la coherencia de la luz en el plano de la rendija S (véase fig. 9.5), que es condicionada por la acción de toda la fuente extendida. De acuerdo con lo expuesto en el § 22 la región de coherencia en el plano indicado posee una dimensión $2l_{coh} = \lambda/2\alpha$, donde 2α son las dimensiones angulares de la fuente. Si $2l_{coh} \gg b$, todos los puntos de la rendija serán casi completamente coherentes, y el cuadro en el plano de la pantalla EE coincidirá prácticamente con el cuadro que es observado en la difracción de la luz emitida por una fuente puntual (véase fig. 9.6, *c*). En el caso límite contrario $2l_{coh} \ll b$ resultarán coherentes los puntos de la rendija que estén alejados entre sí a una distancia pequeña en comparación con su ancho b. Por eso el ancho de la imagen se definirá por la difracción de la luz por una rendija que tuviese un ancho de $2l_{coh}$ y, en medida angular, resultará igual a $\lambda/2l_{coh} = 2\alpha$, es decir coincidirá con las dimensiones angulares de la fuente (véase fig. 9.6, *a*). De esta manera, la aplicación del concepto de coherencia espacial parcial de la luz nos lleva a las deducciones ya obtenidas, lo que desde luego, era evidente de antemano.

§ 42. Difracción por orificios circulares y rectangulares

Si la rendija tiene una longitud limitada l, es decir representa un rectángulo con lados b y l, entonces, evidentemente, se observará un cuadro de difracción también en la dirección de la longitud de la rendija. El aspecto general que se obtiene en este caso está representado en la fig. 9.7, *a*. La forma del orificio es mostrada por el pequeño rectángulo blanco en la esquina derecha de la fotografía; como fuente de luz sirve un pequeño orificio vivamente iluminado (fuente puntual) dispuesto en el foco de una lente grande. De acuerdo con lo expuesto en el § 40, el cuadro de difracción es más ancho en la dirección que corresponde al lado más corto del rectángulo. En el caso de un agujero cuadrado el cuadro será simétrico en ambas direcciones.

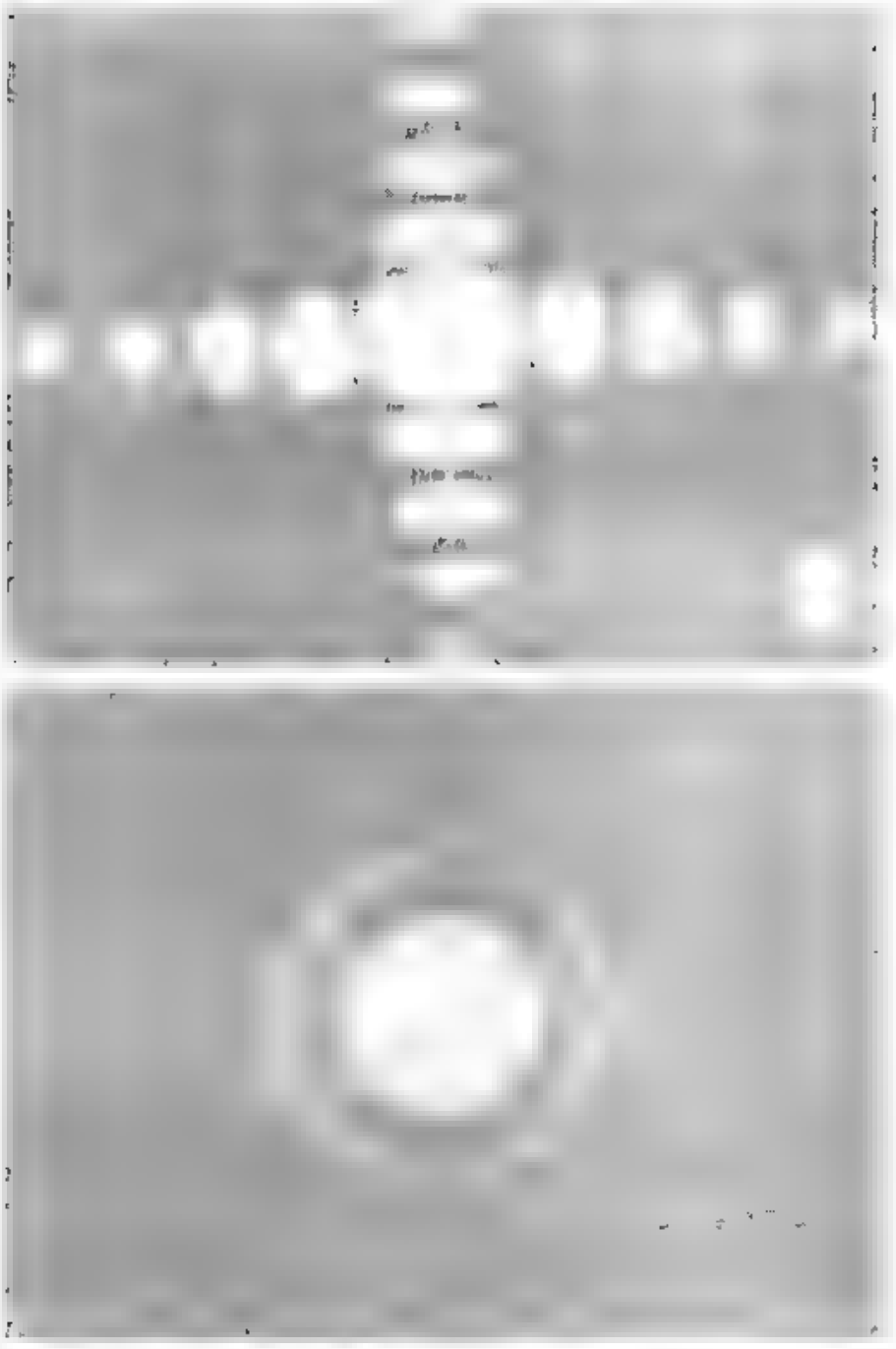


***Fig. 9.7.** Cuadro de difracción por un orificio rectangular (a), y por uno circular (b).*

Los lados del rectángulo se relacionan entre sí como 4 : 5.

Para la resolución gráfica de este problema el frente ondulatorio se divide en elementos en forma de pequeños rectángulos que se obtienen al dividir la superficie del agujero por una serie de líneas paralelas a ambos lados del rectángulo. La dirección del rayo difractado se determina de la siguiente manera. A través de la dirección de propagación inicial del rayo tracemos dos planos paralelos a los lados a y b del rectángulo. Entonces la dirección del rayo difractado se caracterizará por los ángulos ψ y φ entre sus proyecciones sobre los planos indicados y la dirección de propagación inicial. Las direcciones que satisfacen las condiciones $a \operatorname{sen} \psi = n\lambda$ o bien $b \operatorname{sen} \varphi = m\lambda$, donde m y n son números enteros, responden, evidentemente, a los mínimos de intensidad, es decir a las franjas negras en la fotografía. El estudio analítico del problema acerca de un orificio rectangular no ofrece dificultades y puede ser realizado según el esquema del § 39.

Los resultados de los cálculos de la intensidad se expresan por la fórmula

$$I_{\varphi, \psi} = I_0 \frac{\operatorname{sen}^2(\pi b \operatorname{sen} \varphi/\lambda)}{(\pi b \operatorname{sen} \varphi/\lambda)^2} \frac{\operatorname{sen}^2(\pi a \operatorname{sen} \psi/\lambda)}{(\pi a \operatorname{sen} \psi/\lambda)^2}, \tag{42.1}$$

donde I_0 es la intensidad de la luz que va por la dirección inicial $\varphi = 0, \psi = 0$. Debido a que generalmente φ y ψ no son grandes, se puede poner $\operatorname{sen} \varphi = \varphi$ y $\operatorname{sen} \psi = \psi$ y entonces obtendremos

$$I_{\varphi, \psi} = I_0 \frac{\operatorname{sen}^2(\pi b \varphi/\lambda)}{(\pi b \varphi/\lambda)^2} \frac{\operatorname{sen}^2(\pi a \psi/\lambda)}{(\pi a \psi/\lambda)^2}. \tag{42.2}$$

El caso de un orificio circular ofrece mayores dificultades para los cálculos. En la resolución gráfica del problema, al dividir el orificio circular en pequeñas franjas con ayuda de líneas paralelas, notaremos que las pequeñas franjas extremas juegan un menor papel que en el caso de un orificio rectangular, donde la longitud de éstas es la misma que la de la pequeña franja central. Por eso a diferencia del caso del rectángulo el diagrama será formado por vectores de diferente longitud.

De acuerdo con esto, los resultados numéricos de los cálculos de la amplitud también resultarán un tanto diferentes*). El aspecto general de la distribución de intensidad en el cuadro de difracción es similar al caso de un orificio rectangular, pero los máximos y los mínimos se sitúan en el plano focal del objetivo, por supuesto, en forma de anillos concéntricos (véase fig. 9.7, *b*), y el radio angular de los anillos oscuros se determina *aproximadamente* por la relación

$$\operatorname{sen} \varphi_m = \frac{0{,}61 + (m-1)/2}{R} \lambda,$$

donde R es el radio del orificio y $m = 1, 2, \ldots$. De esta manera, cuanto mayor sea el radio del orificio, tanto menor será el cuadro

*) En estos cálculos el problema se reduce a las funciones de Bessel.

de difracción. Valores más exactos de los radios angulares de los anillos oscuros y brillantes (máximos) se dan en la tabla 9.1.

Tabla 9.1. Radios angulares de los anillos oscuros y brillantes

Mínimos	Máximos	Intensidad
$\operatorname{sen}\varphi_1 = \frac{0{,}61}{R}\lambda$	$\operatorname{sen}\varphi_1' = 0$	1
$\operatorname{sen}\varphi_2 = \frac{1{,}12}{R}\lambda$	$\operatorname{sen}\varphi_1' = \frac{0{,}81}{R}\lambda$	0,0175
$\operatorname{sen}\varphi_3 = \frac{1{,}62}{R}\lambda$	$\operatorname{sen}\varphi_2' = \frac{1{,}33}{R}\lambda$	0,0042
$\operatorname{sen}\varphi_4 = \frac{2{,}12}{R}\lambda$	$\operatorname{sen}\varphi_3' = \frac{1{,}85}{R}\lambda$	0,0016

La última columna muestra la intensidad relativa en los máximos de diferente orden. De aquí se ve, que incluso en el máximo más cercano la intensidad constituye menos del 2% de la intensidad del máximo central.

El caso de difracción por un orificio circular es muy importante desde el punto de vista práctico, ya que todas las monturas de las lentes y objetivos poseen generalmente forma circular, de manera que en el estudio de fenómenos en los instrumentos ópticos siempre tenemos que considerar la difracción por un orificio circular (véase cap. XV).

§ 43. Los haces de Gauss

En los §§ 40—42 y en el cap. VIII la distribución de la iluminación que es resultado de los fenómenos de difracción se calculaba para aquellas condiciones, cuando la amplitud del frente ondulatorio se mantenía constante para todo el orificio que limitaba las dimensiones del frente ondulatorio. En muchos casos esta condición no se cumple. Por ejemplo, se puede obtener una variación de la amplitud a lo largo del frente ondulatorio, si se coloca en el camino de la onda una lámina con un coeficiente variable de transmisión. Se sobreentiende que las propiedades de los fenómenos de difracción (tales, como el orden de la magnitud del ángulo de difracción) se mantendrán invariables. Sin embargo una serie de detalles importantes experimenta cambios esenciales.

Sea que el plano EE (fig. 9.8, *a*) representa la superficie del frente ondulatorio, y la amplitud de las oscilaciones en el punto x', y' se define por la función $a_0(x', y')$. De acuerdo con el postulado de Fresnel, la perturbación en el punto de observación M (x, y, z)

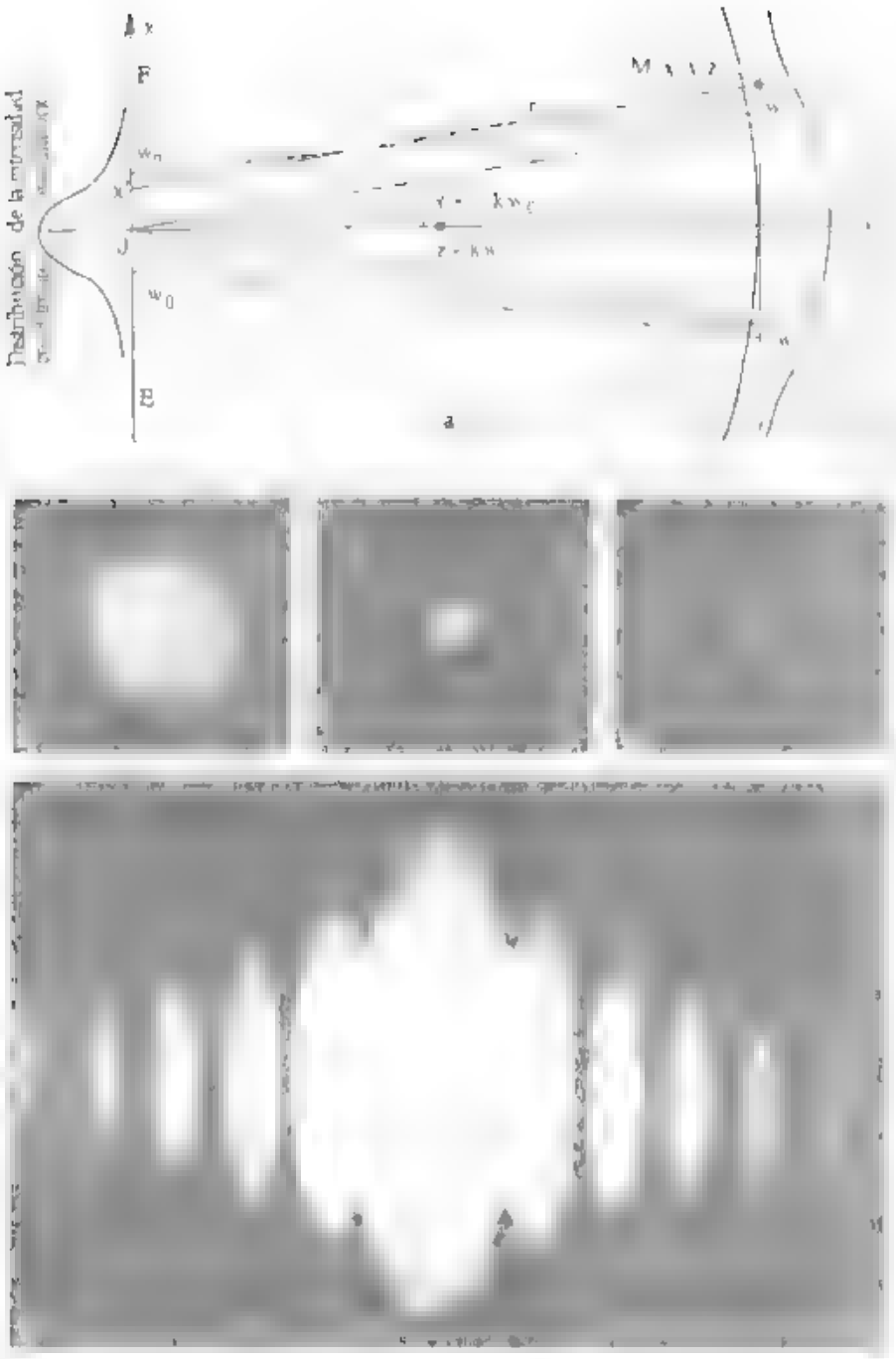


Fig. 9.8. *Ilustración el cálculo de la difracción de una onda con una amplitud de oscilaciones que varía a lo largo del frente ondulatorio (a), fotografías de la sección transversal del haz láser con una distribución gaussiana de la intensidad para diferentes distancias entre el plano de observación y el láser (b, c, d) y fotografía obtenida al limitar el haz láser con una rendija (e).*

con coordenadas x, y, z se expresará como la integral por el frente ondulatorio (véanse § 33 y la fórmula (33.1))

$$s = \int\int \frac{a_0(x', y')}{r} \cos(\omega t - kr)\, dx'\, dy',$$

$$r = \sqrt{z^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2}. \qquad (43.1)$$

donde r es la distancia desde el punto $(x', y', 0)$ hasta el punto $M(x, y, z)$. La expresión subintegral en (43.1) describe la oscilación en el punto M originada por la onda secundaria de Huygens—Fresnel emitida por el elemento $dx'dy'$ del frente ondulatorio en el plano EE. Si $a_0(x', y')$ es diferente de cero en la región $0 \leqslant x' \leqslant b$, $0 \leqslant y' \leqslant l$ y conserva en ella un valor constante, entonces la relación (43.1) describirá, por supuesto, la difracción en un orificio rectangular con lados b, l, lo que ha sido estudiado en el § 42.

Frecuentemente nos enfrentamos con la distribución de la amplitud en el plano del frente ondulatorio, descrita por la función de Gauss, es decir

$$a(x', y') = a_0 \exp\left[-(x'^2 + y'^2)/2w_0^2\right]. \qquad (43.2)$$

La magnitud w_0 determina, evidentemente, la región de variación de x', y', en donde la intensidad de las oscilaciones proporcional a $a^2(x', y')$ disminuye e veces en comparación con el valor máximo a_0^2 que se alcanza para $x' = 0$, $y' = 0$. De esta manera, la magnitud w_0 caracteriza las dimensiones de la región, en la cual está concentrada la energía de la onda en el plano EE, y en adelante la llamaremos *anchura de la distribución de intensidad*. Los fenómenos de difracción en el caso de una variación de la amplitud según la ley (43.2) poseen una serie de formidables particularidades que permiten de una manera relativamente simple analizar muchos problemas de difracción. En la realidad distribuciones de las amplitudes del tipo (43.2) aparecen en la emisión de ondas electromagnéticas por fuentes láser.

Examinemos primero los fenómenos de la difracción de Fraunhofer. En este caso el multiplicando $1/r$ en (43.1) se puede considerar constante e igual a $1/z$ y sacar de debajo del signo de la integral poniendo $r \approx z$. La magnitud r en el argumento del coseno puede ser sustituida por la expresión aproximada

$$r \approx r_0 - (xx' + yy')/r; \quad z \gg w_0^2/\lambda,$$

donde $r_0 = OM$. Entonces la integración en (43.1) dará como resultado

$$s = 2\pi \frac{a_0 w_0^2}{z} \exp\left\{-\frac{(kw_0)^2}{2z^2}(x^2 + y^2)\right\} \cos(\omega t - kr_0). \qquad (43.3)$$

La relación (43.3) expresa que la onda refractada es una onda esférica (la fase es constante en la superficie $r_0 = \text{const}$), y la distribución de la amplitud por el frente ondulatorio posee simetría axial y tam-

bién se define por la función de Gauss

$$\exp\left[-(x^2+y^2)/2w^2\right], \tag{43.4}$$

con la particularidad de que su anchura w resulta ser igual a

$$w = \frac{z}{kw_0} = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{2w_0}z$$

o bien en medida angular

$$\varphi \approx \frac{w}{z} = \frac{1}{kw_0} = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{2w_0}. \tag{43.5}$$

De esta manera, la parte principal de la energía de la onda refractada está concentrada en el intervalo de los ángulos que es definido por la relación entre la longitud de onda λ y la anchura de distribución w_0 en el plano EE. Por consiguiente, la ley fundamental de los fenómenos de difracción de Fraunhofer, expuesta en los §§ 41, 42 a base de la difracción por una rendija y por un orificio rectangular, se cumple también en el caso dado. Confrontando cuantitativamente la relación (43.5) con su análogo en el caso de difracción en un orificio cuadrado

$$\varphi = {}^1/_2\lambda/b$$

el ancho de la rendija b se debe contraponer con $2w_0$, es decir la anchura angular del máximo de difracción en el caso de distribución gaussiana de amplitudes resulta ser $\pi/2$ veces menor, que en el caso de una distribución rectangular.

El cuadro de difracción, descrito por la fórmula (43.4), se caracteriza por la disminución monótona de la intensidad al aumentar el ángulo de difracción desde su valor nulo, es decir por la ausencia de oscilaciones y de líneas de intensidad nula (de la circunferencia en el caso de un orificio circular y de líneas rectas en el caso de un orificio cuadrado) y también por la caída rápida de la intensidad en las «alas». Todas estas cualidades son muy útiles en los instrumentos ópticos, y a veces se introduce especialmente una debilitación artificial de la onda (llamada *apodización*) en los sectores periféricos del plano EE.

Una particularidad interesante del caso examinado consiste en que la distribución gaussiana de la amplitud tiene lugar no sólo en el plano EE ($z = 0$) y en la zona de Fraunhofer ($z \gg w_0^2/\lambda$), sino también para todas las distancias intermedias entre EE y el punto de observación M. Los cálculos muestran que para cualquier z se cumple la relación (véase ejercicio 72)

$$s = \frac{2\pi}{k}a_0\frac{w_0^2}{\sqrt{w_0^4+(z/k)^2}}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{2w^2}\right]\cos\left[\omega t - k\left(z+\frac{x^2+y^2}{2R}\right)-\alpha\right], \tag{43.6}$$

$$w^2 = w_0^2 + (z/kw_0)^2, \qquad R = z + (kw_0^2)^2/z, \qquad \operatorname{tg}\alpha = kw_0^2/z.$$

Evidentemente, la magnitud w es la anchura de la distribución gaussiana de la intensidad del campo a una distancia z de la pantalla EE. De acuerdo con la relación (43.6) el cuadrado de la anchura de la distribución a la distancia z es igual a la suma del cuadrado de la anchura inicial (w^2) y del cuadrado de la anchura z/kw_0 calculada según la fórmula para la difracción de Fraunhofer (compare con (43.5)). Para $z \to \infty$ (prácticamente para $z \gg kw_0^2 = 2\pi w_0^2/\lambda$) la magnitud w tiende al valor z/kw_0 que es característico para la difracción de Fraunhofer. Para pequeños z (es decir $z \ll kw_0^2$) la anchura w se reduce a w_0. La variación de la anchura de la distribución de la intensidad cuando nos alejamos de la pantalla EE se muestra en la fig. 9.8, *a*, donde las líneas punteadas (hipérbolas) ilustran el aumento de la anchura y su aproximación asintótica al valor de Fraunhofer z/kw_0 (líneas a punto y rayas); la distancia $z = kw_0^2 = 2\pi w_0^2/\lambda$ convencionalmente puede ser tomada como frontera entre las regiones de los cuadros de difracción de Fresnel y de Fraunhofer. Para $z = kw_0^2$ la anchura w se diferencia de w_0 en $\sqrt{2}$ veces.

La fase de la onda definida por la correlación (43.6) conserva un valor constante en la superficie que se describe por la ecuación

$$z + (x^2 + y^2)/2R = \text{const}.$$

Para valores pequeños de $x^2 + y^2$ esta ecuación da una esfera, y la magnitud R, por consiguiente, desempeña el papel de radio de curvatura del frente ondulatorio esférico. Si $z \gg kw_0^2$, entonces $R \approx z$, lo que corresponde a la difracción de Fraunhofer. Si $z \ll kw_0^2$ (difracción de Fresnel), entonces $R \approx (kw_0^2)^2/z$ y para $z \to 0$ el frente de onda se vuelve plano. El valor mínimo del radio de curvatura $R_{min} = 2kw_0^2$ se alcanza para $z = kw_0^2$, es decir, en la frontera entre las regiones de los cuadros de Fresnel y de Fraunhofer.

Fijemos la distancia z y de acuerdo con las reglas expuestas en los §§ 33 y 34 construyamos las zonas de Fresnel en el plano EE. El radio de la m-ésima zona de Fresnel se da por la expresión

$$r_m = \sqrt{2\pi zm/k} = \sqrt{\lambda zm}, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Si ponemos aquí $z = kw_0^2$, entonces para esta distancia

$$r_m = \sqrt{\pi m}\sqrt{2}w_0,$$

es decir la primera zona de Fresnel tiene un radio $\sqrt{\pi}$ veces mayor que la anchura de la distribución de amplitud en el plano EE, que es igual a $\sqrt{2}w_0$. Para un alejamiento aún mayor del plano EE la región de concentración del campo también tendrá dimensiones considerablemente menores que el radio de la primera zona de Fresnel. La relación indicada entre r_1 y w_0 es justamente la característica

fundamental de la difracción de Fraunhofer. Al contrario, el acercamiento del punto *a* al plano $\Delta\Sigma$ trae consigo la disminución de los radios de la zona de Fresnel de determinado orden *m*, es decir para $a < ka_1^2$ en la anchura $\sqrt{2}\,w_m$ de la distribución de amplitud caben muchas zonas de Fresnel (aproximadamente $ka_1^2/\pi a$), y la propagación de la onda a la derecha del plano $\Delta\Sigma$ puede ser estudiada según el método de Fresnel (véase § 33).

Al igual que en el caso extremo de la difracción de Fraunhofer, en la región de los pequeños valores de *s* que responden a la difracción de Fresnel, en el caso de una distribución gaussiana de amplitudes no se observan las oscilaciones de intensidad, características para la difracción por orificios que cortan del frente ondulatorio un sector con amplitudes aproximadamente iguales (véanse §§ 36 y 37). Por supuesto, esta diferencia está relacionada con el carácter gradual de la disminución de la amplitud del campo a medida que aumenta la distancia del punto *O*, y no con la ley concreta (gaussiana) de esta disminución, que fue utilizada en los cálculos. En efecto, examinemos el caso de muy pequeños *s*, cuando el radio del orificio en la pantalla es considerablemente mayor que el radio de la primera zona de Fresnel, y situemos el punto *M* en las cercanías de la frontera de la sombra geométrica. Evidentemente, se puede entonces calcular la perturbación en el punto *M* sin tomar en consideración las ondas secundarias procedentes del borde opuesto del orificio, es decir, utilizar los resultados del análisis de la difracción por una pantalla con borde rectilíneo (véanse §§ 36 y 37). Las oscilaciones de la intensidad en el cuadro de difracción representado en la fig. 8.20 aparecían como resultado de que a medida que se alejaban los puntos de observación del borde de la pantalla consecutivamente se incluían zonas pares e impares (más exactamente mucencas) de Fresnel, las ondas procedentes de ellas se diferenciaban según su fase en la magnitud $(m-1)\pi$ de la fase de la primera zona de Fresnel, es decir las zonas pares producían una disminución de la iluminación en el punto de observación, y las impares, su aumento (mínimos y máximos en la fig. 8.20). Aquí es esencial que las amplitudes de las ondas procedentes de las zonas consecutivas, aunque varían con el aumento del número *m*, lo hacen muy lentamente. Pero si la pantalla con orificio está ausente y el campo en el plano $\Delta\Sigma$ (véase fig. 8.5, a) varía a lo largo del eje *Ox*, entonces el desplazamiento del punto *M*, por ejemplo, hacia el eje *Os*, va acompañado no sólo por la llegada hacia él de una onda procedente de la nueva zona de Fresnel, sino también por el aumento de las amplitudes de las ondas procedentes de las zonas de Fresnel de menores números y sobre todo de la primera zona de Fresnel dispuesta al frente del punto *M*. Como resultado la acción del segundo factor resulta ser más fuerte que la del primero, y la iluminación en el punto *M* varía monótonamente.

De esta manera, la aparición de las franjas de difracción en las

cercanías de la frontera de la sombra geométrica es característica sólo en el caso de una limitación de la sección del frente ondulatorio ocasionada por una pantalla no transparente con orificio. En el caso de una disminución paulatina de amplitud de las oscilaciones, lo que es equivalente a cierta limitación efectiva del frente ondulatorio, los fenómenos de difracción llevan sólo a un ensanchamiento de la sección transversal del haz, y no se observará ninguna alternación de regiones con mayores y menores iluminaciones. Esto se ve muy bien en las fotografías (fig. 9.8, *b*, *c*, *d*) obtenidas con ayuda de rayos láser a mezcla de helio y neón cuando se realiza un desplazamiento consecutivo del plano de observación. La fotografía de la fig. 9.8, *a* ha sido obtenida después de haber limitado el haz en el plano EE con la rendija hecha por hojas de afeitar, como resultado de lo cual aparecieron las franjas características de difracción (compare con la fig. 9.7, *a*).

El ejemplo del haz gaussiano sirve como una excelente ilustración para la interpretación de difusión a los fenómenos de difracción, expuesta en el § 38. De acuerdo con esta interpretación, la difracción puede considerarse como resultado de la difusión de amplitud del campo a lo largo del frente ondulatorio a medida que éste se propaga en el medio. El cuadro del ensanchamiento difractorio del haz gaussiano representado en la fig. 9.8 copia realmente la distribución espacial de la densidad de las partículas difusoras, si a las posiciones consecutivas del frente ondulatorio se les contraponen los momentos consecutivos de tiempo después del comienzo de la difusión.

La solución exacta del problema de difracción expuesta anteriormente puede ser utilizada para precisar el postulado de Fresnel (véase § 38). Pongamos en la fórmula (43.6) $z = 0$, entonces obtendremos

$$s = \frac{2\pi}{k} a_0 \exp\left[-(x^2 + y^2)/2w_0^2\right] \cos(\omega t - {}^1/_2\pi). \tag{43.7}$$

Al mismo tiempo, para $z = 0$ la perturbación s debe tomar un valor que responda a la onda llegada de la izquierda al plano EE, es decir

$$s = s_0 \exp\left[-(x^2 + y^2)/2w_0^2\right] \cos \omega t. \tag{43.8}$$

Al comparar estas dos últimas expresiones se ve que la amplitud a_0 de las ondas secundarias emitidas por el elemento $dx'dy'$ del plano EE está relacionada con la amplitud s_0 de las oscilaciones luminosas en este plano por la relación

$$a_0 = \frac{k}{2\pi} s_0 = \frac{1}{\lambda} s_0. \tag{43.9}$$

Además, la existencia de un desfasaje igual a $\pi/2$ indica que las oscilaciones en la onda luminosa real y en las ondas secundarias de Fresnel están desfasadas. Por eso en correspondencia con la conclusión obtenida en el § 38 con ayuda del análisis del diagrama vectorial a las fuentes de ondas secundarias es necesario atribuirles una fase

aumentada en $^1/_2\pi$ en comparación con la fase de las oscilaciones luminosas, es decir, introducir el término $^1/_2\pi$ en el argumento del coseno en la expresión (43.1).

En los cálculos del cuadro de difracción en calidad de distribución inicial del campo se utilizó una distribución en el plano EE, donde el frente ondulatorio era plano, y la anchura de la distribución era mínima. Se sobreentiende que como distribución inicial o dada del campo se puede tomar ésta en cualquier plano, y los cálculos de las oscilaciones luminosas en todo el espacio deberán conducir a los resultados precedentes. De lo dicho se desprende una deducción importante: si en algún lugar el frente ondulatorio es esférico y la distribución de la amplitud del campo posee la forma de la curva gaussiana, entonces estas propiedades se conservan en todo el espacio, y varían solamente el radio de curvatura del frente ondulatorio y la

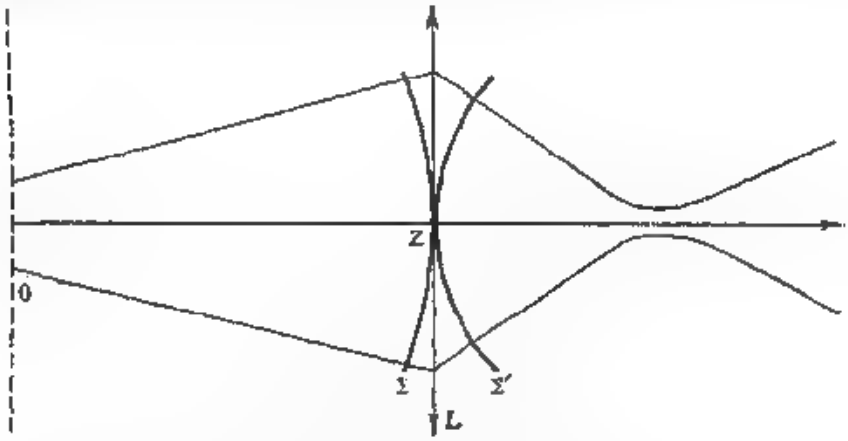


Fig. 9.9. Transformación del haz gaussiano por la lente delgada ideal L. $\sum$ *y* $\sum'$ *son los frentes ondulatorios antes y después de atravesar la lente.*

anchura de la distribución de amplitud. La onda de este tipo se llama *onda gaussiana* o *haz gaussiano*. En particular, el campo en el plano EE considerado anteriormente como inicial puede ser formado realmente a cuenta de una onda gaussiana precedente desde la izquierda hacia EE.

Para aclarar esta consideración examinemos la transformación del haz gaussiano realizada por una lente delgada ideal. Si las dimensiones transversales de la lente son lo suficientemente grandes, de manera que se puede despreciar el efecto de diafragmación del haz gaussiano en ella, entonces la acción de la lente se reduce a la variación de la curvatura del frente ondulatorio en una magnitud igual a $1/f$, donde f es la distancia focal de la lente (fig. 9.9). Sea que la

lente se encuentra en el plano $z = Z$. Entonces, antes de pasar a través de la lente, la fase del haz gaussiano en el plano de la lente será igual a

$$\omega t - k\left[Z + \frac{x^2+y^2}{2R}\right] - \alpha,$$

y después de pasarla

$$\omega t - k\left[Z + \frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{f}\right)\right] - \alpha.$$

En el caso de tal distribución la amplitud no varía. Por lo tanto, después de pasar a través de la lente el haz seguirá siendo gaussiano, pero el radio de curvatura R' de su frente ondulatorio se definirá por la expresión

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} - \frac{1}{f}.$$

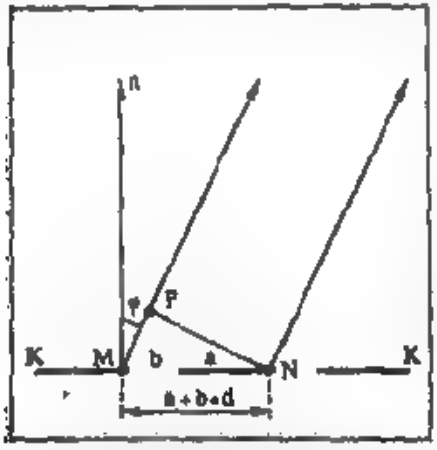


Fig. 9.10. Ilustración para la determinación de la posición de los máximos principales y de los mínimos adicionales en el caso de difracción por dos rendijas paralelas.

Si la distancia focal de la lente es lo suficientemente corta y $f < R$, entonces $R' < 0$, es decir la curvatura del frente ondulatorio después de pasar a través de la lente tendrá el signo contrario a la que tenía antes de ésta, y el haz gaussiano tendrá la forma de una onda convergente (véase fig. 9.9).

§ 44. Difracción por dos rendijas

Examinemos otra vez el fenómeno de difracción por una rendija según el esquema representado en la fig. 9.2. La posición de los máximos y mínimos de difracción no dependerá de la posición de la rendija, ya que la posición de los máximos se define por la *dirección*, en la cual va la mayor parte de la luz que experimentó difracción. Por eso cuando la rendija se desplaza paralelamente a sí misma no debe observarse ninguna variación del cuadro de difracción. Si en un tabique no transparente han sido practicadas dos rendijas idénticas paralelas, entonces ellas darán iguales cuadros de difracción que se sobrepondrán uno sobre el otro, como consecuencia de lo cual los máximos se intensificarán de la manera correspondiente. Sin embargo en la realidad el cuadro resultará más complejo, ya que será necesario tener presente la interferencia mutua de las ondas procedentes de la primera y de la segunda rendijas.

Supongamos que nosotros cortamos en la tabique KK (fig. 9.10) dos rendijas de ancho b separadas por el tramo no transparente a, de manera que $a + b = d$. Es evidente que los mínimos se mantendrán en sus lugares anteriores, ya que las direcciones por las cuales *ninguna* de las rendijas envía luz tampoco la tendrán en el caso de dos rendijas. Sin embargo, además son posibles direcciones, en las cuales las oscilaciones enviadas por ambas rendijas se anulan mutuamente. Evidentemente, éstas serán las direcciones a las cuales les corresponde una diferencia de recorrido de $^1/_2\lambda$, $^3/_2\lambda$, . . . para las ondas procedentes de los puntos *correspondientes* de ambas rendijas. Tales direcciones se definen, como es fácil ver de la fig. 9.10, por la condición

$$MP = MN \operatorname{sen} \varphi = {}^1/_2\lambda,\ {}^3/_2\lambda,\ \ldots,$$

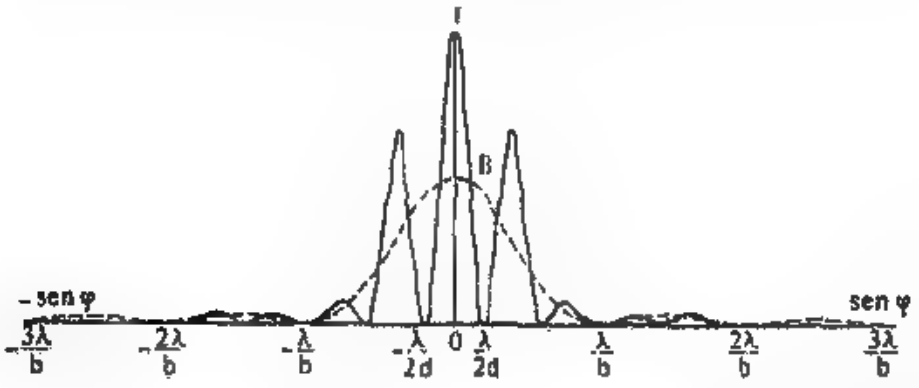


Fig. 9.11. *Distribución de la intensidad en el caso de difracción por dos rendijas paralelas con ancho b, dispuestas a una distancia d.*

La línea punteada se refiere al caso de iluminación de las rendijas por luz no coherente, la línea continua, al caso de una iluminación por la luz coherente. OI = 4OB.

es decir,

$$d \operatorname{sen} \varphi = {}^1/_2\lambda,\ {}^3/_2\lambda,\ {}^5/_2\lambda,\ \ldots \qquad (44.1)$$

Al contrario, en las direcciones definidas por las condiciones

$$d \operatorname{sen} \varphi = \lambda,\ 2\lambda,\ \ldots, \qquad (44.2)$$

la acción de una rendija intensificará la acción de la otra, de manera que a estas direcciones les corresponderán los *máximos principales*. Por lo tanto, el cuadro completo se caracteriza por las condiciones:

mínimos primarios	$b \operatorname{sen} \varphi =$		λ,		2λ,		3λ, . . .;
mínimos adicionales	$d \operatorname{sen} \varphi =$	$^1/_2\lambda$,		$^3/_2\lambda$,		$^5/_2\lambda$,	. . .;
máximos principales	$d \operatorname{sen} \varphi = 0$,		λ,		2λ,		3λ, . . .;

es decir, entre dos máximos principales se dispondrá un mínimo adicional. La distancia entre los mínimos primarios (de una sola rendija) depende del ancho b de la rendija. Si b es mucho menor que d (rendijas estrechas y alejadas), entonces entre dos mínimos primarios puede disponerse un número considerable de nuevos mínimos y máximos.

La curva de la fig. 9.11 muestra la distribución de las intensidades. La curva punteada correspondería a la suma de las intensidades de ambas rendijas, por ejemplo, en el caso si ambas rendijas serían iluminadas por haces luminosos incoherentes entre sí. La curva continua da la distribución real de las intensidades. Los flujos luminosos comunes a través de las rendijas, los cuales se representan por las áreas encerradas entre estas curvas y el eje de las abscisas, por supuesto, deberán mantenerse iguales en ambos casos.

Al aumentar la distancia entre las rendijas los diferentes máximos se tornarán más angostos y frecuentes, pero el área indicada quedará invariable. Debido a que para una rendija el máximo central es mucho más intenso que los laterales, entonces en el caso de dos rendijas iguales casi toda la luz también estará concentrada en la región del máximo central, es decir en los límites definidos por la condición $\operatorname{sen} \varphi = \pm\lambda/b$ (véase fig. 9.11). De esta manera, la anchura angular del cuadro principal de difracciones es igual a $2\lambda/b$.

§ 45. Interferómetro de Rayleigh. Medición del diámetro angular de las estrellas

La difracción por dos rendijas que facilita la transición al estudio de la red de difracción también tiene un interés particular debido a las aplicaciones que ella obtuvo en las diferentes mediciones físicas.

El conocido experimento de interferencia de Joung que tiene un gran valor histórico (véase § 16) responde al caso de difracción por dos rendijas. Rayleigh utilizó este caso para la construcción de un refractómetro de interferencia (o de difracción), en el cual los dos rayos interferentes se obtienen como resultado de la difracción de una onda plana por dos rendijas. El esquema del dispositivo de Rayleigh está representado en la fig. 9.12. La rendija S intensamente iluminada sirve de fuente de luz dispuesta en el plano focal del objetivo L_1. El objetivo es tapado por la pantalla AB con dos rendijas, tras la cual se colocan los tubos R_1 y R_2 del refractómetro. En el plano focal del segundo objetivo L_2 se obtiene el cuadro de difracción el cual se observado con una lupa potente. Al cambiar el índice de refracción de la sustancia en uno de los tubos el cuadro se desplaza.

El inconveniente principal del aparato consiste en que para la distancia considerable entre las rendijas en la pantalla AB, que es

necesaria para la instalación de los dos tubos R_1 y R_2, el cuadro de difracción se obtiene en forma de franjas dispuestas muy estrechamente, la observación de las cuales exige un gran aumento y dispositivos especiales para la medición exacta del desplazamiento de las franjas. A pesar de esto, en la ejecución moderna el refractómetro de Rayleigh es un cómodo aparato técnico.

Un interés particular ofrece la aplicación de la difracción por dos rendijas para la solución del problema astronómico muy importante acerca de la determinación de la distancia angular de las estrellas dobles o del diámetro angular de las estrellas lejanas. El principio de esta medición fue propuesto ya por Fizeau en el año 1868. Michelson en el año 1890 indicó el posible mejoramiento principal del método propuesto, pero sólo en el año 1920 el mismo Michelson logró construir el dispositivo que se proponía y medir los

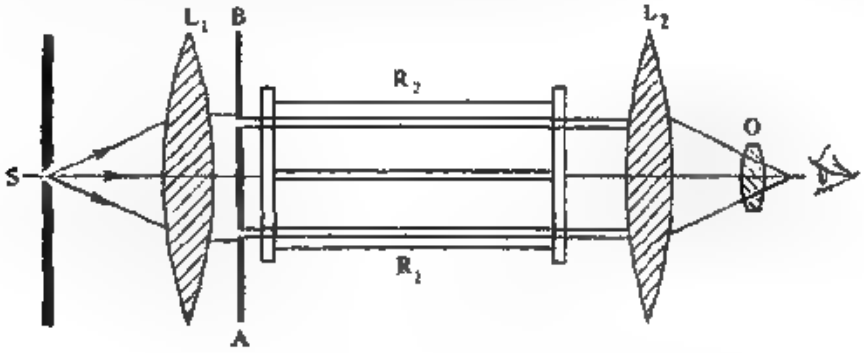


Fig. 9.12. Esquema del interferómetro de Rayleigh.

diámetros de algunas estrellas. La fig. 9.13 aclara la idea de este método.

Sea que la distancia angular entre dos estrellas es igual a una magnitud θ tan pequeña, que en el plano focal del telescopio resulta imposible discernir las imágenes de estas estrellas. Si el objetivo del telescopio está cerrado por una pantalla con dos rendijas con una distancia D entre ellas, entonces de cada estrella se obtendrá un cuadro de difracción en forma de pequeñas franjas brillantes.

El sistema de franjas de cada una de estas dos fuentes está desplazado uno con respecto al otro a una distancia angular θ. La franja central P_0 está desplazada con respecto a la franja más cercana de su sistema P_1 a una distancia angular φ, que se determina de las condiciones $D \operatorname{sen} \varphi = \lambda$ o bien $\varphi = \lambda/D$. Variando la distancia D entre las rendijas, se puede cambiar el ángulo φ. Es fácil ver, que

cuando $\varphi = 2\theta$, es decir cuando los máximos de un sistema de franjas interferenciales coinciden con los mínimos del otro, la visibilidad de estas franjas es la peor; las franjas desaparecen. Con la subsiguiente variación de la distancia la visibilidad mejora de nuevo. De esta manera la medición se reduce a la determinación de la distancia D_0, a la cual le corresponde el primer empeoramiento de la visibilidad. Para una longitud dada de onda λ la distancia angular buscada $\theta = \lambda/2\ D_0$.

Si en lugar de estas dos fuentes (estrella doble) nosotros disponemos de una fuente con un diámetro angular θ, entonces ella dará el cuadro de interferencia representado en la fig. 9.14, donde ha sido sombreada la franja observable, y con líneas punteadas y continuas han sido trazadas las franjas originadas por los bordes de la

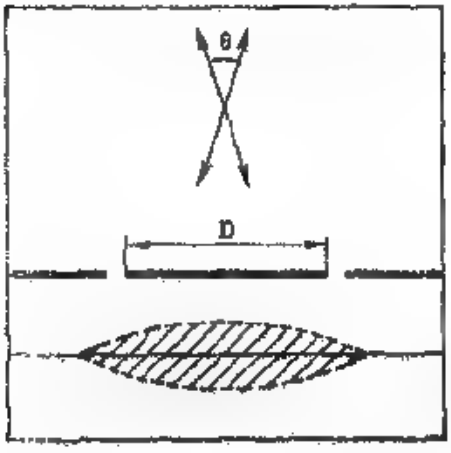
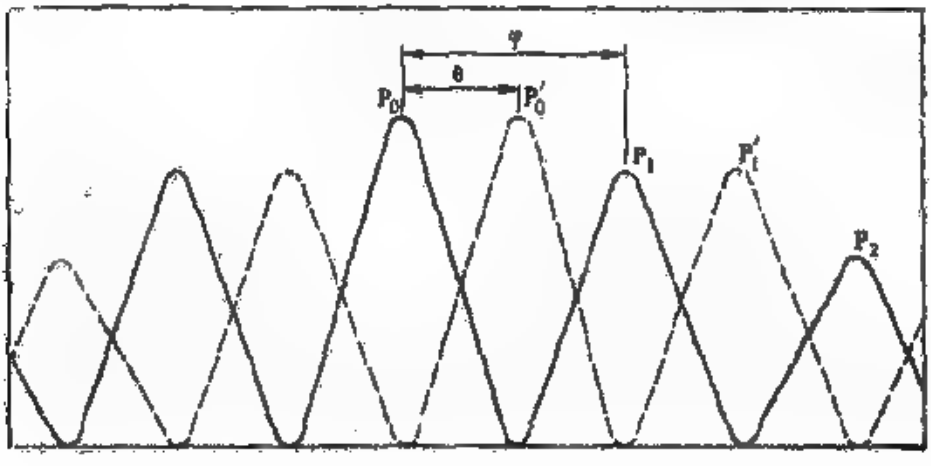


Fig. 9.13. Esquema del método de Fizeau—Michelson para la determinación de la distancia angular entre las estrellas o del diámetro angular de las estrellas.



fuente por separado; la región sombreada da una idea aproximada acerca de la forma de las franjas. Estas últimas tendrán el mismo período, pero su visibilidad disminuirá a medida que aumente la dimensión angular de la fuente. La desaparición de la visibilidad deberá ocurrir a una distancia D, para la cual $\varphi = \theta$, es decir $\theta = \lambda/D$. De esta manera, el método permite determinar también el diámetro angular de la fuente de luz (compárese también con § 41).

La última afirmación se desprende inmediatamente de los cálculos del grado de coherencia espacial, realizados en el § 22. La visibilidad de las franjas de interferencia en el experimento de Young, modificación del cual constituye el método de Michelson, es igual al grado de coherencia de las oscilaciones en el plano de las rendijas dispuestas a una distancia D. De acuerdo con la relación (22.24), el grado de coherencia se reduce a cero, si $\theta = \lambda/D$ (tomamos en consideración el cambio de las designaciones), lo que coincide con la deducción anterior.

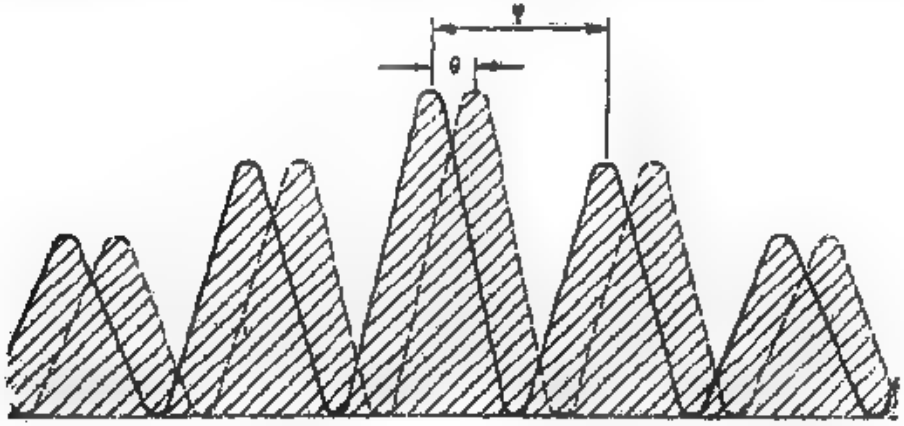


Fig. 9.14. Ilustración al método para determinar el diámetro de las estrellas. Representación esquemática del cuadro de interferencia para la fuente con diámetro angular θ. El ángulo φ = λ/D se define por la distancia entre las rendijas.

Con el método indicado Michelson a principios del año 1920 midió la distancia angular entre las componentes de la estrella doble Capella, que resultó ser igual a 0,042". Con ayuda de este aparato se podía incluso explorar el movimiento orbital de las estrellas una con respecto a otra, ya que en dependencia de la posición de las estrellas las rendijas en el objetivo deberán estar orientadas de la manera correspondiente

En diciembre del año 1920 Michelson midió por primera vez el diámetro de Betelgeuse, estrella perteneciente al tipo de las lla-

madas gigantes. El diámetro *angular* de Betelgeuse resultó igual a 0,047". Conociendo la distancia hasta la estrella (su paralaje estelar no sobrepasa 0,03), se podría calcular el diámetro lineal de Betelgeuse; él resultó ser igual a $3{,}9 \cdot 10^8$ km, es decir, sobrepasa el diámetro de la órbita de la Tierra ($3 \cdot 10^8$ km). Para una comparación hacemos recordar que el diámetro del Sol es igual a $1{,}4 \cdot 10^6$ km. Como se ve de la teoría del método de Michelson, la sensibilidad del método es mayor, cuanto mayor sea la distancia entre las rendijas en el objetivo. El más grande de los reflectores existentes en aquel entonces tenía un diámetro solamente de unos 5 m, y por eso Michelson ideó un método para aumentar la distancia entre los dos haces, cambiando las rendijas por un sistema de espejos $S_1S_3S_4S_2$, cuya función se comprende de la fig. 9.15, *a*.

Es completamente evidente, que la visibilidad de las franjas se

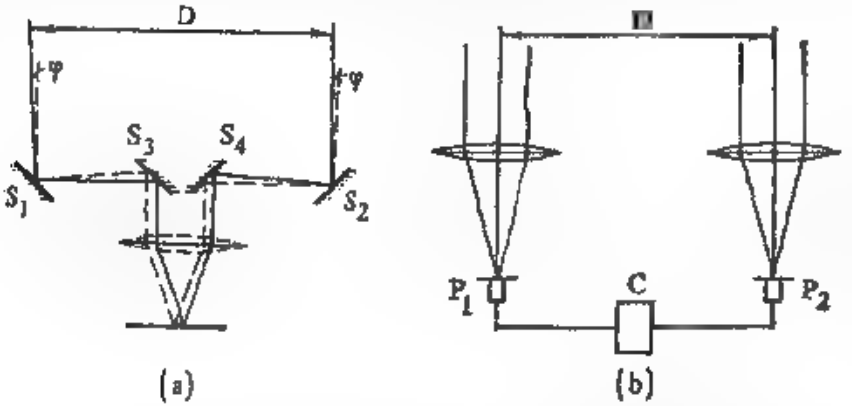


Fig. 9.15. Esquemas de los experimentos para la medición del diámetro de las estrellas, propuestos por Michelson (a) y por Braun y Twiss (b).

define por el grado de coherencia de las oscilaciones en los espejos S_1 y S_2, aunque el período del cuadro de interferencia depende de la distancia entre los espejos S_3 y S_4.

La distancia S_1S_2, que juega el papel de la distancia D en el aparato de Michelson, se podía hacer llegar hasta 6 m. A pesar de la extrema simplicidad de la idea de este aumento de D, su realización técnica es extremadamente difícil, ya que la distancia entre los espejos S_1S_2 debe ser variable, pero cuando se realiza la medición la posición de ellos debe ser estrictamente fija con una exactitud de una longitud de onda. Actualmente ha sido construido un aparato de Michelson, que permite aumentar la distancia hasta 18 m y, por consiguiente, medir los ángulos con una exactitud de milésimas de segundo. El cuadro de interferencia, dado por una estrella solitaria en el aparato de Michelson, está representado en la fig. 9.16.

Las circunstancias indicadas, que dificultan la obtención de un cuadro de interferencia estable, resultan ser no esenciales en el método parecido según su esquema de Braun y Twiss (1958).

La idea del método se aclara por el esquema de la fig. 9.15, *b*. Dos fotomultiplicadores P_1 y P_2 registran la emisión en dos imágenes de una misma estrella, separadas a una distancia D. Las corrientes fotoeléctricas amplificadas son multiplicadas y promediadas en un intervalo grande de tiempo en el mecanismo C (correlador). Debido a que las corrientes fotoeléctricas son proporcionales a las intensidades, la magnitud medida, designada por G_{12}, caracteriza el grado de correlación de las fluctuaciones de la intensidad en las dos imágenes de la estrella (compárese § 22). Un análisis más detallado muestra que $G_{12} \propto 1 + \gamma_{12}^2$, es decir la magnitud G_{12}, así como el grado de coherencia γ_{12}, depende de la combinación $D\theta/\lambda$ y disminuye con el aumento de la distancia D. De esta manera, las mediciones de G_{12} para diferentes distancias D entre las imágenes de la estrella permiten determinar sus dimensiones angulares θ.

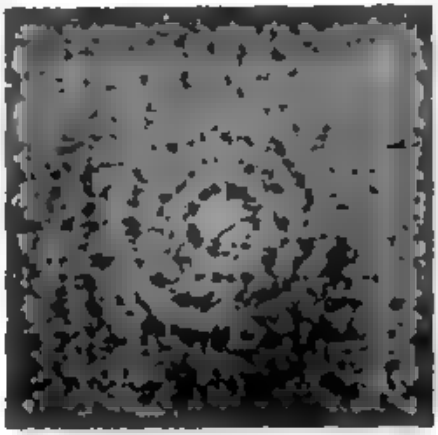


Fig. 9.16. Imagen de una estrella solitaria en el aparato de Michelson.

Las líneas negras paralelas representan el resultado de la interferencia de los haces luminosos reflejados en dos espejos [illegible] en el objetivo del telescopio que ha sido tapado por la pantalla D (véase fig. 9.15). Para un correspondiente desplazamiento de los espejos G_1 y G_2 las franjas de interferencia desaparecen y se queda la imagen de difracción de la estrella.

Un rasgo importante del método de Braun y Twiss representa la sensibilidad considerablemente menor de las mediciones a las inexactitudes no grandes en el desplazamiento de los receptores de luz, así como a la inestabilidad de la atmósfera, en comparación con el método de Michelson. Esta circunstancia permitió crear un aparato, en el cual la distancia D puede llegar hasta 180 m y el cual permite medir diámetros angulares de las estrellas de hasta 0.0005".

El principio de medición de diámetro de las estrellas fue utilizado (Zsigmondy) para la medición también de partículas submicroscópicas, cuya dimensión no permite diferenciarlas inmediatamente en el microscopio. También en este caso el diafragma con dos rendijas, que corta los haces de los rayos que inciden de la partícula observada sobre el objetivo del microscopio, crea en el campo visual un cuadro de difracción, de manera que las partículas se presentan en forma de pequeñas franjas brillantes paralelas a la línea que une

las rendijas y cubiertas por los máximos. Aumentando la distancia entre las rendijas, nosotros logramos la desaparición de los máximos de difracción y de esta manera determinamos el diámetro de la partícula, que es paralelo a la línea D. Girando el diafragma, se puede determinar las dimensiones de la partícula en todas las direcciones.

§ 46. Red de difracción

El análisis de la difracción por dos rendijas muestra que en este caso los máximos de difracción se tornan más estrechos que en el caso de una sola rendija. El aumento del número de rendijas hace aún más claro este fenómeno.

Repitiendo los razonamientos del § 44, hallaremos que entre cada dos máximos principales ($d \operatorname{sen} \varphi = 0,\ \lambda,\ 2\lambda,\ \ldots$) en el caso de tres rendijas se dispondrán *dos* mínimos adicionales ($d \operatorname{sen} \varphi = {}^1/_3\lambda$ y ${}^2/_3\lambda$, ${}^4/_3\lambda$ y ${}^5/_3\lambda$, etc.), en el caso de cuatro rendijas tendremos *tres* mínimos adicionales, etc.

En general para N rendijas de ancho b con intervalos a (el período de la red $d = a + b$) tenemos:

mínimos primarios	$b \operatorname{sen} \varphi =$	λ,	2λ,	. . . ;
máximos principales	$d \operatorname{sen} \varphi = 0$,	λ,	2λ,	. . . ;
mínimos adicionales	$d \operatorname{sen} \varphi = \lambda/N, 2\lambda/N, \ldots, (N-1)\lambda/N, (N+1)\lambda/N, \ldots$			

es decir entre dos máximos principales se disponen $(N - 1)$ mínimos adicionales separados por máximos secundarios.

Lógicamente, con el aumento del número de rendijas crece la intensidad de los máximos principales, ya que aumenta la cantidad de luz, que deja pasar la red. Sin embargo, el cambio más esencial introducido por el número grande de rendijas consiste en la transformación de los imprecisos máximos en los ostensibles *angostos*, prácticamente separados por intervalos oscuros, ya que los máximos secundarios son muy débiles: el más intenso de éstos resulta ser no mayor del 5% del principal (véase ejercicio 75). La nitidez de los máximos garantiza la posibilidad de diferenciar con seguridad longitudes cercanas de onda, para las cuales los máximos principales no se sobreponen uno sobre el otro, lo que ocurre en el caso de máximos imprecisos, que se obtienen en una sola rendija o con un número pequeño de ellas.

El hecho de que a consecuencia de la interferencia de un número grande de rayos se tiene una transición brusca (pequeña variación de la dirección φ) de un máximo a su mínimo adyacente, se explica de un modo evidente por los diagramas de la fig. 9.1. Cuando todos los N rayos, que se suman, se encuentran en una misma fase, obte-

remos un máximo correspondiente a la amplitud $s = Na$ de la oscilación resultante, donde N es el número de rayos interferentes y a, la amplitud de cada uno de ellos. Para la obtención de mínimo (véase fig. 9.1, *c*) es necesario que la fase del último rayo se diferencie de la fase del primero en 2π. Por lo tanto, en presencia de N rayos la diferencia en la fase de dos rayos adyacentes debe ser igual a $2\pi/N$ (y la diferencia de recorrido igual a λ/N), es decir, debe ser tanto menor, cuanto mayor sea N.

De esta manera, entre cada dos máximos principales, que corresponden a una diferencia de recorrido $d \operatorname{sen} \varphi = m\lambda$, donde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, están situados $(N - 1)$ mínimos adicionales definidos por la diferencia de recorrido $d \operatorname{sen} \varphi = m\lambda + p\lambda/N$, donde p toma valores enteros desde 1 hasta $(N - 1)$ (véase también el ejercicio 75). La distancia angular entre un máximo principal y un mínimo adyacente se obtiene del requerimiento de que la diferencia de recorrido crezca en λ/N, es decir, $\Delta(d \operatorname{sen} \varphi) = \lambda/N$, o bien $d \cos \varphi \Delta\varphi = \lambda/N$, de donde $\Delta\varphi = \lambda/Nd \cos \varphi$. Para ángulos no muy grandes de difracción ($\cos \varphi \approx 1$), lo que corresponde generalmente a órdenes no muy altos de difracción (a m no grandes), la nitidez de los máximos principales no depende del orden del espectro y es igual a $\Delta\varphi = \lambda/Nd$. De esta fórmula se deduce que la nitidez de los máximos principales es tanto mayor, cuanto mayor sea también Nd, es decir, cuanto mayor sea la *anchura total* de la red. Para un período d de la red *prefijado* la nitidez de los máximos principales crece ($\Delta\varphi$ disminuye) con el aumento del número N de trazos.

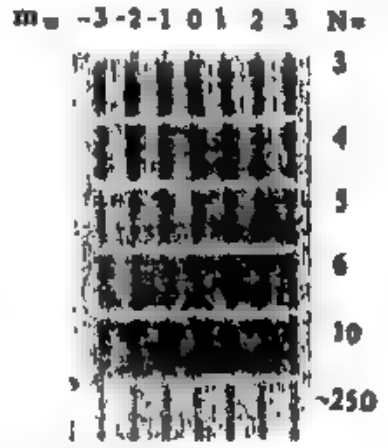


Fig. 9.17. Variación del carácter del espectro de difracción en dependencia del número N de rendijas (negativo).

La fig. 9.17 muestra claramente la disminución del ancho de los máximos principales (aumento de su nitidez) a medida que crece N. En las buenas redes N alcanza el valor de 10^5, gracias a lo cual el espectro, producido por esta red, consta de líneas muy nítidas, si la fuente emite una radiación lo suficientemente monocromática.

La distancia entre los máximos principales para cierta longitud de onda λ se define por el período d de la red, y la distribución de la intensidad entre los diferentes máximos depende de la interrelación entre b y d. En el caso, cuando b y d son conmensurables, algunos máximos principales dejarán de aparecer. Así, para $d = 2b$ todos

los máximos pares desaparecen, intensificándose al mismo tiempo de un modo correspondiente los impares. Para $d = 3b$ desaparece cada tercer máximo y así sucesivamente.

La fórmula general, que refleja la distribución de las amplitudes de las ondas difractadas en dependencia del ángulo φ, es*):

$$A = A_0 \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \frac{\operatorname{sen} N\beta}{\operatorname{sen} \beta}, \tag{46.1}$$

donde $\alpha = (\pi b/\lambda) \operatorname{sen} \varphi$, $\beta = (\pi d/\lambda) \operatorname{sen} \varphi$, N es el número de rendijas y A_0, la amplitud producida por una rendija en la dirección del haz inicial $\varphi = 0$. La fórmula (46.1) se obtiene sin dificultad, si se suman las acciones de cada rendija, tomando en cuenta la diferencia de fase que aparece (véase ejercicio 74). El multiplicando $A_0 \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$ expresa la acción de una rendija y el multiplicando $\operatorname{sen} N\beta/\operatorname{sen} \beta$, la interferencia de las ondas que se propagan a través de las N rendijas. La posición de los máximos principales, determinada de la condición $d \operatorname{sen} \varphi = m\lambda$, responde a los valores máximos del multiplicando $\frac{\operatorname{sen} N\beta}{\operatorname{sen} \beta}$, el cual en este caso se hace igual a N (véase ejercicio 75).

De esta manera, en los máximos principales la amplitud es N veces, y la intensidad, N^2 veces mayor de lo que da en la correspondiente dirección *una sola* rendija. Si se produjera interferencia entre las ondas, que pasan a través de N rendijas iluminadas *incoherentemente*, la intensidad crecería solamente N veces, es decir, sería N veces menor que en el caso de interferencia de los haces coherentes condicionados por la red. Además, en el caso de la red los diferentes máximos principales brillantes están separados por regiones oscuras, y en el caso de N rendijas iluminadas incoherentemente nosotros tendríamos la superposición N veces del cuadro de difracción relativamente ancho de una sola rendija (compárese con la curva punteada de la fig. 9.11, donde $N = 2$). La fórmula (46.1) muestra que la expresión para la distribución de la amplitud contiene el multiplicando $A_0 \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$ que da la distribución condicionada por una rendija. Por lo tanto, en el caso de difracción por una red, así como en el caso de difracción por dos rendijas, casi toda la luz está concentrada en la región del máximo central producido por una rendija. Debido a que el ancho de la rendija b es generalmente muy pequeño, este máximo central con una anchura angular igual a $2\lambda/b$ es bastante amplio, y en su extensión caben varios máximos principales de la red, que corresponden a varios órdenes (fig. 9.18).

---

*) Se supone que a, $b \gg \lambda$, es decir, se observan las condiciones (aplicabilidad del método de Fresnel—Kirchhoff (véase § 39).

En la fig. 9.18 sobre el eje de las abscisas ha sido marcado el ángulo de difracción φ y se ve claramente que los máximos principales no son equidistantes. A veces, por ejemplo, en el análisis teórico, es más cómodo elegir en calidad de variable independiente sen φ. En este caso los máximos principales resultan ser equidistantes. Mostremos los gráficos de las funciones $[(\operatorname{sen} N\beta)/N \operatorname{sen} \beta]^2$ (fig. 9.19, *a*), $[(\operatorname{sen} \alpha)/\alpha]^2$ (fig. 9.19, *b*) y de su producto (fig. 9.19, *c*).

De la fórmula (46.1) no es difícil determinar la distribución de la intensidad según los máximos principales. En efecto, hallando de la relación $d \operatorname{sen} \varphi = m\lambda$ el valor de sen φ que corresponde a la dirección hacia el m-ésimo máximo (principal), sustituimos esta magnitud

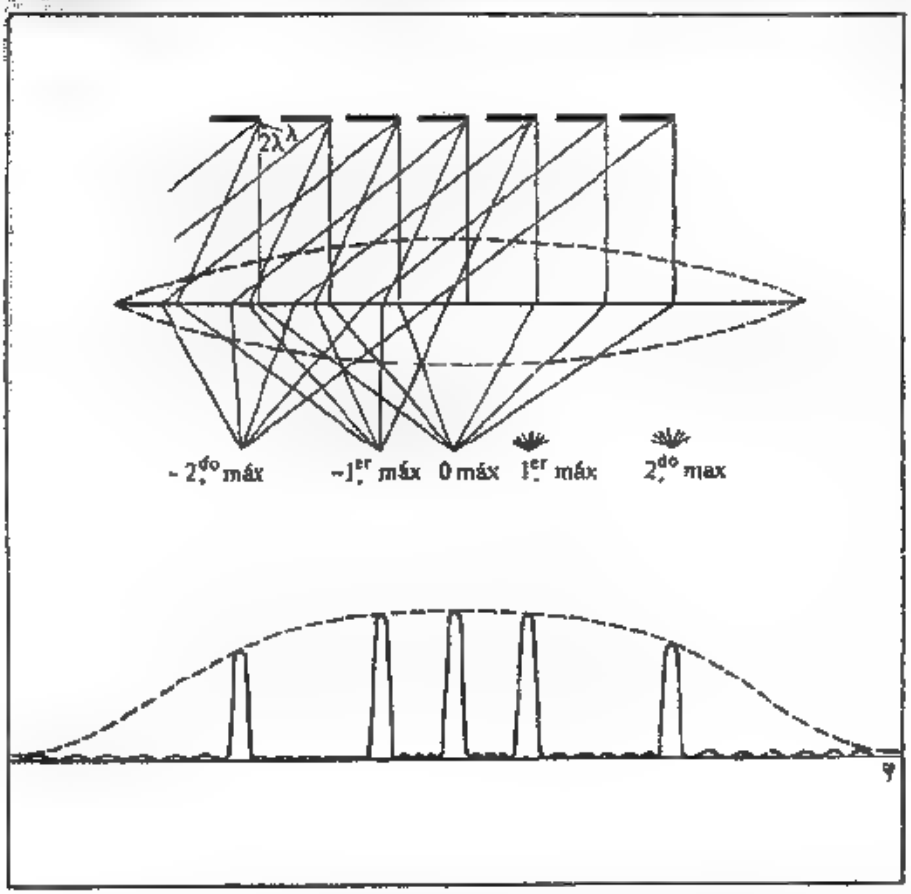


Fig. 9.18. Teoría de la red de difracción. Posición de los máximos principales y distribución de la energía según los diferentes órdenes en la red de rendijas.

La línea punteada refleja el comportamiento del multiplicando $f(\alpha)$ que expresa la distribución originada por la difracción por una sola rendija. Si $b \gg \lambda$, entonces $f(\alpha) = \operatorname{sen} \alpha/\alpha$. En caso contrario $f(\alpha)$ resulta ser una función algo diferente (véase el final del § 58). Para un número N grande de rendijas las alturas de los máximos principales son considerablemente mayores, que lo que indica la curva punteada.

en la fórmula (46.1) y elevamos al cuadrado, entonces

$$I_m \approx A^2 = \frac{A_1^2 N^2 d^2 \operatorname{sen}^2 (\pi b m/d)}{\pi^2 m^2 b^2} = \frac{A_1^2 N^2 d^2}{\pi^2 m^2 b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi b m}{d}, \qquad (46.2)$$

en donde $b < d$. Para b y d conmensurables la magnitud sen $(\pi bm/d)$ se hace igual a cero para ciertos valores de m. Desaparecen los espectros de los correspondientes órdenes.

Abajo se citan los datos acerca de la distribución de la intensidad según los máximos de diferentes órdenes para diferentes relaciones entre b y d, en donde la intensidad de orden cero ha sido tomado como 100.

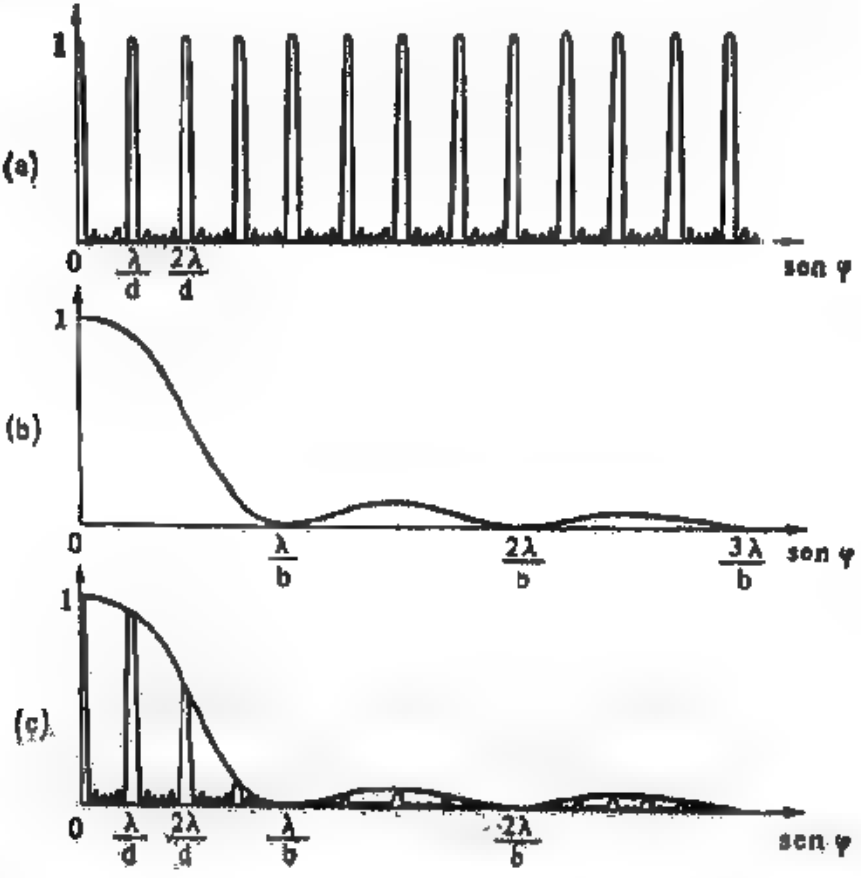


Fig. 9.19. Ilustración a la teoría de la red de difracción.
a es el gráfico de la función [(sen Nβ)/N sen β]² que describe la interferencia de la luz por N rendijas, β = (πd/λ) sen φ; b, el gráfico de la función f²(α) = [(sen α)/α]², α = (πb/λ) sen φ; c, el producto de los gráficos a y b.

	orden cero	primer orden	segundo orden	tercer orden	cuarto orden
$d = 2b$	100	40	0	4,5	0
$d = 3b$	100	67,5	17	0	4,3

La posición de los máximos principales se puede determinar con ayuda de un análisis sencillo de los fenómenos en la red de difracción análogo a como se hizo para una sola rendija (véase § 39). La condición para la posición de los máximos principales $d \operatorname{sen} \varphi = m\lambda$, donde $m = 0, 1, 2, \ldots$, se puede deducir de la fig. 9.18.

Sin embargo, este análisis elemental no da la información necesaria acerca de la distribución de la energía en el cuadro de difracción, en particular, deja sin resolver la importante cuestión acerca del papel del número de rendijas de la red. Pero, para ciertos problemas este análisis resulta ser suficiente. Así, por ejemplo, de la condición $d \operatorname{sen} \varphi = m\lambda$ se deduce que los espectros de orden mayor que d/λ no pueden existir (acerca del sentido físico de este problema véase el ejercicio 77).

El análisis de la acción de la red de difracción muestra que para un número grande de rendijas la luz que pasa a través de esta red se concentra en sectores bien contorneados de la pantalla. La posición de los máximos en estos sectores, definida por la fórmula $d \operatorname{sen} \varphi = m\lambda$, depende de la longitud de onda λ. En otras palabras, la red de difracción constituye un aparato espectral.

Cuanto menor sea la longitud de onda λ, tanto menor será el valor del ángulo φ, al cual le corresponde la posición del máximo. De esta manera, la luz blanca se extenderá en el espectro de tal modo que su borde interno estará teñido de color violeta, y el externo, de rojo (fig. 9.20). El valor $m = 0$ define el máximo en la dirección $\varphi = 0$ para todos los valores de λ. Por lo tanto, en esta dirección (dirección del haz inicial) se reunirá la emisión de todas las longitudes de onda, es decir, el espectro de orden cero representa una imagen blanca de la fuente.

Los espectros de primer, segundo y demás órdenes se disponen simétricamente a ambos lados del de orden cero. La distancia entre las correspondientes líneas de los espectros crece a medida que aumenta el orden de los espectros. En dependencia de la homogeneidad espectral de la luz que se analiza, es decir de la diferencia de las longitudes de onda extremas que la componen, los espectros de altos órdenes empiezan a sobreponerse uno sobre el otro. Así, para la luz solar, aun cuando nos limitamos solamente a la parte visible de su emisión, los espectros de segundo y tercer orden se sobreponen parcialmente uno sobre el otro (véase ejercicio 82). Empleando redes

con pequeño período y utilizando los espectros de altos órdenes, nosotros podemos obtener considerables ángulos de difracción y de esta manera medir muy exactamente las longitudes de onda. Las mediciones de Angström (1868) y, particularmente, de Rowland (1888) trajeron consigo la redacción de excelentes atlas del espectro solar, en los cuales las posiciones de las líneas de Fraunhofer de este último han sido medidas con una exactitud de hasta la sexta cifra decimal.

A pesar de la perfección en la construcción de las redes modernas, en ellas a veces se observan unas alteraciones insignificantes del período único y estrictamente expresado en toda la extensión de la red, la existencia del cual supusimos en nuestro análisis. Esto conlleva a que la distribución de la intensidad según los máximos principales se diferencie de aquella, que se expresa por (46.2).

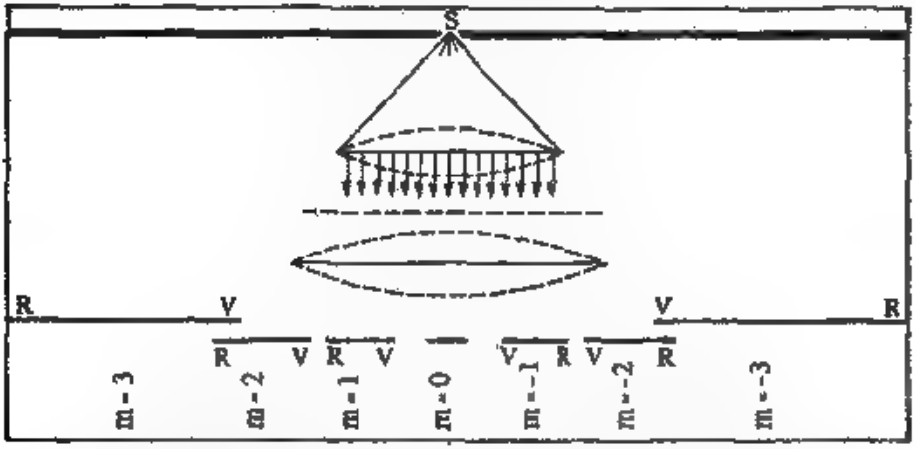


Fig. 9.90. Descomposición de la luz blanca por la red de difracción. El extremo rojo del espectro de segundo orden se superpuesto por el extremo violeta de tercer orden.

Además, las violaciones indicadas traen consigo la aparición de máximos adicionales, generalmente no intensos (los llamados máximos parásitos). El surgimiento de los máximos parásitos frecuentemente lleva a errores en el análisis del espectro producido por la red de difracción, ya que el máximo parásito puede ser considerado como una línea espectral adicional que en la realidad está ausente en el espectro analizado.

§47. Incidencia oblicua de los rayos sobre la red

Si una onda plana incide sobre la red bajo un ángulo θ (fig. 9.21), entonces para calcular las direcciones hacia los máximos principales se puede proceder de la misma manera, como se hizo anteriormente.

La diferencia total de recorrido para dos ondas correspondientes es igual a

$$AC - DB = d \operatorname{sen} \theta - d \operatorname{sen} \varphi.$$

Las condiciones para la formación de los máximos principales tienen la forma

$$d(\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \varphi_m) = m\lambda, \qquad (47.1)$$

donde φ_m son las direcciones hacia el máximo principal de orden m, y $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Después de simples transformaciones obtendremos

$$2d \cos {}^1/_2 (\varphi_m + \theta) \operatorname{sen} {}^1/_2 (\theta - \varphi_m) = m\lambda.$$

Si la red es lo suficientemente rústica, es decir, si su período d es considerablemente mayor que λ, entonces los ángulos de difracción serán pequeños y el ángulo φ_m difiere poco de θ. En tal caso podemos poner:

$${}^1/_2 (\varphi_m + \theta) \approx \theta \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} {}^1/_2 (\theta - \varphi_m) \approx {}^1/_2 (\theta - \varphi_m).$$

De esta manera, tenemos

$$d \cos \theta (\theta - \varphi_m) = m\lambda. \qquad (47.2)$$

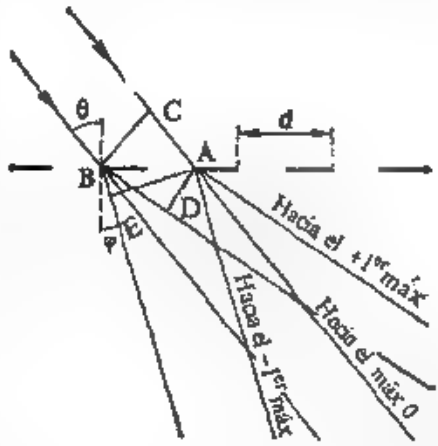


Fig. 9.21. Incidencia oblicua de un haz paralelo sobre la red de difracción.

Comparemos esta fórmula con la de la incidencia normal del frente ondulatorio sobre la red $d \operatorname{sen} \varphi_m = m\lambda$, o bien $d\varphi_m = m\lambda$ (si el ángulo φ_m es pequeño). Esta comparación muestra que el ángulo entre las direcciones hacia el máximo de orden cero y hacia los demás máximos $(\theta - \varphi_m)$ se calcula de la misma manera, como si la incidencia fuese normal, pero como si la red *tuviese un período menor*, o sea $d \cos \theta$.

Si θ es próximo a $\pi/2$, entonces tendremos una disminución bastante notable del período. De esta manera, dirigiendo la luz bajo un ángulo casi de 90° hacia una red rústica, nosotros podremos observar un claro cuadro de difracción. Por ejemplo, una regla milimetrada grabada en el caso de una incidencia muy oblicua de la luz sobre ella, permite observar los espectros de difracción para la luz visible.

La circunstancia indicada encontró una aplicación importante en la investigación de la difracción de los rayos X. Debido a que

las longitudes de onda de los rayos X generalmente son miles de veces menores que las ondas de la luz visible, las redes construidas artificialmente resultan muy rústicas para los rayos X, ya que $d/\lambda \sim 1000$

Utilizando una incidencia muy oblicua de la emisión, se logró obtener una difracción claramente expresada de los rayos X con una red relativamente rústica ($d \approx 0{,}02$ mm, Compton y Doan, 1925). Posteriormente con este método fueron obtenidos excelentes espectros de difracción y fueron medidas con gran exactitud las longitudes de onda de la emisión Roentgen. Este método de medición en la actualidad es el más perfecto (compárese con § 118).

§ 48. Redes fásicas

La distribución de la energía según los espectros de diferente orden, expuesta en el § 46, muestra que una parte considerable de la energía se concentra en el espectro de orden cero; a medida que aumenta el orden la energía disminuye rápidamente. Los aparatos espectrales provistos de estas redes de difracción serían poco luminosos. Un importante perfeccionamiento práctico de las redes constituyó la variación de la distribución según el espectro, propuesta por Rayleigh y realizada por Wood, que está basada en la introducción de una diferencia adicional de recorrido en los límites de cada troso de la red. Con este fin la red es grabada de tal manera que cada surco posee un perfil especial, gracias a lo cual en la reflexión (o en la transmisión) aparece una diferencia adicional de recorrido desde un borde del surco hasta el otro (fig. 9 22). Escogiendo el perfil del surco, se logra concentrar la energía en el espectro de uno u otro orden, debilitando los restantes, entre ellos y el más brillante espectro de orden cero. Las redes de este tipo permitieron crear los espectrógrafos de difracción, instrumentos que sobrepasan por su intensidad luminosa los espectrógrafos corrientes a base de prismas.

Las redes representadas en la fig. 9 22 constituyen en su esencia redes *fásicas*, cuyos elementos se distinguen no por la diferencia en su capacidad de reflexión o de transmisión que influyen en la amplitud de la onda, sino por su capacidad de cambiar la *fase* de la onda. En el caso dado la variación de la fase ocurre como consecuencia de la forma geométrica de la lámina que refleja o transmite la onda. Se puede ejercer influencia sobre la fase de la onda, realizando una diferencia en el índice de refracción de la capa que transmite la luz, manteniendo invariable su espesor; las redes fásicas de este tipo se logra crear, provocando en un cuerpo transparente una onda ultrasacústica. Ha sido construida también una red fásica basada en el diferente cambio de fase de la onda al ser reflejada ésta en un vidrio o en un metal (S. M. Rytov e I. L. Fabelinski). Con este fin sobre el borde correspondiente a la hipotenusa de un prisma rectangular de

vidrio han sido trazadas unas pequeñas franjas de plata separadas por otras franjas del vidrio no plateado. En el caso de incidencia de la luz del lado del vidrio (fig. 9.23) la intensidad de la luz reflejada en diferentes franjas es prácticamente igual (reflexión total interna), pero aparece una diferencia en las fases, que lleva a la formación del cuadro de difracción.

Por supuesto, son posibles redes de amplitud y fase, es decir, que ejercen influencia simultáneamente sobre la amplitud y sobre la fase. La teoría general de tales redes es en esencia una repetición de la examinada en el § 45. Solamente en vez del multiplicando $\frac{\operatorname{sen}[(\pi b/\lambda)\operatorname{sen}\varphi]}{(\pi b/\lambda)\operatorname{sen}\varphi} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$, que representa la distribución de la amplitud en el caso de difracción en *una* rendija lo suficientemente ancha, se introduce un multiplicando de una forma más general

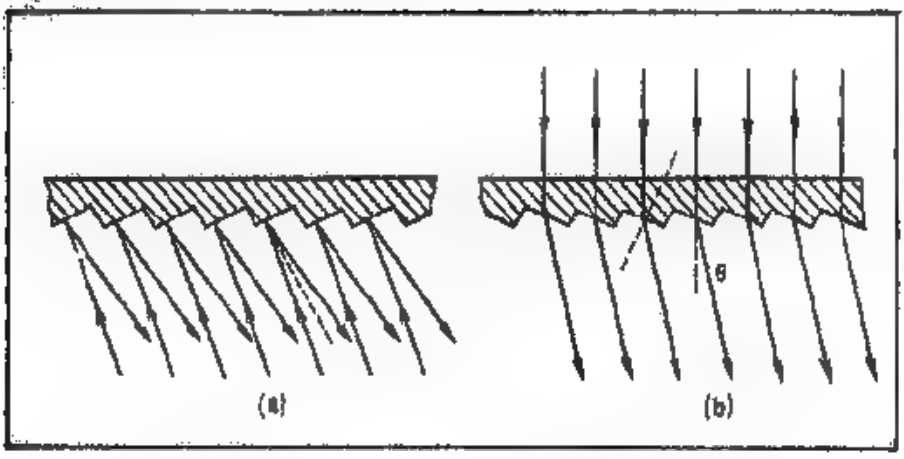


Fig. 9.23. *Redes físicas con un perfil especial para la concentración de la energía en determinados espectros de diferentes órdenes.*
a—una red reflectora; b—una red transmisora.

$F(b, \lambda, \varphi)$ también dependiente del ancho de trazo b, de la longitud de onda λ y del ángulo de difracción φ, pero que expresa también las particularidades de los trazos (su perfil, la propiedad de reflejar o transmitir, etc). Por lo tanto la fórmula (45.1) se transformará en

$$A_\varphi = A_0 F(b, \lambda, \varphi) \frac{\operatorname{sen} N\beta}{\operatorname{sen}\beta}.$$

Precisamente una elección especial de las particularidades del trazo, que define la forma de la función F, da la posibilidad de concentrar la energía en los espectros de diferentes órdenes. Por ejemplo, para las redes, representadas en la fig. 9.22, *b*, los cálculos según

el esquema del § 39 llevan a la expresión

$$F(b, \lambda, \varphi) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \alpha_0)}{(\alpha - \alpha_0)}, \quad \alpha - \alpha_0 = \frac{nb}{\lambda}(\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\theta)$$

Por cuanto la función $F(b, \lambda, \varphi)$ es máxima para $\alpha = \alpha_0$, la mayor intensidad poseerán aquellos máximos principales, para los cuales los ángulos φ son próximos al ángulo θ de refracción geométrica de los rayos en los bordes del trazo.

La técnica de confección de las redes de difracción se perfecciona muy lentamente. La primera red de difracción fue construida, al parecer, en el año 1785 por el astrónomo americano D. Rittenhouse, pero no fue utilizada ni por él mismo, ni por alguien más. La red fue descubierta nuevamente en el año 1821 por Fraunhofer, el cual fundamentó la teoría de la difracción de rayos paralelos y realizó con ayuda de un espectroscopio de difracción descubrimientos muy importantes (en particular, descubrió las líneas oscuras en el espectro continuo del Sol, es decir, las líneas de Fraunhofer).

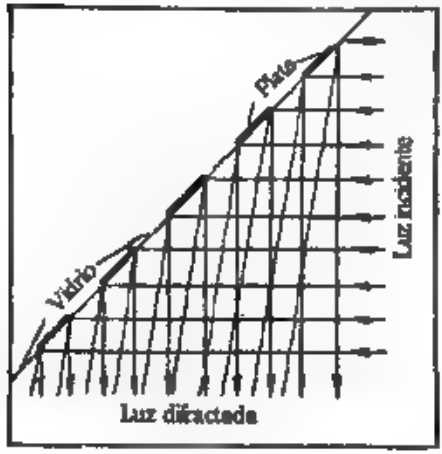


Fig. 9.33. Red física reflectora que utiliza el diferente cambio de fase en la reflexión total interna para el vidrio y para la plata.

Fraunhofer confeccionaba las primeras redes con un alambre enrollado sobre dos tornillos dispuestos paralelamente. De esta manera él pudo obtener redes con un número de trazos desde 40 hasta 340 por pulgada*). Para confeccionar redes más perfectas Fraunhofer decidió hacer los trazos en una fina capa de oro que cubría el vidrio, y más tarde inmediatamente en el vidrio (con diamante). La mejor red de Fraunhofer tenía un ancho de 1/2 pulgada y poseía un período próximo a 3 μm (8000 trazos por pulgada).

Fraunhofer indicó la posibilidad, en principio, de confeccionar redes reflectoras, aunque todas sus redes trabajaban como transmisoras.

La transición desde las primitivas redes de Fraunhofer hacia las redes de difracción modernas constituyó un complicado problema técnico, en la solución del cual participaron muchos investigadores.

*) Ya con estas redes Fraunhofer determinó la longitud de onda de la línea D del Na (5886 Å). El ancho total de las redes de Fraunhofer no era muy grande y el poder separador de éstas no sobrepasaba 500. Naturalmente, que con esta red no se podía separar el dobiete del sodio que consta de las líneas 5890 y 5896 Å.

Un paso muy importante fue hecho por Rowland, el cual construyó unas máquinas especiales para la confección de finísimas redes de gran extensión. Además, Rowland fue el primero en hacer redes reflectoras cóncavas, que simultáneamente desempeñaban el papel de red y de lente convergente. Las redes de Rowland poseían hasta 20 000 trazos por pulgada, teniendo un ancho grande (hasta 10 cm) y una excelente calidad.

Un posterior mejoramiento en las máquinas de Rowland fue realizado por Anderson, Wood y otros. En la actualidad las redes de alta calidad son confeccionadas en muchos países, entre ellos en la URSS. Por regla, estas son redes reflectoras con un perfil casi triangular del trazo (véase la fig. 9.22, a, las llamadas «echelettes»), las cuales concentran hasta el 70—80% de la luz incidente sobre la red en el espectro de algún orden diferente de cero. Se confeccionan redes grabadas para las diferentes regiones del espectro, desde el lejano infrarrojo ($\lambda \approx 1$ mm) hasta el ultravioleta ($\lambda \approx 100$ nm) y hasta la cercana región de la emisión Roentgen ($\lambda \approx 1$ nm) con dimensiones desde 400×400 mm^2 y número de trazos (en dependencia de la región del espectro) desde 4 hasta 3600 por mm. Son ampliamente difundidas las copias de redes grabadas (*réplicas*) las cuales se obtienen mediante la confección de copias sobre especiales masas plásticas con el posterior recubrimiento con una capa metálica reflectora sobre ellas. Por su calidad, las réplicas casi no difieren de los originales.

En los años 70 fue elaborada una nueva tecnología de la confección de redes basada en la creación de una distribución periódica de la intensidad sobre materiales fotosensibles especiales como resultado de la interferencia de rayos láser. Redes de este tipo, llamadas *holográficas*, poseen una alta calidad y son confeccionadas para las regiones visible y ultravioleta del espectro con un número de trazos desde 600 hasta 6000 por mm y con dimensiones incluso hasta 600×400 mm^2.

§ 49. Escalón de Michelson

Una importante variedad de la red física es el escalón de Michelson, que representa una red con un número relativamente no grande de «rendijas» (el número de haces interferentes no sobrepasa 30). Debido a que en este caso la diferencia de recorrido entre los diferentes haces es bastante grande (10 000 λ y más), en este aparato se obtienen espectros de órdenes bastante altos.

El escalón constituye una «escalera» compuesta de gruesas (desde 1 hasta 2 cm) láminas planoparalelas de vidrio, completamente homogéneas, de un espesor estrictamente igual y con salientes de igual ancho (fig. 9.24).

Para asegurar una buena calidad del escalón es esencialmente necesaria una extraordinaria escrupulosidad en el procesamiento de las láminas, las cuales deben ser estrictamente planoparalelas y homogéneas, de manera que al ser colocadas una sobre otra y oprimidas, obtengamos algo así como una «escalera» con iguales peldaños, hecha de un pedazo continuo de vidrio homogéneo.

Un haz paralelo, al atravesar todo el espesor del escalón, experimenta difracción en los bordes de los peldaños. La diferencia de recorrido que aparece entre las distintas ondas depende del espesor h y del ancho s de los peldaños, del índice de refracción n del vidrio y del ángulo de difracción φ. Como se ve fácilmente de la fig.9.25, la diferencia de recorrido entre los rayos AM y BN procedentes de los correspondientes puntos de los peldaños es igual a

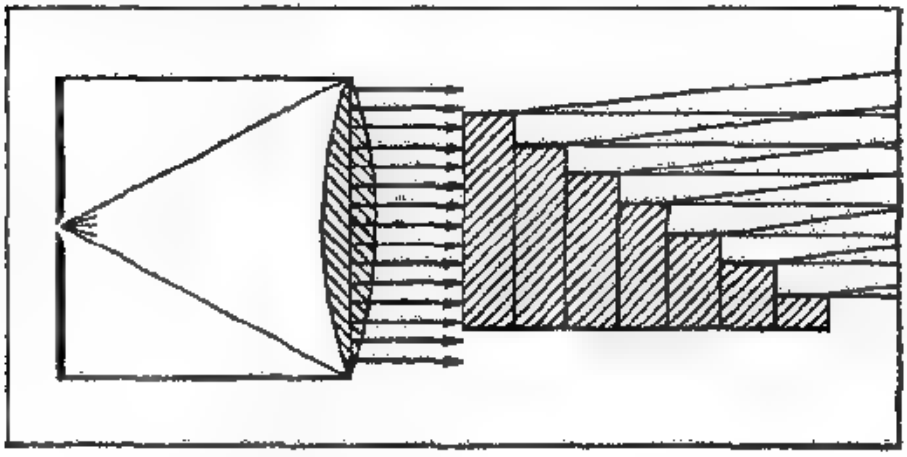


Fig. 9.24. Esquema del escalón de Michelson.

$$\Delta = (QB) + BC - AD = nh + s \operatorname{sen} \varphi - h \cos \varphi =$$
$$= s \operatorname{sen} \varphi + h (n - \cos \varphi),$$

donde φ es el ángulo de difracción. En vista de la pequeñez de φ, se puede considerar $\operatorname{sen} \varphi = \varphi$ y $\cos \varphi = 1$. Por lo tanto

$$\Delta = s\varphi + h (n - 1).$$

Del mismo modo como para la red, las condiciones para encontrar los máximos principales tienen la forma $\Delta = m\lambda$, donde m son números enteros. De esta manera

$$s\varphi + h (n - 1) = m\lambda,$$

es decir

$$\varphi = \frac{m\lambda - h (n-1)}{s}. \qquad (49.1)$$

La nitidez de los máximos, así como en la red, se define por el número de haces luminosos interferentes, es decir, por el número de peldaños del escalón, el cual no sobrepasa 30. En cambio la diferencia de recorrido (el orden de interferencia) entre dos haces adyacentes es bastante grande; despreciando el término $s\varphi$ por la pequeñez de su magnitud, hallaremos para $h = 1$ cm y $n = 1{,}5$

$$m = h(n-1)/\lambda \sim 10\,000.$$

De esta manera, el escalón puede trabajar sólo en el caso de una emisión altamente monocromática. La distancia entre los máximos principales de difracción de órdenes vecinos, es decir, la variación de φ al cambiar m en la unidad, no es muy grande. De la fórmula (49.1) tenemos que $\delta\varphi = \lambda/s$. Todos los máximos de difracción poseen una notable intensidad sólo en los límites del máximo central que es condicionado por una rendija (compárense con los §§ 44 y 46).

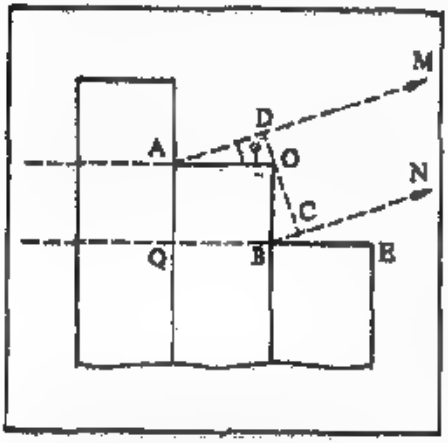


Fig. 9,25. Recorrido de los rayos en el escalón de Michelson.
$AO = QB = h$; $OB = s$; $AD = h\cos\varphi$, $BC = s\,\mathrm{sen}\,\varphi$.

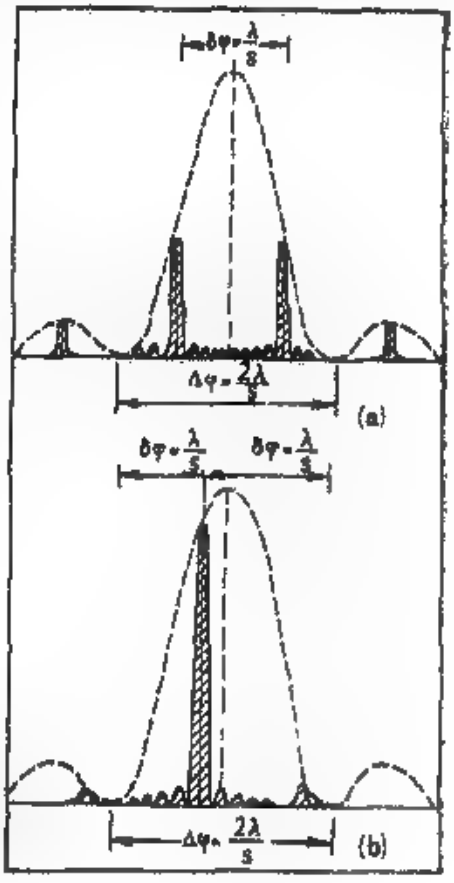


Fig. 9,26. Dos posibles posiciones de los máximos principales en el escalón de Michelson.
a, en los límites del ángulo $\Delta\varphi = 2\lambda/s$ caben dos máximos de difracción de notable intensidad (de orden m y $(m+2)$) separados por la distancia $\delta\varphi = \lambda/s$. b, en los límites del ángulo $\Delta\varphi$ cabe un solo máximo de notable intensidad (el cálculo ha sido hecho para un escalón de 10 láminas).

El ancho angular de este máximo es $\Delta\varphi = 2\lambda/s$, ya que el ancho de la rendija es igual a s. De esta manera, en el campo de notable brillo con un ancho $\Delta\varphi$ pueden caber solamente *uno* o *dos* máximos de órdenes vecinos, debido a que la distancia entre ellos es de $\delta\varphi = {}^1/_2\Delta\varphi$ (*fig.* 9.26).

§ 50. Características de los aparatos espectrales, sus semejanzas y diferencias

En el presente capítulo ha sido examinado el funcionamiento de algunos aparatos espectrales (red de difracción, escalón de Michelson), los cuales permiten determinar con gran exactitud las longitudes de onda o la diferencia en las longitudes de onda de dos líneas espectrales cercanas. Un problema análogo puede ser resuelto también con ayuda de los espectroscopios de interferencia (lámina de Lummer—Gehrke, interferómetro de Michelson, interferómetro o patrón de Fabry—Perot), descritos en el cap. VII.

Para tener posibilidades de comparar el funcionamiento de estos diferentes aparatos y elegir cuál de ellos es el más efectivo para solucionar tal o cual problema físico, es necesario establecer ciertas características de los aparatos espectrales.

a. *Dispersión del aparato espectral D.* La destinación fundamental de los aparatos espectrales consiste en la determinación de la longitud de onda de la luz en investigación, problema que en la mayoría de los casos se reduce a la medición de la diferencia en las longitudes de onda de dos líneas espectrales cercanas. Generalmente la posición de la línea espectral en el aparato se da por el ángulo definido por la dirección de la normal respecto al frente ondulatorio después de pasar el elemento dispersante. Por eso la dispersión se define como la distancia angular entre las direcciones para dos líneas espectrales que se diferencian por su longitud de onda en 1 Å. Si a dos líneas que difieren por su longitud de onda en $\delta\lambda$ les corresponde una diferencia en los ángulos igual a $\delta\varphi$, entonces como medida de dispersión se utiliza la magnitud

$$D = \delta\varphi/\delta\lambda,$$

expresada, por ejemplo, en unidades angulares por angström (*dispersión angular*).

Debido a que comúnmente observamos la posición de la línea en una pantalla o en una película fotográfica, *es cómodo sustituir* la distancia angular entre las líneas por la distancia *lineal* δs, expresada, por ejemplo, en milímetros. Si la distancia focal de la lente que proyecta el espectro sobre la pantalla es igual a f, entonces, evidentemente, $\delta s = f\delta\varphi$, de manera que la *dispersión lineal* vale

$$D^* = \delta s/\delta\lambda = fD$$

y se expresa generalmente en milímetros por angström. En la práctica frecuentemente utilizan la magnitud inversa, cuando caracterizan la dispersión del aparato con el número de angströms que caben en 1 mm de película fotográfica.

Sea que tenemos dos longitudes próximas de ondas λ_1 y λ_2, más exactamente, dos sectores espectrales tan estrechos, que pueden ser caracterizados por los valores λ_1 y λ_2; tales son, por ejemplo, dos líneas emitidas por la lámpara de mercurio. La distancia $\delta\varphi$ entre los máximos para λ_1 y λ_2 se hallará de la condición que define la posición de los máximos: $d \operatorname{sen} \varphi = m\lambda$. En efecto, al diferenciar, obtenemos:

$$d \cos \varphi \delta\varphi = m\delta\lambda,$$

es decir

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi}. \qquad (50.1)$$

De esta manera, la dispersión es mayor, cuanto menor sea el período de la red d y cuanto más alto sea el orden m del espectro observado.

Tampoco es difícil determinar la dispersión angular de los aparatos de interferencia, la cual, como muestran los cálculos, generalmente es muy grande (véase ejercicio 81).

b. *Poder separador del aparato espectral.* La presencia de una dispersión considerable todavía no asegura la posibilidad de observar por separado dos líneas espectrales próximas λ_1 y λ_2, por muy monocromáticas que sean ellas. Efectivamente, la dispersión crea una distancia angular o lineal entre dos máximos de intensidad para dos longitudes de onda λ_1 y λ_2, pero en cualquier aparato la transición desde el máximo de determinada longitud de onda hacia el mínimo ocurre más o menos paulatinamente, en dependencia de la estructura del aparato. Por eso la distribución de la iluminación en la pantalla o en la película fotográfica tiene la forma representada en la fig. 9.27.

La distribución *observada* de la iluminación es la suma de las iluminaciones creadas por las líneas espectrales próximas λ_1 y λ_2 de igual intensidad; ella está representada por la curva C. De esta manera, incluso en el caso de una gran dispersión (una distancia grande AB) no hay posibilidad de descubrir la presencia de dos longitudes de onda λ_1 y λ_2, si la caída de la iluminación ocurre tan suavemente como está mostrado en la fig. 9.27.

Para que el aparato permita establecer la presencia de líneas espectrales de dos longitudes de onda (*separar* dos longitudes de onda), es necesario que para determinada distancia entre los máximos los contornos de ambas líneas sean lo suficientemente pronunciados (*fig.* 9.28). En este caso la presencia de los dos máximos (dos

longitudes de onda) se ve con suficiente claridad, a pesar de que las jorobas de cada uno de ellos en gran medida se montan una sobre otra. Sin duda alguna, la posibilidad de diferenciación de los dos máximos en este caso depende hasta cierto grado de la sensibilidad al contraste del método (visual o fotométrico), con el cual se investiga la distribución de la intensidad a lo largo del espectro, de la posibilidad de establecer con seguridad una pequeña diferencia en la intensidad.

De esta manera, la posibilidad de separación de dos líneas es un tanto indeterminada. De acuerdo con la suposición de Rayleigh condicionalmente se acostumbra considerar la separación completa cuando las dos jorobas están dispuestas tal como se muestra en la fig. 9.28, es decir, cuando el *máximo de la primera* joroba coincide con el *mínimo de la segunda*. Aquella menor diferencia $\delta\lambda$ en las

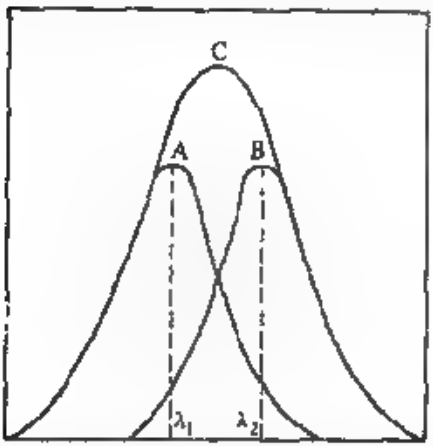


Fig. 9.27. Distribución de la iluminación en el caso de superposición de dos líneas espectrales próximas de igual intensidad.

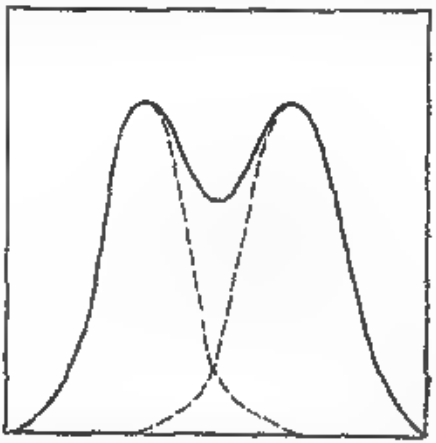


Fig. 9.28. Distribución de la iluminación para dos líneas espectrales todavía discernibles (criterio de Rayleigh).

longitudes de onda, que satisface la condición propuesta, caracterizará la capacidad del aparato espectral de discernir dos longitudes próximas de onda de las líneas espectrales casi monocromáticas de igual intensidad.

El criterio de Rayleigh en la forma señalada no es aplicable a los aparatos espectrales de interferencia, en los cuales, como hemos visto, la transición desde el máximo hacia el mínimo posee una dependencia angular distinta de la de la red de difracción*). Por eso resulta

*) La diferencia es debida a que en las redes de difracción (incluyendo el escalón de Michelson) se suman N haces de igual intensidad, mientras que en los espectroscopios de interferencia se suma un número infinito de haces que se debilitan paulatinamente.

más cómodo darle al criterio de Rayleigh otra forma. Si dos líneas espectrales contiguas poseen igual intensidad y forma, entonces, el criterio de Rayleigh significa que el mínimo entre las líneas constituye cerca del 80% de los máximos vecinos. Este contraste se establece seguramente tanto en los métodos visuales, como en los métodos objetivos (fotográficos y eléctricos) de registración. Partiendo de esto, frecuentemente el límite de separación se exige tal, que la profundidad de la depresión en la curva integral de intensidad de las dos líneas cercanas e igualmente intensas forme no menos del 20% de la altura de los máximos vecinos.

El convencionalismo del criterio de separación en esta formulación es aún más grande. Al juzgar acerca de la posibilidad de discernir dos líneas con intensidades que se diferencian fuertemente nos vemos obligados a partir de una serie de factores que caracterizan cada caso concreto. Sin embargo, a pesar del carácter convencional del criterio de Rayleigh, él resulta ser bastante útil para la comparación del poder separador de diferentes aparatos. Así, por ejemplo, se hace claro que la capacidad del aparato espectral de diferenciar longitudes de onda próximas será tanto mayor, cuanto más alejados estén los máximos, es decir, cuanto mayor sea el orden m y más pronunciados sean los máximos (más brusca sea la transición desde el máximo hacia el mínimo).

Como medida del *poder separador* del aparato espectral se acostumbra considerar la relación entre la longitud de onda λ, cerca de la cual se efectúan las mediciones, y el intervalo mínimo señalado $\delta\lambda$, es decir, $\mathcal{A} = \lambda/\delta\lambda$. Para determinar $\mathcal{A}$ escribamos (por ejemplo, para la red de difracción) las condiciones, que dan las posiciones de los máximos de orden m para las ondas λ_1 y λ_2:

$$d \operatorname{sen} \varphi'_m = m\lambda_1, \quad d \operatorname{sen} \varphi''_m = m\lambda_2. \tag{50.2}$$

Para pasar del m-ésimo máximo de la longitud de onda λ_2 al correspondiente mínimo es necesario variar la dirección de la luz incidente de tal manera que la diferencia de recorrido varíe en λ_2/N, donde N es el número de haces luminosos interferentes (trazos de la red) (véase § 46). De esta manera, el mínimo de λ_2 se observará en la dirección $\varphi_{\min}$ que satisface la condición

$$d \operatorname{sen} \varphi_{\min} = m\lambda_2 + \lambda_2/N. \tag{50.3}$$

La condición de Rayleigh es

$$\varphi'_m = \varphi_{\min},$$

de donde

$$m\lambda_1 = m\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{N} \text{ o bien } \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = mN.$$

Debido a que λ_1 y λ_2 son próximos entre sí, es decir, $\delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ es una magnitud pequeña, el poder separador valdrá

$$\mathcal{A} = \lambda/\delta\lambda = mN. \tag{50.4}$$

De esta manera, el poder separador de la red para un número de trazos prefijado aumenta al pasar a espectros de altos órdenes. El valor máximo de $\mathcal{A}$ responde al máximo de m, que se determina de la condición, de que el seno del ángulo de difracción no puede ser mayor que 1. Así, de la fórmula fundamental de la red $d \operatorname{sen} \varphi = m\lambda$ hallamos que $m_{máx} = d/\lambda$ y, por lo tanto, el poder separador máximo de la red es

$$\mathcal{A}_{máx} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{Nd}{\lambda}. \tag{50.5}$$

Pero el producto Nd es el *ancho total* de la red. Por consiguiente, el máximo poder separador de la red se define por su ancho total o, más exactamente, por la diferencia de recorrido máxima (expresada en longitudes de onda) Nd/λ entre los haces luminosos que se propagan desde el primer y último trazos de la red.

Así tenemos, que el máximo poder separador de la red no depende de si está formada ella por un número grande de trazos (N_1) de pequeño período (d_1) o por un pequeño número de trazos (N_2) de gran período (d_2), sólo si $N_1 d_1 = N_2 d_2$. Sin embargo, una red grabada menudamente (pequeño d_1 y grande N_1), a pesar de poseer el mismo poder separador máximo, que una red rústica (grande d_2 y pequeño N_2) si se cumple la condición $N_1 d_1 = N_2 d_2$, posee una inmensa ventaja, ya que al pequeño d le corresponde una dispersión angular grande en el caso de órdenes relativamente no altos. Una red rústica tendrá la misma dispersión y poder separador sólo en el caso de órdenes considerablemente más altos (véanse (50.1) y (50.4)). Pero la intensidad de los espectros de estos órdenes es muy pequeña a consecuencia de la caída rápida de la envolvente (curva punteada en la fig. 9.18). El intento de ensanchar la envolvente mediante la disminución del ancho de la parte transparente del período no tendrá éxito, ya que esto traerá consigo la reducción del flujo luminoso transmitido por la red. Por eso para altos órdenes pueden ser utilizadas sólo las redes *fásicas* (véanse §§ 48, 49), que son capaces de asegurar una alta concentración de energía para grandes m. Finalmente, para pequeños d y m la región de dispersión es considerablemente mayor (véase más adelante). Por eso las redes de pequeño período con un gran número de trazos y un ancho total grande ofrecen un interés práctico real. Como ya se había indicado, las buenas redes para la región visible del espectro poseen un ancho total de 150 mm y contienen cerca de 100 000 trazos con un período de 1/600 mm.

La fórmula (50.4) muestra que el poder separador del aparato espectral es igual al producto del orden de espectro m por el número de haces luminosos que interfieren en el aparato. Este número para la red de difracción es igual al número de trazos; para la lámina de Lummer—Gehrke o de Fabry—Perot se puede considerar condicio-

salmente el número N igual al número de haces luminosos reflejados de considerable intensidad (número de rayos efectivos), el cual es tanto mayor, cuanto mayor sea el coeficiente de reflexión R (véase § 30). Para el interferómetro de Michelson $N = 2$; para el escalón de Michelson N es igual al número de láminas, etc.

Es fácil ver que a cuenta de los valores enormes de N (número total de trazos en la red) se puede lograr un gran poder separador de una buena red de difracción para m insignificantes (2 ó 3), mientras que en los espectroscopios de interferencia N es pequeño (no mayor de 20—30), pero m es muy grande (decenas de miles). El producto mN es el número de longitudes de onda que representa la diferencia de recorrido entre los haces luminosos extremos que salen del aparato. Justamente él determina el poder separador de cualquier aparato.

El criterio de Rayleigh sirvió de base para el concepto del poder separador examinado anteriormente. La característica más importante de este criterio consiste en la exigencia de que en la distribución sumaria de la intensidad creada por dos líneas espectrales esté presente un mínimo que constituya cierta fracción (por ejemplo, el 80 % de los máximos adyacentes, véase fig. 9.28). De esta manera, de acuerdo con el criterio de Rayleigh deberá haber una distinción cualitativa entre las distribuciones de la iluminación en el caso de las líneas única y doble (respectivamente máximo y mínimo en el centro), es decir una diferencia tal que sea notable sin mediciones cuantitativas detalladas. En otras palabras, el criterio de Rayleigh en esencia propone solamente observaciones visuales.

En las mediciones cuantitativas el planteamiento de problema acerca de la separación de dos líneas deberá ser cambiado (G. S. Gorelik). Sea que dos líneas están dispuestas tan cercanamente, que en el centro de la distribución sumaria esté no un mínimo, sino un máximo de iluminación (fig. 9.27), es decir la curva C posee la misma forma cualitativa, que las curvas A y B por separado. Sin embargo, esta distribución sumaria de la intensidad difiere cuantitativamente de la distribución en el caso de una sola línea. En particular, la distribución sumaria tiene mayor ancho que la línea única. Esta diferencia puede ser medida y si la exactitud de las mediciones es lo suficientemente alta, obtendremos la posibilidad de establecer que en el espectro de la emisión se tienen dos líneas espectrales y no una sola. De esta manera, en el caso de mediciones cuantitativas el criterio de separación puede ser formulado de la forma siguiente: dos líneas se consideran distinguibles, si la distribución sumaria de la iluminación difiere de la distribución para una sola línea en una magnitud mayor que el error de la medición. Por lo tanto, de acuerdo con este criterio para propiedades prefijadas de la red de difracción (o de otro aparato espectral) el poder separador es más alto, cuanto mayor sea la exactitud en las mediciones de la distri-

bución de la intensidad en el contorno de la línea espectral. En el caso límite de mediciones absolutamente exactas el poder separador crece ilimitadamente.

c. *Región de dispersión G.* En las condiciones reales del experimento nosotros trabajamos no con ondas monocromáticas con longitud λ, sino con cierto sector espectral, que abarca las longitudes de onda desde λ hasta λ + Δλ. La presencia de este *conjunto* de longitudes de onda introduce una complicación considerable en el buen funcionamiento de los aparatos espectrales, especialmente de aquellos, en los cuales se observan espectros de altos órdenes, los cuales son capaces de sobreponerse el uno sobre el otro si se trabaja con un intervalo espectral bastante ancho. De esta manera, para cada aparato existe una anchura límite Δλ del intervalo espectral, con la cual todavía es posible la obtención de máximos y mínimos discretos (no superpuestos). Este intervalo lleva el nombre de *región de dispersión G* del aparato espectral. Para simplificar supongamos que la luz a investigar tiene la composición espectral, representada en la fig. 9.29, y hallemos G para la red de difracción.

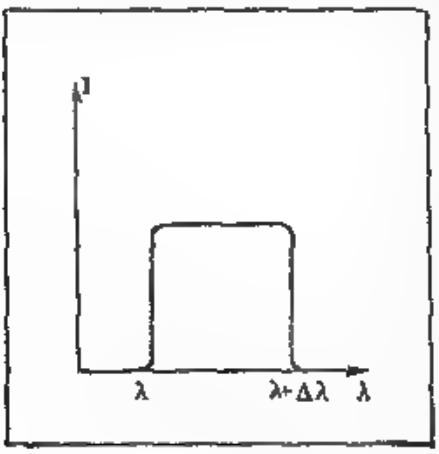


Fig. 9.29. Distribución de la intensidad en el intervalo espectral (desde λ hasta λ + Δλ.

El lugar del máximo de orden m para el borde *derecho* del intervalo (longitud de onda λ + + Δλ) se determina de la condición

$$d \operatorname{sen} \varphi_m^* = m(\lambda + \Delta\lambda). \quad (50.6)$$

El lugar del máximo de orden $(m + 1)$ para el borde *izquierdo* del intervalo (longitud de onda λ) se da por la expresión

$$d \operatorname{sen} \varphi_{m+1} = (m + 1)\lambda. \quad (50.7)$$

Los máximos de órdenes vecinos comienzan a montarse uno sobre otro, es decir, el cuadro de interferencia se torna impreciso, bajo la condición

$$\varphi_m^* = \varphi_{m+1},$$

es decir

$$m(\lambda + \Delta\lambda) = (m + 1)\lambda$$

o bien

$$G = \Delta\lambda = \lambda/m.$$

De esta manera, la región de dispersión del aparato depende del orden de la interferencia observada en el aparato dado (compárese con § 21).

Para los espectroscopios de interferencia y para el escalón de Michelson los máximos observados corresponden siempre a una inmensa diferencia de recorrido, es decir son máximos de *alto orden* (m es igual a unos cuantos miles o decenas de miles), de manera que $\Delta\lambda \sim \lambda/10\,000$, es decir para estos aparatos es característica una región muy pequeña de dispersión medida en fracciones de angström.

Para la red de difracción generalmente observan espectros de segundo y tercer orden, es decir $m = 2$ ó 3. De acuerdo con esto la región de dispersión $\Delta\lambda = \lambda/2$ ó $\lambda/3$ es muy grande. En esto consiste la gran ventaja de la red de difracción, la cual permite analizar incluso la luz *blanca*, es decir un intervalo espectral muy amplio (de miles de angströms), mientras que la lámina de Lummer—Gehrke, por ejemplo, no da máximos claros, si la luz incidente sobre ella constituye un intervalo espectral que sobrepasa un angstrom. Por eso los espectroscopios de interferencia son útiles solamente para analizar una luz muy homogénea, por ejemplo, las líneas espectrales emitidas por gases enrarecidos. Ellos son invaluables en el análisis de tales líneas, permitiendo establecer la presencia de varias componentes en esta línea (estructura fina) y apreciar la anchura de la línea, la presencia de variaciones (desdoblamiento) bajo la acción de causas externas (por ejemplo, el efecto Zeeman), etc.

El siguiente experimento simple hace muy evidente el significado de la región de dispersión. La lámpara de mercurio en el momento de encenderse contiene vapores de mercurio a baja presión y emite líneas relativamente estrechas que dan en el espectroscopio con patrón de Fabry—Perot (la distancia entre los espejos es próxima a 1 cm) nítidos máximos y mínimos. Después de un tiempo la lámpara se calienta, la densidad del vapor crece y las líneas se tornan tan anchas,

Tabla 9.2. Características de diferentes aparatos espectrales

	m	N	c, Å	$\mathcal{A}$	$\delta\lambda$ aproximadamente, Å
Patrón de Fabry—Perot, $d = 25$ mm, $R = 0{,}9$	10^6	30	0,05	$3 \cdot 10^6$	0,0017
Interferómetro de Michelson	10^6	2	0,005	$2 \cdot 10^6$	0,0025
Lámina de Lummer—Gehrke	$5 \cdot 10^4$	10	0,10	$5 \cdot 10^5$	0,01
Escalón de Michelson	$1 \cdot 10^4$	50	0,50	$3 \cdot 10^5$	$\sim 0{,}017$
Red de difracción	3	10^5	~ 1700	$3 \cdot 10^5$	$\sim 0{,}017$

que $\Delta\lambda$ sobrepasa la G del aparato: los máximos se mezclan y el cuadro de interferencia desaparece. Sin embargo, si se comienza a soplar sobre la lámpara con un ventilador, entonces ella se enfría y los máximos vuelven a separarse.

d. *Comparación de las propiedades de los aparatos espectrales.* La comparación de las propiedades de los diferentes aparatos espectrales se ilustra en la tabla 9.2; $G = \Delta\lambda$ designa la región de dispersión que es igual a λ/m, $\mathcal{A} = \lambda/\delta\lambda$ designa el poder separador igual a mN. La tabla ha sido compuesta para la región verde del espectro ($\lambda = 5000$ Å $= 500$ nm).

Los datos mostrados en la tabla 9.2 caracterizan los buenos instrumentos del tipo indicado, aunque no los mejores.

De la comparación queda claro que una buena red de difracción tiene un poder separador próximo al de los buenos espectroscopios de interferencia, pero su ventaja consiste en una región incomparablemente más grande de aplicación (región de dispersión). Su defecto es la gran complejidad en su manejo, si se quiere obtener el record de los resultados alcanzables con la red. Sin embargo, en los aparatos de clase media con un poder separador $\mathcal{A} \approx 3 \cdot 10^5 - 10^6$ las redes constituyen el mejor elemento dispersante y además ellas superan también los sistemas de prismas (véase § 94). Por eso justamente los aparatos espectrales de difracción han encontrado una mayor aplicación.

Combinando la acción de diferentes aparatos espectrales, a veces se logra aumentar la región de dispersión de éstos, sin disminuir su poder separador. Nosotros no nos detendremos en estos casos especiales.

§ 51. Rol del aparato espectral en el análisis del impulso luminoso

Con ayuda del aparato espectral nosotros descomponemos un impulso ondulatorio complicado en el espectro, es decir, establecemos la distribución de la energía, concentrada en este impulso, según sus diferentes frecuencias. Sin embargo, como se desprende del material del parágrafo anterior, el carácter de la distribución de la energía según la frecuencia para los aparatos espectrales de diferente poder separador resulta ser distinto. De esta manera, el resultado del estudio del impulso con un aparato espectral depende tanto de las propiedades del impulso (de la ley de su variación en el tiempo, es decir de la forma y duración del impulso), como de las propiedades del aparato espectral (de su poder separador).

Cuanto más alto sea el poder separador del aparato, menos alteraciones introducirá él en el cuadro de la descomposición espectral de la energía; al contrario, si el poder separador es pequeño, entonces

el cuadro puede depender en sumo grado de las propiedades del aparato y no reflejar las particularidades del impulso observado.

Sin embargo, es necesario recordar que, disponiendo de un aparato de un poder separador infinitamente grande, obtendríamos la forma del espectrograma que se definiría unívocamente por la forma del impulso, pero la afirmación contraria no es justa: disponiendo de tal espectrograma, nosotros no podríamos hacer conclusión alguna acerca de *la forma del impulso ondulatorio*.

En efecto, los datos acerca de la distribución de la energía según la frecuencia, concedidos por este espectrograma ideal, permitirían reproducir solamente los *coeficientes* de los diferentes elementos de la serie (integral), en los cuales de acuerdo con el teorema de Fourier se puede descomponer el impulso, ya que la intensidad de cada línea espectral se define por el correspondiente coeficiente del desarrollo. Sin embargo la forma del impulso depende no sólo del valor de estos coeficientes, sino también de la interrelación de las fases de sus diferentes componentes. Por eso los impulsos de la más variada forma pueden responder a unos mismos valores de los coeficientes de Fourier y, por lo tanto, dar una misma descomposición espectral. De esta manera, el problema acerca de la descomposición de determinado impulso en su espectro con ayuda del aparato dado se resuelve unívocamente. Pero la reproducción del impulso original según su espectro obtenido incluso con ayuda de un aparato de un poder separador infinito siempre será un problema indeterminado.

La red de difracción u otro dispositivo espectral es un aparato que con respecto al impulso resuelve de manera física el mismo problema de su descomposición en componentes sinusoidales, que se puede realizar con ayuda de matemática pura, si se conoce la expresión matemática de la forma del impulso inicial.

Desde este punto de vista la afirmación de que la luz no monocromática (en particular, la blanca) representada por impulsos ondulatorios, está compuesta de un conjunto de ondas luminosas monocromáticas, no posee mayor sentido que la afirmación de que el ruido es un conjunto de tonos musicales perfectos. Tanto de impulso luminoso, como también del sonoro, se puede separar uno u otro tono simple (luz monocromática) con ayuda de un instrumento analizador conveniente. Sin embargo, el grado de monocromaticidad de aquellas componentes, en las cuales nuestro aparato transforma el *impulso estudiado*, depende de las propiedades del aparato y de su poder separador. Justamente por eso, el análisis con ayuda de un aparato espectral puede ser más o menos perfecto en dependencia del instrumento utilizado para la transformación del impulso. El mecanismo de esta transformación se pone más de relieve en el estudio de la acción de la red sobre el impulso. Además este ejemplo muestra claramente lo fuertemente que la forma del espectro depende del poder separador del aparato espectral.

Sea que un corto impulso*) de forma cualquiera incide normalmente sobre la red de difracción; veamos la acción sobre el aparato receptor dispuesto en la dirección dada por el ángulo φ con la normal (fig. 9.30). Todos los elementos transparentes (las rendijas) de la red se convertirán simultáneamente en fuentes de la perturbación dirigida al punto P bajo un ángulo de difracción φ. Sin embargo, como se ve fácilmente de la figura, estas diferentes perturbaciones llegarán a P no simultáneamente, sino con un retraso sistemático d sen φ/c, donde d es el período de la red, y c, la velocidad de la luz. De esta manera, el punto P obtendrá las perturbaciones, que irán *periódicamente* una tras otra a intervalos de tiempo $T = d$ sen φ/c, además a cada dirección φ le corresponderá su período T de la acción. De esta manera, en cada punto P la acción posee un carácter periódico, aunque el impulso, que cayó sobre la red, fuera único. Cuanto más

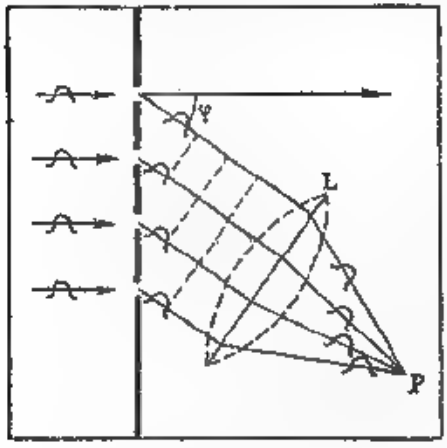


Fig. 9.30. Transformación del impulso en un conjunto de ondas monocromáticas al atravesar éste una red de difracción.

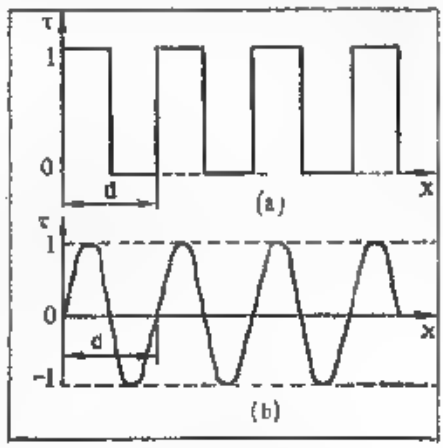


Fig. 9.31. Variación del coeficiente de transmisión τ de la red en función de la coordenada x.
a, una red de rendijas, con período de b, una red sinusoidal con período d.

rendijas tiene la red, más larga será la acción periódica. En el caso de una red ideal, con un número infinito de rendijas (infinito poder separador), la acción periódica perdurará infinitamente. Esta acción periódica infinita según el teorema de Fourier puede ser representada como un conjunto de oscilaciones *sinusoidales* con períodos T, $^1/_2\,T$, $^1/_3\,T$, . . . y con amplitudes dependientes del carácter de estas acciones periódicas, que es definido por la forma y la duración del impulso y por la interrelación de las dimensiones de los lugares

*) El impulso es llamado «corto» en el sentido que la duración de éste es pequeña en comparación con cualquier T (véase más adelante).

transparentes y no transparentes de la red. Esta descomposición de los cambios bruscos periódicos en oscilaciones sinusoidales significa que los fenómenos en el punto P suceden como si a este punto llegaran ondas monocromáticas cuyas longitudes sean iguales respectivamente a

$$\lambda_1 = cT = d \operatorname{sen} \varphi; \quad \lambda_2 = c^1/_2\, T = {}^1/_2\, d \operatorname{sen} \varphi;$$

$$\lambda_3 = c^1/_3\, T_3 = {}^1/_3\, d \operatorname{sen} \varphi, \ldots$$

De esta manera, nosotros vemos, que en la dirección φ se observarán ondas luminosas monocromáticas, las longitudes de las cuales satisfacen la condición $d \operatorname{sen} \varphi = m\lambda$, donde m es un número entero, es decir, la condición que define la posición de los máximos principales del espectro de difracción.

En la dirección $\varphi = 0$ los impulsos desde todas las rendijas llegan simultaneamente: no aparecen las acciones periódicas y el máximo de orden cero se mantiene ablancos. Todas estas deducciones se encuentran en correspondencia con la teoría corriente de las redes de difracción (véase § 46). El razonamiento expuesto muestra el mecanismo de la acción de la red de difracción sobre el impulso, poniendo en primer plano el cuadro físico de la transformación del impulso en un proceso periódico en vez de la operación matemática del desarrollo de la función no periódica, que describe el impulso, en sus componentes armónicas.

Cierta disconformidad deja, puede ser, el hecho, de que para el análisis de la acción *periódica* obtenida nosotros hayamos recurrido a la operación matemática del desarrollo de una función periódica en sinusoides. Sin embargo, aquí también se puede utilizar un método más físico. Nosotros hemos operado con una red ordinaria (de rendijas), es decir, compuesta de sectores transparentes y no transparentes alternados periódicamente. En otras palabras, el *coeficiente de transmisión* τ de la red varía a lo largo de la red a saltos periódicos desde 0 hasta 1 (fig. 9.31, *a*). Supongamos ahora que nosotros disponemos de una red, cuya transparencia varía a lo largo de la coordenada x según la ley sinusoidal $\tau = \operatorname{sen} (2\pi/d)\, x$, donde d es el período espacial de la red, es decir τ varía desde $+1$ hasta -1 (véase fig. 9.31, *b*). El hecho de que τ tome valores negativos, es decir que las amplitudes de la luz transmitida se vuelvan negativas, tiene un sentido muy simple: esto significa que las fases de las ondas con amplitudes positivas y negativas son contrarias. Por consiguiente, nuestra red influye sobre la amplitud y la fase: la amplitud en la mitad del período espacial varía desde la unidad hasta cero y en la segunda mitad, crece desde cero hasta la unidad, pero la fase ha sido cambiada por su opuesta.

Repitiendo los razonamientos expuestos anteriormente (véase fig. 9.30) para esta red, obtendremos que al punto P (en la direc-

ción φ) llegará una perturbación luminosa, que varía en el tiempo según la ley

$$\operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t,$$

donde $T = \frac{d \operatorname{sen} \varphi}{c}$.

En efecto, al punto P al pasar algún tiempo llegarán las perturbaciones desde los sectores, cuyos coeficientes de transmisión varían según la ley $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{d} x$, en donde x crece proporcionalmente al tiempo de manera que en este tiempo T el valor de x varía en d, es decir, $x = \frac{d}{T} t$. Por lo tanto, la perturbación en P varía según la ley

$$\operatorname{sen} \frac{2\pi}{d} x = \operatorname{sen} \frac{2\pi}{d} \frac{d}{T} t = \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t.$$

Si nuestra red es infinita en su extensión (es decir tiene un poder separador infinitamente grande), entonces esta perturbación sinusoidal no será limitada en el tiempo y constituirá una luz estrictamente monocromática de período T o de longitud de onda $\lambda = cT = d \operatorname{sen} \varphi$.

Así pues, la condición para la formación de máximo en el caso de una red *sinusoidal* tiene la forma

$$d \operatorname{sen} \varphi = \lambda \qquad (51.1)$$

en lugar de la condición $d \operatorname{sen} \varphi = m\lambda$, que caracteriza una red corriente de difracción. La diferencia fundamental consiste en que *la difracción en una red sinusoidal lleva a la formación de máximos sólo de primer orden* ($m = \pm 1$) a distinción de las redes corrientes, donde se forman máximos de orden cero y de diferentes órdenes (Rayleigh). Por eso la onda monocromática con longitud λ en esta red experimentará difracción sólo bajo los ángulos $\pm\varphi$, que se determinan de (51.1). Un impulso de forma arbitraria, al incidir sobre una red sinusoidal de período d y con un poder separador infinito, se transformará en un conjunto de ondas monocromáticas, cada una de las cuales se propaga en su dirección φ, que es definida por la condición (51.1). La interrelación de las intensidades (de las amplitudes) de cada una de estas ondas monocromáticas depende de la forma del impulso. Si la red no tiene un número infinitamente grande de trazos, entonces la duración de los diferentes trenes que van por distintas direcciones φ disminuirá y las ondas separadas del impulso dejarán de ser estrictamente monocromáticas. Estos trenes aproximadamente monocromáticos, en los cuales la red limitada convierte el impulso, se definen tanto por la forma del impulso, como también por las dimensiones de la red, es decir para dado período por el *número* de sus trazos. Estos parámetros caracterizan el poder separador de la red.

Para otros aparatos espectrales los razonamientos se complican un tanto, pero la esencia del problema es la misma*) (véase también ejercicio 92).

10. DIFRACCIÓN EN ESTRUCTURAS MULTIDIMENSIONALES

§ 62. La red de difracción como una estructura unidimensional

Lo expuesto en el § 50 (en particular, el rasgo característico establecido por Rayleigh de la difracción en redes sinusoidales que dan espectros sólo de primer orden) permite con ayuda de un método bastante general y de gran importancia práctica examinar el problema acerca de la difracción en estructuras de cualquier tipo. Cualquiera que sea la estructura (en particular, incluso si ella no es periódica), los fenómenos de difracción siempre tienen lugar. Sin embargo, los cálculos del cuadro de difracción en este caso prácticamente muy difundido son mucho más dificultosos. Rayleigh señaló un método extraordinariamente general de resolución de tales problemas.

En el § 4 nosotros vimos que cualquier función del tiempo puede ser representada como un conjunto de funciones sinusoidales del tiempo con diferentes períodos, amplitudes y fases. De manera análoga cualquier estructura espacial, cuyas propiedades, por ejemplo el coeficiente de transmisión, son funciones de las coordenadas espaciales, se puede representar como un conjunto de estructuras sinusoidales (teorema de Fourier). En particular, si el coeficiente de transmisión de la estructura depende de una sola coordenada, por ejemplo de x, entonces el coeficiente de transmisión de las diferentes estructuras sinusoidales se representará en la forma $a \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{d}x+\psi\right)$, donde a es la amplitud, d, el período espacial y ψ, la fase. Una estructura no periódica se representa por un conjunto de estructuras sinusoidales con período que varía continuamente (representación en forma de integral de Fourier). Una estructura periódica con período d se representa en forma de una suma de términos de una serie, uno de los cuales en caso general puede ser una magnitud constante, y los demás son funciones sinusoidales de x con período igual a d, $^1/_2\,d$, $^1/_3\,d$, . . ., es decir, los demás términos tendrán la forma $a_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{d}x+\psi_n\right)$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$ (represen-

*) Los problemas acerca de la descomposición espectral y del rol transformador del aparato espectral son estudiados detalladamente en el libro: *G. S. Gorelik* «Ondas y oscilaciones», Fismatgiz, 1959.

tación en forma de serie de Fourier). El carácter de la estructura examinada define los valores de las amplitudes y de las fases de los diferentes términos sinusoidales de la serie. De esta manera, se puede calcular la difracción en una estructura compleja mediante el análisis de la difracción en cada componente del desarrollo de Fourier de esta estructura. El término constante del desarrollo de Fourier da el máximo de orden cero, y cada uno de los términos sinusoidales, dos máximos de primer orden ($m = \pm 1$). Debido a que los períodos de las estructuras sinusoidales son distintos, los ángulos de difracción de los correspondientes máximos de primer orden también serán diferentes, y en conjunto se obtendrá el cuadro completo de difracción de toda la estructura. Desde este punto de vista los máximos de orden superior de la red corriente de difracción son los máximos de primer orden de su correspondiente sumando sinusoidal. Por ejemplo, los máximos de tercer orden ($m = \pm 3$) son los máximos de primer orden ($m = \pm 1$) en la tercera estructura sinusoidal, cuyo período es igual a $^1/_3\, d$. De esta manera, para la red *unidimensional* estudiada por nosotros (red con un coeficiente de transmisión, que varía a lo largo de una sola coordenada), con ayuda de este método más general de análisis obtenemos un resultado que concuerda con el experimento.

§ 58. Difracción en estructuras bidimensionales

Mucho más ampliamente está difundido el caso, cuando el coeficiente de transmisión de la lámina, dispuesta en el camino del haz luminoso, no varía a lo largo de una dirección, sino por toda la superficie de nuestra lámina. Como ejemplo puede servir una lámina de un vidrio cubierto desordenadamente de polvo o un cristal de ventana cubierto de hielo invernal. Se comprende que tal variación del coeficiente de transmisión puede ser caracterizado como la variación a lo largo de las dos coordenadas de nuestra superficie, de manera que la estructura examinada será *bidimensional*. En el caso más simple ésta será una estructura bidimensional periódica (red bidimensional), y en general será un conjunto de muchas redes bidimensionales.

Examinemos una red bidimensional que está constituida por redes perpendiculares cruzadas con períodos d_1 y d_2. Un caso parecido es fácil de realizar, al colocar de manera inmediata una tras otra dos redes ordinarias de difracción marcadas en láminas de vidrio, cuyos trazos son mutuamente perpendiculares.

Un haz estrecho de luz monocromática, al atravesar la primera red con trazos verticales, debe dar un conjunto de máximos (de órdenes cero y superiores) a lo largo de una línea horizontal.

El haz luminoso correspondiente a cada máximo, al pasar a través de la segunda red, se descompone formando un nuevo conjunto

de haces luminosos que dan máximo a lo largo de una línea vertical. El cuadro total del espectro es parecido al representado en la fig. 10.1. Las cifras 0,0; 0,1; 1,1; 1,2, etc. cerca de las pequeñas manchitas significan el orden del espectro en la primera y segunda redes; la intensidad de éstas disminuye según la ley de distribución de la intensidad en los espectros de difracción de la red. No es difícil formular una teoría elemental de difracción para esta red.

Sea que la luz incide normalmente sobre tal red. Escojamos la dirección de la luz como eje Z, y las direcciones a lo largo de las redes como ejes X y Y; caractericemos las direcciones del haz incidente con los ángulos α_0, β_0 y γ_0, y del haz difractado, con los ángulos α, β y γ. En nuestro caso $\alpha_0 = \pi/2$, $\beta_0 = \pi/2$ y $\gamma_0 = 0$, es decir, $\cos\alpha_0 = \cos\beta_0 = 0$, $\cos\gamma_0 = 1$.

La desviación del rayo difractado a lo largo de X traerá consigo la formación de mínimos y máximos de luz en dependencia de la magnitud del ángulo de difracción. Aplicando la teoría de la red unidimensional, nosotros hallaremos que las posiciones de los máximos principales deberán satisfacer las condiciones

$$d_1 \cos\alpha = \lambda,\ 2\lambda,\ 3\lambda,\ \ldots,\ m_1\lambda. \tag{53.1}$$

De manera análoga la difracción en la dirección del eje Y dará los máximos principales en las direcciones definidas por las condiciones

$$d_2 \cos\beta = \lambda,\ 2\lambda,\ 3\lambda,\ \ldots,\ m_2\lambda. \tag{53.2}$$

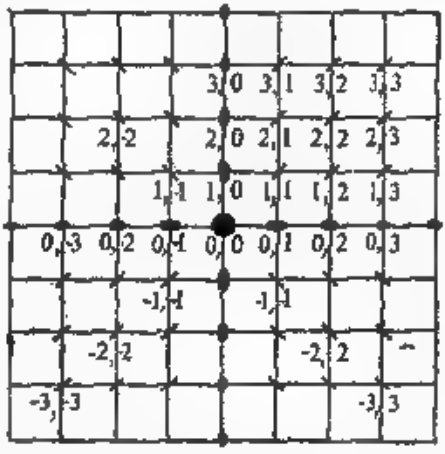


Fig. 10.1. Representación esquemática de la distribución de la intensidad en el caso de difracción por una red bidimensional.

De esta manera, los máximos principales sólo son posibles en las direcciones, que satisfacen a los dos conjuntos de condiciones escritas anteriormente, además a cada par de valores de los números enteros m_1 y m_2 le corresponde un máximo de uno u otro orden. Con los valores α y β hallados de esta manera determinaremos los valores del ángulo γ basándonos en la relación geométrica

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{53.3}$$

De esta manera, de las tres condiciones:

$$\left.\begin{aligned} &d_1\cos\alpha = m_1\lambda, \\ &d_2\cos\beta = m_2\lambda, \\ &\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \end{aligned}\right\} \tag{53.4}$$

donde m_1 y m_2 son números enteros, nosotros definimos para determinadas estructuras (d_1, d_2) y longitud de onda λ los valores de los ángulos α, β, γ, bajo los cuales serán observados los máximos principales de luz. Si suponemos que nuestra red contiene un número grande de elementos (trazos), entonces los máximos principales serán muy nítidos y en ellos se concentrará casi toda la energía luminosa de las ondas refractadas. De esta manera, la luz se observará prácticamente sólo en direcciones discretas, más exactamente, en el pequeño ángulo sólido cerca de las direcciones señaladas.

Si las redes d_1 y d_2 no son mutuamente perpendiculares y forman algún ángulo entre sí, entonces en principio nuestros razonamientos seguirán siendo válidos, solamente variarán las relaciones geométricas. La posición de los máximos (manchas), por supuesto, dependerá también del ángulo entre los trazos de las redes. De esta manera, según la disposición de las pequeñas manchas se puede juzgar sobre la *estructura de la superficie con trazos*: acerca de la magnitud de los *períodos* d_1 y d_2 y de la orientación mutua de las redes.

Si la estructura superficial no es periódica, entonces es necesario aplicar el método de Rayleigh para resolver el problema. El cuadro resultará más complicado. En particular, si la estructura está compuesta de partículas próximas según sus dimensiones y forma, pero orientadas desordenadamente (lámina empolvada, hielo invernal sobre un cristal), entonces esta estructura será equivalente a un conjunto de simples redes con todas las posibles orientaciones, y el correspondiente cuadro de difracción se presentará en la forma de una serie de círculos concéntricos. Este fenómeno es fácil de observar, si se examina una pequeña fuente brillante de luz a través de esta lámina.

§ 54. Fenómenos de difracción en estructuras tridimensionales

La difracción en heterogeneidades espaciales ofrece un mayor interés y un significado práctico. En este caso la onda se propaga no en un medio homogéneo, sino en un medio, en el cual están incluidos sectores, donde la velocidad de la onda difiere de la velocidad en las partes restantes del medio, es decir, sectores con otro índice de refracción.

Si el medio es completamente homogéneo desde el punto de vista óptico, es decir el índice de refracción de cualquier región pequeña*) es igual al de otra región, entonces la onda luminosa se propagará en el medio sin variar su dirección.

En particular, una onda plana, al propagarse en este medio, se mantendrá plana. Esta deducción puede ser corroborada con raso-

*) Se considera pequeña la región, cuyas dimensiones lineales son pequeñas en comparación con la longitud de la onda luminosa.

namientos, parecidos a los que sirven (según Fresnel) para explicar la propagación rectilínea de la luz. Pero si la homogeneidad del medio ha sido violada por algunas impurezas o a consecuencia de algún proceso, es decir, si en el medio se encuentran regiones, cuyos índices de refracción difieren del de la parte restante, entonces en estas heterogeneidades deberán aparecer fenómenos de difracción y parte de la luz se difractará (se desviará) de su dirección inicial.

En efecto, las partes del frente ondulatorio, que van por las regiones de diferente índice de refracción, se propagarán con diferente velocidad, de manera que el frente de onda, es decir, la superficie de una misma fase, dejará de ser plana y la luz se propagará en distintas direcciones.

En la naturaleza se observan muy a menudo fenómenos de este tipo. A ellos se refiere, ante todo, la propagación de la luz en la niebla, que posee un gran significado para la orientación de los barcos en la bruma. Precisamente esta tarea práctica dio el primer motivo para el estudio minucioso de este fenómeno (Tyndall, 1868). El fenómeno de difracción en las irregularidades espaciales desempeña un papel esencial en la óptica meteorológica, al condicionar la aparición de los círculos y anillos alrededor del Sol y de la Luna (los llamados halo y coronas). La aparición de éstos se explica con la refracción y difracción de los rayos solares o lunares por las pequeñas partículas suspendidas en el aire.*)

El fenómeno de difracción en los obstáculos o heterogeneidades espaciales es fácil de observar en aquellos casos, cuando el número de tales heterogeneidades es muy grande, y sus dimensiones son insignificantes. En este caso se acostumbra llamar *turbio* el medio, y el fenómeno de difracción generalmente lleva el nombre de *difusión* de la luz. En adelante nosotros examinaremos más detalladamente este fenómeno, en particular para el caso cuando éste no está relacionado con la obstrucción del medio por partículas ajenas, sino que es consecuencia de la estructura molecular del medio. Señalemos que para las ondas de la luz corriente la estructura molecular del medio por sí misma no condiciona heterogeneidad, ya que la dimensión de las moléculas es miles de veces menor que la longitud de la onda luminosa. «La turbiedad molecular» es resultado de la acumulación casual de un número considerable de moléculas, que se forma debido a su desordenado movimiento térmico. Al contrario, para ondas de muy pequeña longitud, por ejemplo, para los rayos X, incluso la misma presencia de moléculas condiciona la heterogeneidad del medio y trae consigo la difracción (difusión).

---

*) Es necesario diferenciar las coronas de pequeño radio, las cuales se forman como resultado de la *difracción* en las gotitas de agua, de los grandes halos circulares (con dimensiones angulares de 22 y 46°) condicionados por la refracción en los pequeños cristales hexagonales de hielo suspendidos en el aire.

El examen de la difracción en heterogeneidades espaciales de cualquier forma constituye un problema muy complicado. Por eso nosotros nos limitaremos al caso más simple, cuando las heterogeneidades tienen un carácter periódico regular, es decir, constituyen lo que nosotros llamamos red. Sin embargo, en este caso la estructura periódica del medio tiene un carácter espacial, es decir, la red se extiende en el medio por todas las direcciones. Nosotros podemos representarla como un conjunto de estructuras periódicas en las tres direcciones y estudiar la difracción de las ondas planas en esta red *espacial* tridimensional.

Utilizando el método de Rayleigh (véase § 52), se puede estudiar la difracción en cualquier estructura espacial, incluso en las no periódicas (difusión de la luz).

Supongamos que nuestro medio constituye a lo largo del eje X una estructura periódica con período d_1, a lo largo del eje Y, una red con período d_2 y a lo largo del eje Z, una red con período d_3, donde d_1, d_2 y $d_3 > \lambda$. Limitémonos al caso de cristales rómbicos*), para los cuales las aristas de la célula elemental (d_1, d_2 y d_3) son mutuamente perpendiculares entre sí. A ellos, por supuesto, se refieren como casos particulares las redes tetragonal ($d_1 = d_2$, d_3) y cúbica ($d_1 = d_2 = d_3$). La dirección de propagación de la luz se da por los tres ángulos entre la normal ondulatoria y los ejes de coordenadas, los cuales designemos con α_0, β_0 y γ_0 para la luz incidente y α, β, γ, para la difractada.

Sea que la luz incide a lo largo del eje Z, es decir, $\alpha_0 = \beta_0 = \pi/2$ y $\gamma_0 = 0$. Examinemos alguna capa paralela al plano XY, es decir una capa, para la cual $z = \text{const}$. Esta capa es nada más que una red bidimensional, y la luz, al pasar a través de ella, experimenta la difracción que ha sido examinada en el paragrafo anterior. Para *cada* longitud de onda λ obtendremos máximos en las direcciones dadas por los valores de los ángulos α, β y γ, que se determinan de la condición (53.4).

Sin embargo, en nuestro caso el medio constituye un conjunto de estas redes bidimensionales, dispuestas periódicamente a lo largo de Z con un período d_3. Si cada capa de la red es lo suficientemente transparente, entonces parte de la luz experimentará una difracción en la primera capa, y una parte la atravesará hasta llegar a la siguiente capa, en donde parcialmente experimentará difracción, y el resto llegará más adelante y así sucesivamente. De esta manera, en la dirección hallada anteriormente (α, β, γ) se propagarán varias ondas coherentes con una determinada diferencia de recorrido, y nosotros deberemos tomar en consideración su interferencia mutua para obtener el resultado final.

*) En el caso general de cristales triclínicos, cuando las aristas de las células se intersecan bajo ángulos no rectos, el análisis del problema exigiría la aplicación de un sistema oblicuángulo de coordenadas.

Este resultado es fácil de obtener utilizando la fig. 10.2, esquemática, donde OZ es la dirección de la onda incidente; AM, BN, CQ y DS, . . . son las direcciones de las ondas difractadas en las diferentes capas representadas esquemáticamente por las pequeñas áreas p_1, p_2, p_3, . . . Las direcciones AM, BN, . . . forman el ángulo γ con la dirección OZ. La distancia $AB = BC = CD = \ldots = d_3$ es el tercer período de nuestra estructura. Entre cada par de rayos se tiene una diferencia de recorrido igual a

$$(AB - AM) = (BC - BN) = (CD - CQ) = \ldots$$

Para que las ondas, desviadas por cada capa en la dirección indicada, se intensifiquen mutuamente, es necesario, que esta diferencia de recorrido sea igual a un *número entero de ondas.*

Esta condición adicional se expresará en la forma

$$d_3 - d_3 \cos\gamma = m_3\lambda.$$

De esta manera, en el caso de difracción en una estructura espacial con períodos d_1, d_2 y d_3 nosotros obtendremos máximos de luz sólo en las direcciones que satisfacen las siguientes *cuatro* condiciones:

$$\left.\begin{aligned} d_1\cos\alpha &= m_1\lambda \\ d_2\cos\beta &= m_2\lambda \\ d_3(1-\cos\gamma) &= m_3\lambda \end{aligned}\right\} \quad (54.1),\ (54.2),\ (54.3)$$

(condiciones de difracción),

donde m_1, m_2 y m_3 son números enteros y

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

(condición geométrica). (54.4)

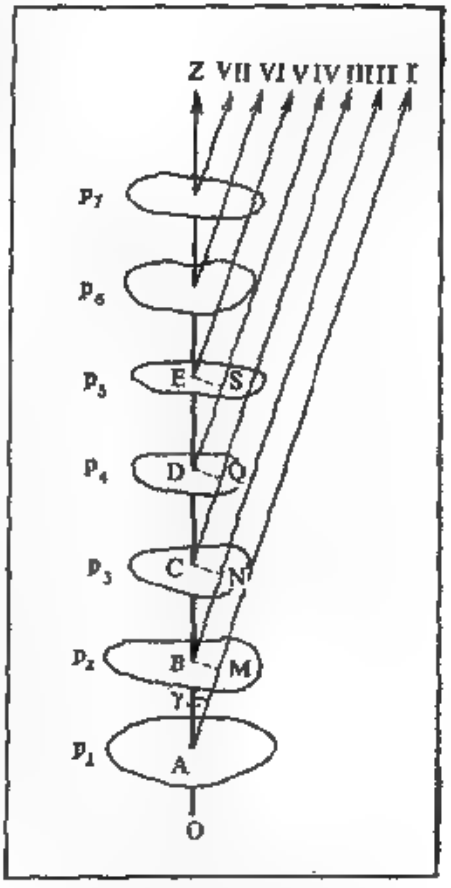


Fig. 10.2. Esquema de la difracción por una estructura tridimensional.

No es difícil ver, que no se puede, en general, para *cualquier* longitud de onda obtener la dirección (α, β, γ), para la cual se cumplan todas estas condiciones. En efecto, eliminando α, β y γ de estas ecuaciones, hallaremos la relación

$$\frac{m_1^2\lambda^2}{d_1^2}+\frac{m_2^2\lambda^2}{d_2^2}+\frac{(d_3-m_3\lambda)^2}{d_3^2}=1. \qquad (54.5)$$

que muestra qué valores deberá tener la longitud de onda λ para que en estructura *dada* y dirección inicial de propagación de la luz *prefijada*, se formen nítidos máximos de difracción.

Así, a diferencia de la difracción en redes lineales y superficiales, la difracción en determinada red espacial da máximos *no para todas las longitudes de onda*, sino solamente para aquellas, que satisfacen la condición indicada (54.5).

De esta manera, si se dirige un haz paralelo de todas las longitudes de onda (luz blanca) hacia una red *lineal*, entonces obtendremos máximos para *cada* longitud de onda, los cuales se dispondrán a lo largo de la línea perpendicular a los trazos de la red (espectro). Si el haz paralelo de luz blanca incide sobre una red bidimensional, entonces tendremos máximos para todas las longitudes de onda, que se dispondrán con determinado orden en el plano paralelo al de la red (manchas de colores). Pero si la luz de todas las longitudes de onda se envía hacia una red espacial, entonces se obtendrán máximos de difracción sólo para *ciertas* longitudes de onda, las cuales satisfacen la condición anteriormente indicada. Las ondas de otras longitudes formarán un máximo de difracción de orden cero.

Según la disposición de los máximos y el valor de las longitudes de onda λ, a las cuales ellos corresponden, resulta posible reproducir unívocamente aquella red espacial que condicionó la difracción.

§ 54. Difracción de rayos X

El caso observado de difracción en una red tridimensional tiene un significado extraordinario. El se realiza en la práctica en el caso de difracción de rayos X en los cristales naturales. Los rayos X constituyen ondas electromagnéticas, la longitud de las cuales es miles de veces menor que la longitud de las ondas de la luz corriente. Por eso la instalación de redes artificiales de difracción para los rayos X ofrece grandes dificultades. Nosotros vimos que esta dificultad puede ser evitada utilizando rayos, que incidan sobre la red bajo un ángulo próximo a 90°. A pesar de todo, la difracción de los rayos X fue realizada mucho antes de los experimentos con rayos oblicuos en las redes reflectoras de trazos. Según la idea de Laue (1913) en calidad de red de difracción para los rayos X fue utilizada una red espacial natural, la que constituyen los cristales. Los átomos y moléculas en el cristal están dispuestos en forma de una red perfecta tridimensional,

con la particularidad de que los períodos de estas redes son comparables con la longitud de onda de los rayos X. Si se dirige hacia este cristal un haz de rayos X, cada átomo o grupo molecular, de los cuales consta la red cristalina, provocará difracción de los rayos X. Nosotros tenemos el caso de difracción en una red tridimensional, que fue examinado anteriormente. En efecto, los cuadros observados de difracción responden a las particularidades características de la difracción en una red espacial.

Gracias al método de Laue se resuelven dos problemas de gran importancia. En primer lugar, se hace posible determinar la longitud de onda de los rayos X, *si es conocida la estructura* de aquella red cristalina, con la ayuda de cual se provoca la difracción. De esta manera se creó la espectroscopia de los rayos X que sirvió para el establecimiento de las importantísimas particularidades de la estructura del átomo (compárese con § 118). En segundo lugar, observando la difracción de los rayos X de conocida longitud de onda λ en una estructura cristalina de forma desconocida, nosotros obtenemos la posibilidad de reconocer esta *estructura*, es decir, la distancia mutua y la posición de los iones, átomos, y moléculas que componen el cristal. De esta manera fue creado el análisis estructural de las formaciones cristalinas que hizo posibles las importantísimas deducciones de la física molecular.

§ 58. Difracción de ondas luminosas por ondas ultrasacústicas

También es posible realizar una red espacial, en la cual es cómodo observar los fenómenos de difracción de las ondas luminosas *visibles*. A ellos se refieren, antes que todo, los fenómenos de difracción en ondas ultrasacústicas.

Como es conocido, en la lámina de cuarzo o de turmalina se puede provocar oscilaciones mecánicas de una frecuencia muy alta (hasta de 10^8 Hz). Esta lámina oscilante emite ondas elásticas (ultraacusticas) que se propagan en el medio circundante con la velocidad del sonido. Al introducir el cuarzo oscilante en algún líquido, por ejemplo, xileno, obtendremos ondas ultrasacústicas en este líquido. La onda elástica en el líquido es una onda de compresión y enrarecimiento, que se propaga con cierta velocidad. De esta manera, el líquido, en el cual se propaga la onda ultrasacústica, constituye una sucesión periódica de regiones de compresión y enrarecimiento, es decir de regiones que se caracterizan también por la diferencia en el índice de refracción de la luz. Por eso para la luz el líquido en el cual se propaga la onda ultrasacústica, es nada más que una red *física* (véase § 48), ya que al ser transmitida la luz a través de una columna de este líquido no ocurre ninguna variación de la amplitud sino de la fase de la onda luminosa. Si obligamos a la onda ultrasacústica reflejar-

se en el fondo del recipiente, entonces la superposición de las ondas transmitida y reflejada llevará a la formación de una onda ultraacústica *estacionaria*, que también constituye una estructura periódica de densidad variable, y por lo tanto, de un índice variable de refracción de la luz. En el caso de la onda ultraacústica estacionaria, así como en el de la transmitida, la red fásica obtenida tendrá un período igual a la *longitud* de la onda ultraacústica, lo que es fácil de ver de la fig. 10.3. En el xileno la velocidad de propagación de las ondas ultraacústicas es igual aproximadamente a 1000 m/s, por lo tanto para la frecuencia de 10^8 Hz la longitud de la onda ultraacústica $\lambda = 10^{-3}$ cm $= 10$ μm. Así, obtenemos una red fásica con el período de 10 μm, bastante cómoda para observar la difracción de ondas luminosas. En el mismo cristal que sirve para provocar las ondas, también aparecerá una onda ultraacústica estacionaria y, por consiguiente, el cristal oscilante también puede servir como red fásica de difracción*).

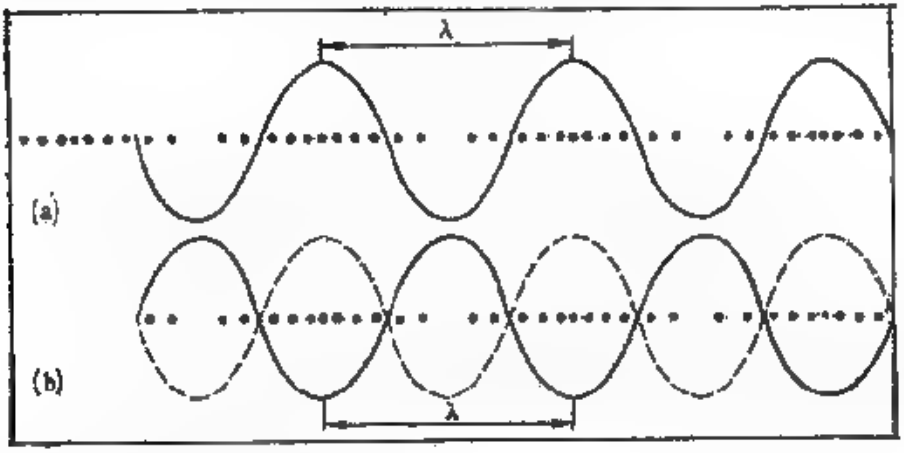


***Fig. 10.3.** Distribución de la densidad en las ondas ultraacústicas móviles (a) y estacionarias (b).*

Tanto en la onda estacionaria, como en la móvil, las longitudes de las regiones que se repiten de compresión y enrarecimiento son iguales a la longitud de la onda ultraacústica en el medio.

*) Para la mayoría de los líquidos la velocidad de las ondas ultraacústicas, la cual no se diferencia de la velocidad de las ondas sonoras comunes, es próxima a 1000—1500 m/s. Para los sólidos transparentes (vidrio, cuarzo) las velocidades son de 5000—6000 m/s. Por eso en todas estas sustancias cómodamente se pueden realizar los experimentos de difracción en ondas ultraacústicas con frecuencias de las oscilaciones de hasta 10^9 Hz y más. Cuando se trabaja con ondas estacionarias es importante, que la intensidad de la onda reflejada sea próxima a la de la transmitida. Por eso es mejor operar con sustancias, donde las ondas ultraacústicas son absorbidas débilmente. De los líquidos, el xileno y el agua

Al transmitir un haz de luz blanca a través del recipiente con líquido, en el cual ha sido provocada la onda ultraacústica (fig. 10.4), nosotros obtendremos en la pantalla el espectro con una dispersión que responde al período de la red de difracción, calculado según la frecuencia de oscilaciones del cuarzo y según la velocidad de la onda ultraacústica en el líquido (fig. 10.5).

Si enviamos la onda ultraacústica por las tres direcciones, tendremos una red espacial para los rayos luminosos. Pero también es verdad que incluso en el caso del dispositivo mostrado en la fig. 10.4, cuando las ondas ultraacústicas van en la dirección del eje Z, en esencia, tenemos una red espacial, pero en las direcciones X e Y el período de la red es cero, es decir, se tienen planos reflectores continuos, o sea espejos. La ley de reflexión en estos espejos (el rayo incidente y el rayo reflejado se encuentran en un plano con la normal al

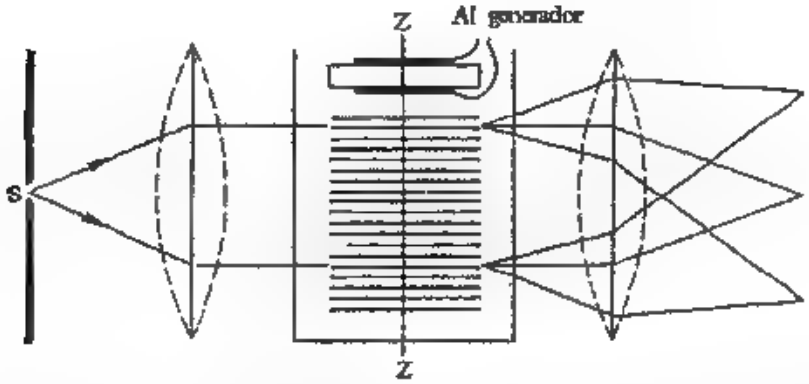


Fig. 10.4. *Esquema de observación de la difracción en las ondas ultraacústicas.*

espejo, y el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión) dará los valores de los ángulos α y β en las relaciones (54.1)—(54.4), y la interferencia mutua de los rayos reflejados en el sistema de espejos, la tercera condición de difracción para el ángulo γ. De esta manera, también en este caso nosotros tenemos para los tres ángulos tres condiciones de difracción y una cuarta, geométrica. El fenómeno de difracción espacial (máximos discretos para determinadas longitudes de onda) aquí no se manifiesta tan claramente como en el caso de los rayos X, ya que las dimensiones de toda la columna, en la cual se produce la difracción, en el caso dado no son grandes en comparación

son los que absorben menos las ondas ultraacústicas. Es necesario señalar que la absorción crece proporcionalmente al cuadrado de la frecuencia de la onda ultraacústica.

con el período de la red, de manera que nosotros, en esencia, tenemos el caso de transición de la red plana a una tridimensional.

Es interesante señalar que la red física, obtenida con ayuda de ondas ultrasacústicas, se distingue por una particularidad más. El índice de refracción posee no sólo una periodicidad espacial, sino que varía periódicamente *en el tiempo*, con el período de la onda ultrasacústica, es decir, aproximadamente 10^7—10^8 veces por segundo. Esto lleva a que la intensidad de la luz difractada experimente una variación periódica con la misma frecuencia, es decir, una *modulación*. De acuerdo con lo expuesto en el § 4, esto significa que si sobre la onda ultrasacústica incide una luz monocromática de frecuencia $\nu \approx 5 \cdot 10^{14}$ Hz, entonces la luz difractada poseerá una frecuencia modificada, igual a $\nu \pm N$, donde N es la frecuencia de la onda ultrasacústica utilizada. Si $N \sim 10^8$ Hz, entonces la variación de la frecuencia será insignificante y constituirá algunas diezmillonésimas de la inicial. Tal variación ha sido observada en el experimento. Cuando estudiemos el problema acerca de la difusión de la luz (véase § 162) nosotros nos encontraremos con un fenómeno semejante, el cual posee un significado científico y práctico extraordinariamente grande.

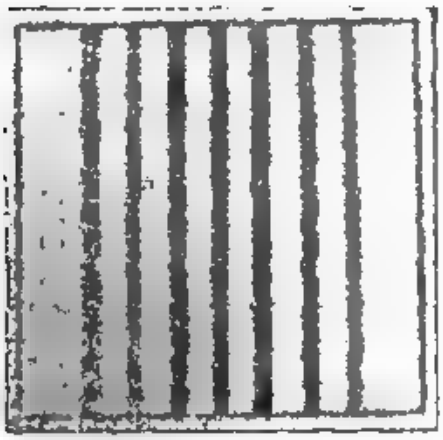


Fig. 10.5. Espectros obtenidos en el caso de difracción en una onda ultrasacústica.

El análisis expuesto es aplicable a la onda ultrasacústica estacionaria, donde el índice de refracción en cada punto varía con el tiempo. Para la onda ultrasacústica móvil la variación de la frecuencia es más fácil de representar como resultado de la reflexión de la luz en las superficies móviles, las cuales son las superficies del frente de la onda móvil, es decir, como resultado del efecto Doppler (véase § 127). En la onda que se mueve hacia un lado la variación de la frecuencia de la luz refractada corresponderá al aumento de frecuencia $(\nu + N)$, y en la onda que se mueve a su encuentro corresponderá a la disminución $(\nu - N)$. La onda estacionaria, como un conjunto de dos ondas que se mueven al encuentro, condiciona el cambio de frecuencia expresado por la fórmula $\nu \pm N$. Un cálculo no complicado muestra que tanto según el método de ondas estacionarias (modulación), como según el método de ondas móviles (efecto Doppler) obtendremos, por supuesto, un mismo valor (N) del cambio de la frecuencia de la luz incidente.

El estudio de la difracción de la luz por ondas ultraacústicas se ha convertido en un importante método de investigación de las leyes de propagación de estas ondas en la sustancia y sirve para la investigación de los problemas acerca de la física molecular; para algunas aplicaciones técnicas se utiliza la defectoscopia ultraacústica.

11. HOLOGRAFIA

§ 57. Introducción

El período de las oscilaciones electromagnéticas que se refieren a la región óptica del espectro es extraordinariamente pequeño, causa por la cual los receptores de emisión de inercia más o menos grande son capaces de registrar solamente la magnitud media, en un período de oscilación, de energía luminosa, y no su valor instantáneo. Como resultado de esta promediación nosotros tenemos la posibilidad de juzgar sobre las amplitudes de las oscilaciones, pero perdemos por completo toda información acerca de las fases. Por otro lado, precisamente las fases de las ondas contienen en sí la información acerca de la disposición mutua de las partes de la fuente de luz acerca de su alejamiento del receptor, etc. De esta manera, los resultados de las mediciones, de los cuales ha sido excluida la información acerca de las fases de las oscilaciones llevadas por las ondas, no permiten, en forma general, formar una idea completa acerca de las propiedades de la fuente de estas ondas.

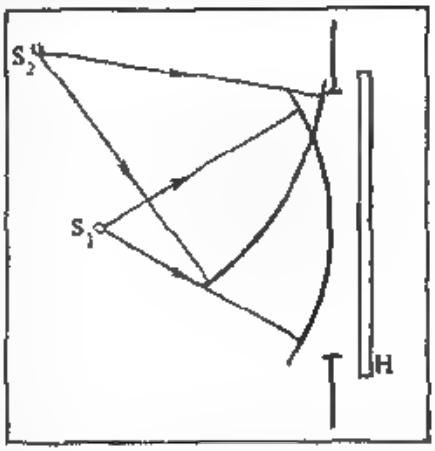


Fig. 11.1. Aclaración del problema acerca de la registración de la fase de una onda.

Sea, por ejemplo, que sobre la superficie de la placa fotográfica H (fig. 11.1) incide una onda esférica emitida por la fuente puntual S_1. La luz incidente provocará un ennegrecimiento uniforme de la parte expuesta de la capa fotosensible. El mismo resultado provocará también la onda que llegue de otra fuente puntual cualquiera, por ejemplo, de S_2. Se sobreentiende que la distribución de fases de las oscilaciones en la superficie del receptor, que se define por la distancia variable desde el frente ondulatorio hasta la superficie de la placa H (véase fig. 11.1), está relacionada unívocamente con la posición

de la fuente. Sin embargo, el desconocimiento de la fase, condicionado por las causas fundamentales indicadas anteriormente, nos priva de la posibilidad de hacer alguna deducción acerca de la localización de la fuente de ondas.

Nosotros podemos utilizar una lente o algún otro aparato óptico más complejo para hacer coincidir la placa fotográfica con la imagen S_1' de la fuente S_1 (fig. 11.2). Gracias al tautocronismo de los sistemas ópticos (véase § 20), todas las partes de la onda luminosa que pasan a través de las diferentes partes de la lente llegarán a la imagen S_1' con iguales desfasajes, y la información acerca de la posición de la fuente de luz se caracterizará por la localización de su imagen; midiendo la posición de la imagen y conociendo las propiedades del aparato óptico, se puede calcular las coordenadas de la fuente. Lo dicho se refiere, lógicamente, a cualquier punto de la superficie que se

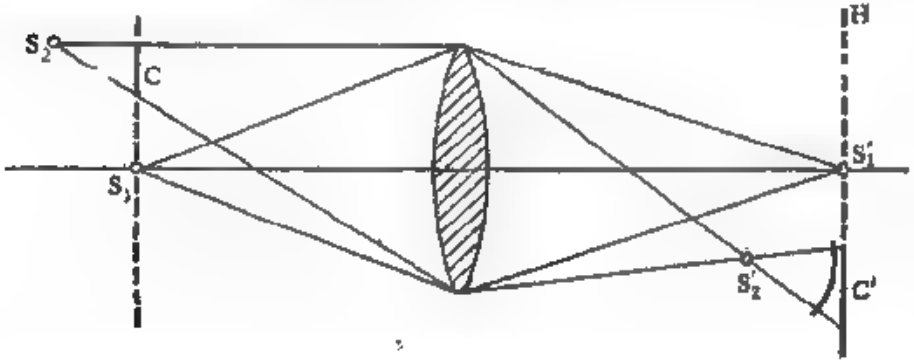


Fig. 11.2. Explicación al problema de la registración de ondas en los sistemas ópticos.

refleja en el plano H del receptor. El principio expuesto sirve como base para un gran número de los más variados aparatos ópticos, los cuales serán estudiados detalladamente en los capítulos XII—XV.

La aplicación del principio indicado, sin embargo, no puede garantizar la conservación de toda la información que nos interese acerca de la fuente de luz en una fotografía. Por ejemplo, la imagen S_2' de la fuente S_2 (véase fig. 11.2), que se encuentra fuera de la superficie del receptor H, provocará el ennegrecimiento de un sector de la lámina C', es decir, será el mismo efecto que el producido por la imagen del objeto C. Si consideramos S_2' cómo la fuente de la onda esférica incidente sobre H, y si recordamos la discusión sobre la fig. 11.1, entonces es fácil deducir que tanto al usar un sistema óptico, como sin él se tiene la causa física común de la insuficiencia en el conocimiento de las propiedades de las fuentes, es decir, la pérdida de informa-

ción sobre las fases de las oscilaciones al ser registradas éstas en el receptor.

De esta manera, tanto los ejemplos simples estudiados, como razonamientos generales nos llevan a la conclusión de que para obtener una idea completa acerca de la localización de las fuentes de ondas es necesario saber medir tanto la distribución de las amplitudes, como también la distribución de las fases de las ondas.

La medición de la distribución de las fases puede ser realizada con ayuda de los fenómenos de interferencia (véase caps. IV—VII). La esencia de la interferencia se encierra en que cuando se suman oscilaciones coherentes la diferencia de sus fases condiciona la variación de la amplitud de la oscilación resultante, en otras palabras, ocurre una *transformación de las correlaciones de fases de las ondas en la estructura de amplitudes* del cuadro de interferencia. Por lo tanto, si al receptor de emisión, además de la onda que nos interesa, se envía otra onda «de prueba» con una forma relativamente simple del frente, por ejemplo, plana o esférica, entonces el cuadro de interferencia resultante caracterizará completamente a la ley de cambio de la diferencia de fases de estas dos ondas en la superficie del receptor. Con este método tendremos la posibilidad de formarnos una idea acerca de la estructura física de la onda estudiada.

Se sobreentiende que es necesario observar las condiciones necesarias de coherencia de las oscilaciones interferentes y tomar una serie de otras medidas de carácter técnico, acerca de lo cual se hablará en el momento oportuno. Ahora ilustraremos el principio general mencionado con el análisis de ejemplos muy simples.

§ 38. Holografía de una onda plana

Sea que sobre la pantalla H incida la onda plana *1* (fig. 11.3, *a*). En calidad de onda de prueba o, como la llaman *testigo* escojamos también una onda plana *0*. El esquema de la fig. 11.3, *a* asegura, por supuesto, la coherencia de las ondas *1* y *0*, si la onda plana original que incide sobre el biprisma es en suficiente grado coherente. En la pantalla H se formará un cuadro (interferencial) que tiene la forma de franjas periódicas paralelas (véase § 15); la distancia $\mathscr{D}$ entre las franjas es igual a la relación entre la longitud de onda y el ángulo 2φ que forman las direcciones de propagación de las ondas *1* y *0* (véase (15.5)), es decir, $\mathscr{D} = \lambda/2\varphi$. Sea la pantalla H una placa fotográfica; fotografiando las franjas y midiendo la distancia entre ellas, podemos calcular el ángulo 2φ:

$$2\varphi = \lambda/\mathscr{D}.$$

De esta manera, determinamos la orientación de la onda *1* respecto a la onda testigo, es decir, extraemos la información acerca de la onda, la cual se encontraba en la distribución de las fases en la superficie del receptor.

Nosotros podemos no limitarnos a medir la distribución de los ennegrecimientos en la placa fotográfica, sino con su ayuda *reconstruir* de nuevo las ondas interferentes. En efecto, coloquemos la placa fotográfica en el mismo lugar y en la misma orientación, en los cuales fue realizada su exposición, y enviemos hacia ella una onda iluminadora, idéntica a la onda testigo *0*, cerrando la onda *1* con el diafragma *F* (véase fig. 11.3, *b*). Debido a que el ennegrecimiento de la lámina varía periódicamente, ella constituye una red de difracción con período $\mathscr{D}$. A la derecha de la lámina nosotros descubriremos un conjunto de ondas planas difractadas; las direcciones de su propagación (ángulos de difracción) se definen por la relación (véase § 47):

$$\theta = \varphi + m\lambda/\mathscr{D} = \varphi + m2\varphi,$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

en donde, para simplificar, se supone que el ángulo de incidencia φ y el de difracción θ son pequeños. Como siempre, el orden cero ($m = 0$) responderá a la propagación de la onda incidente (véase fig. 11.3, *b*). Para $m = -1$, tenemos $\theta = -\varphi$, es decir, esta onda se propaga exactamente en la misma dirección que la onda *1* en el momento de la formación del cuadro de interferencia obtenido según el esquema de la fig. 11.3, *a*. Esta última circunstancia ha sido reflejada en la fig. 11.3, *b* con las líneas punteadas que son continuación de los rayos *1* en el sentido opuesto a su propagación.

Los valores restantes $m = 1, \pm 2, \ldots$ responden a ondas complementarias que no se encon-

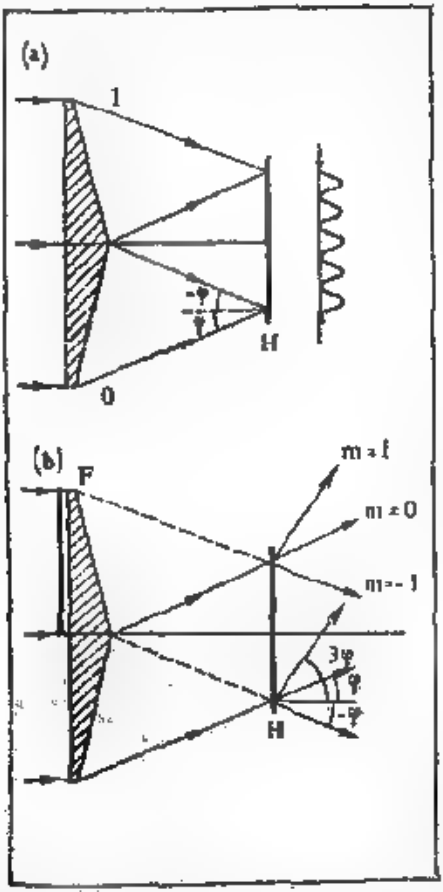


Fig. 11.3. Registración del cuadro de interferencia de dos ondas planas 0 y 1 (a) (a la derecha de H se muestra la distribución de la iluminación) y reconstrucción de la onda 1 con ayuda de la onda que atraviesa el holograma (b).

traban entre las ondas originarias (véase fig. 11.3, *a*). Como es conocido, la relación de la intensidad de las ondas difractadas que responden a diversos valores del orden m se define por la ley, según la cual varía el coeficiente de transmisión de la red a lo largo de su período (véanse § 46 y 48). Si la transmisión se subordina a la ley sinusoidal, entonces se formarán las ondas $m = 0, \pm 1$ (red de Rayleigh; véase § 51). En nuestro caso, la distribución de la iluminación de la placa fotográfica era sinusoidal, sin embargo, la transmisión de la placa revelada no es completamente sinusoidal, y por eso existirán ondas adicionales, aunque, como regla, ellas son de una intensidad relativamente baja. La onda $m = 1$ es una excepción, ya que su intensidad es la misma que para la onda $m = -1$.

De esta manera, el experimento descrito muestra que se puede no sólo registrar la información acerca de la distribución de las fases de la onda en la superficie del receptor, lo que era casi evidente de antemano, sino que si queremos podemos incluso reconstruir la onda que ha participado en la formación del cuadro de interferencia.

El método de registración de la fase de la onda y de su reconstrucción, estudiado anteriormente en el ejemplo de una onda plana, se llama *holografía*. En la traducción del grece «holografíe» significa «registro completo», es decir, en el nombre se hace hincapié en la posibilidad de registrar completamente la información sobre el campo ondulatorio en la superficie del receptor de luz. La placa fotográfica, en la cual ha sido fijado el cuadro de interferencia (en forma de ennegrecimientos), se llama *holograma*. Evidentemente, con este mismo fin se utilizan también otros receptores de luz, sin embargo, el método fotográfico técnicamente es el más elaborado y por eso es utilizado más frecuentemente que otros.

§ 59. Holografía de una onda esférica

En la fig. 11.4 es representado el esquema del experimento de obtención del holograma de una onda esférica emitida por la fuente puntual S. En calidad de onda testigo se utiliza una onda plana coherente a la esférica, la cual es desviada por la lámina P de tal manera, que ella incide sobre la pantalla H en forma perpendicular a su superficie.

En el plano H se puede observar un cuadro de interferencia que tiene la forma de anillos concéntricos, cuyo centro se encuentra en el punto O de intersección del plano H con la perpendicular trazada hacia él desde S. Un cuadro análogo fue descrito en el § 26, donde también se examinó la interferencia de las ondas plana y esférica (anillos de Newton). La distancia entre los anillos adyacentes disminuye a medida que crecen sus radios. Lo último se explica fácilmen-

te con ayuda de un simple cálculo de la diferenc.a de recorrido entre los frentes esférico y plano y de la correspondiente diferencia de fases ψ, definida por la relación

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{r^2}{2R} + \psi_0,$$

donde ψ_0 es cierta magintud constante; $R = SO$; r es el radio del anillo. La posición de los anillos brillantes se determina de la condición $\psi = 2\pi n_1$ (n_1 es un número entero), de manera que

$$r_n = \sqrt{2\lambda R n}, \quad n = n_1 - \psi_0/2\pi.$$

Desplazando la fuente se puede lograr una intensidad máxima en el centro del cuadro, lo que es equivalente a que la magnitud de $\psi_0/2\pi$

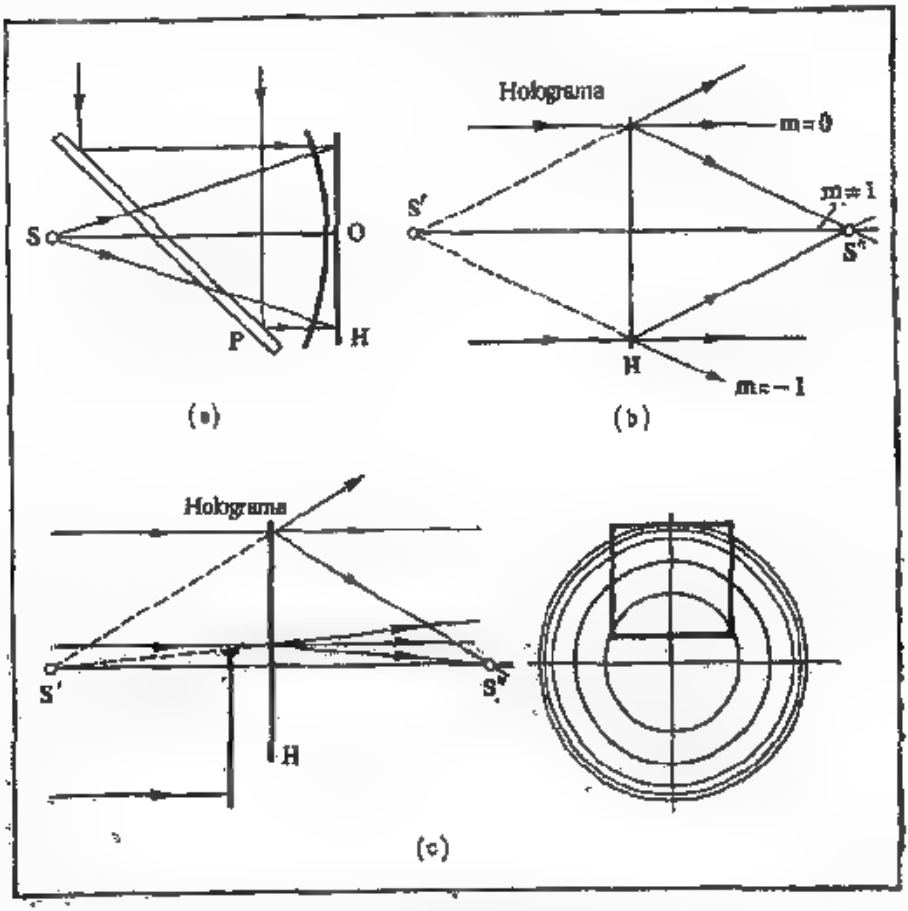


Fig. 11.4. Esquema de la toma de holograma de una onda esférica.
a, registración del cuadro de interferencia; b, iluminación del holograma; c, formación de las imágenes S' y S'' a partir del fragmento del holograma mostrado a la derecha.

sea un número entero; en estas condiciones, la diferencia $n = n_0 - \psi_0/2\pi$ coincide con el número del anillo. Midiendo el radio de algún anillo, podemos calcular el radio de curvatura del frente de onda en el punto O

$$R = r^2/2\lambda n$$

y localizar con esto la posición de la fuente.

De esta manera, también en el caso dado el «registro» de la fase de la onda es suficiente para aclarar sus propiedades geométricas.

Cambiemos la pantalla H por una placa fotográfica y fotografiemos el cuadro de interferencia. Como resultado obtendremos el holograma con alternados anillos transparentes y no transparentes, con la particularidad de que la ley de variación del radio de los anillos será la misma que en el caso de la placa zonal. Las propiedades de la placa zonal, expuestas en el § 34, permiten comprender fácilmente los resultados del siguiente experimento de reconstrucción del frente ondulatorio. Iluminando el holograma obtenido con una onda plana (*véase* fig. 11.4, *b*), *descubriremos* a la derecha del holograma varias ondas. Una de ellas (la plana) se propaga en la dirección de la onda incidente sobre el holograma; la segunda convergerá en el punto S''; la tercera divergirá y tendrá como centro el punto S'. El punto S' se encuentra a la misma distancia del holograma que la fuente S en el momento de la exposición (fig. 11.4, *a*), es decir, el punto S' puede ser observado como la fuente reconstruida S.

La explicación de los fenómenos descritos se desprende inmediatamente de las propiedades de enfoque de la placa zonal (véase § 34). Si la transmisión del holograma se rige por la ley sen $(\pi r^2/\lambda R)$, entonces no se formará ninguna onda, a excepción de las tres indicadas. Esta propiedad de las placas zonales es análoga a la capacidad de las redes de Rayleigh de formar máximos de difracción de órdenes $m = 0$ y ± 1 (véase ejercicio 88). Por eso a veces la placa zonal se denominada *red zonal*.

Si la transmisión en el holograma difiere de la indicada anteriormente, se observarán varias ondas más débiles convergentes y divergentes, las cuales no están mostradas en la fig. 11.4, *b* (véase § 34 y fig. 8.6)*).

Los hologramas poseen la importante propiedad de reconstruir el frente ondulatorio a partir de un fragmento no grande de éstos. Modifiquemos el esquema del experimento tapando parte del holograma con un diafragma, como se muestra en la fig. 11.4, *c*. El experimento muestra que la parte abierta del holograma, como antes, forma las «imágenes» virtual (S') y real (S'') de la inexistente fuente S.

*) Hay que tener presente que la magnitud r_m en el § 34 caracteriza el radio de la m-ésima zona de Fresnel. En el presente párrafo nosotros operamos con el radio del n-ésimo anillo brillante, y en los límites de cada período anular están incluidas dos zonas de Fresnel.

Se sobreentiende que la intensidad de las ondas de todos los órdenes disminuirá en correspondencia con la menor magnitud del flujo luminoso. Desde este punto de vista el comportamiento de la placa zonal es semejante al de una lente. En el caso del holograma de una onda plana que fue estudiado en el parágrafo anterior, la propiedad referida del holograma es evidente: si cerramos parte de la red de difracción, entonces la dirección de las ondas difractadas no cambiará, pero variará su intensidad y aumentará el ancho de los máximos principales (véase § 46). Por lo tanto, también en este sentido los hologramas de las ondas esférica y plana son semejantes entre sí.

El experimento realizado según el esquema de la fig. 11.4, *c* permite hacer dos conclusiones interesantes. En primer lugar, se podía no haber realizado la exposición del sector del holograma que fue cerrado posteriormente por el diafragma. Pero esto significa que el holograma puede ser confeccionado también en el caso de incidencia oblicua de la onda esférica sobre la pantalla *H* y la placa fotográfica, es decir, en la primera etapa de la preparación del holograma se puede trabajar según un esquema análogo al de la fig. 11.4, *c*. La onda reconstruida de orden $m = -1$ de todas maneras tendrá como centro de convergencia el punto S' que coincide con la posición de la fuente S en el momento de la exposición. En segundo lugar, en el esquema con incidencia oblicua (a diferencia de la fig. 11.4, *a*, *b*) se realiza una división espacial de los haces que forman las imágenes virtual y real de la fuente. Esta circunstancia constituye una indiscutible ventaja práctica, gracias a la cual en la mayoría de los aparatos holográficos se realiza una incidencia oblicua de los haces luminosos testigos.

§ 98. Hologramas de Fresnel de objetos tridimensionales

La onda testigo y la que ilumina el objeto pueden formarse como resultado de la división del amplio frente ondulatorio de la emisión láser Σ en dos partes (fig. 11.5, *a*). Una parte del frente se refleja en el espejo *Z*, mientras que la otra experimenta difusión por el objeto de observación *O*. Ambos campos ondulatorios alcanzan la placa fotográfica *P*, en la cual es registrado el cuadro resultante de interferencia, o sea, el holograma del objeto *O*. En la fig. 11.6 se muestra una fotografía corriente de algunos objetos, en la fig. 11.7, *a*, su holograma en tamaño natural y en la fig. 11.7, *b*, un sector del mismo holograma pero aumentado. Los anillos de interferencia en el holograma son resultado del efecto secundario provocado por la difracción de la luz en las partículas de polvo que aparecieron casualmente en el camino de la onda testigo.

Las imágenes del objeto se forman como resultado del paso a través del holograma de un haz láser de luz (fig. 11.5, *b*) y de la difrac-

ción de la luz en las heterogeneidades de su ennegrecimiento. En la dirección *1-1* se propaga el campo ondulatorio que forma la imagen real (IR) del objeto *sin ayuda del objetivo*. En la dirección *2-2* se reconstruye el campo ondulatorio, que ha experimentado difusión en el objeto de observación, como fue mostrado en la fig. 11.5, *a*. Este campo ondulatorio responde a la imagen virtual (IV) del objeto. Este campo puede ser utilizado, al desplazar en él el ojo o el objetivo, para la formación de diferentes imágenes del objeto visibles bajo diversos ángulos desde distintos puntos del espacio, como en la observación directa del objeto. El desplazamiento paraláxico, alcanzado en este caso, de los detalles de la imagen es mostrado en la fig. 11.8. Lo mismo se puede observar para las imágenes reales, si se hace pasar la luz a través de diferentes sectores del holograma.

Además de los campos ondulatorios examinados, detrás del holo-

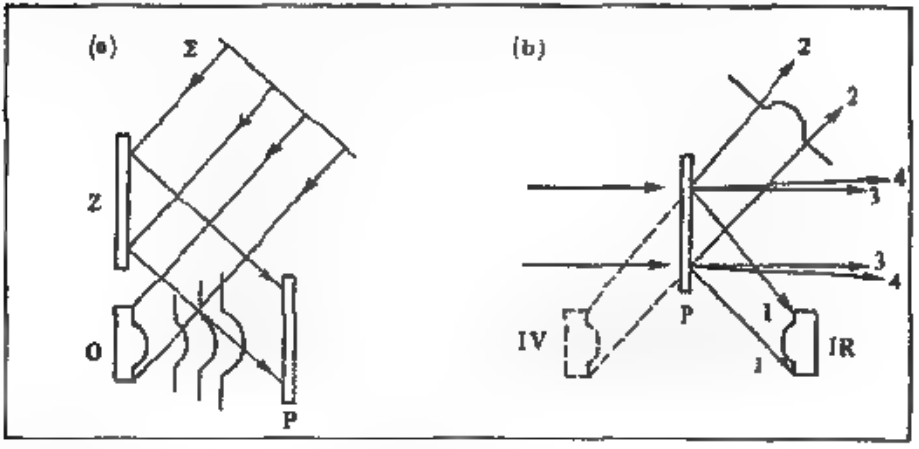


Fig. 11.5. *Esquema del experimento de toma de holograma de objetos tridimensionales difusores y de la reconstrucción de las imágenes de éstos.*

grama también se propagan el debilitado haz luminoso original *3-3* y el haz luminoso un poco divergente *4-4*. Estos haces no llevan información acerca del objeto de observación.

En el experimento estudiado la emisión dispersada por el objeto puede ser considerada como resultado de la difracción por él del haz láser iluminador. En el esquema de la fig. 11.5 el holograma no está muy alejado del objeto, por lo tanto a la señalada onda difractada conviene referirla al tipo de Fresnel (véase cap. VIII). Por eso los hologramas obtenidos en dispositivos de este tipo se llaman *hologramas de Fresnel*.

Para explicar el experimento descrito de gran efecto se puede razonar de la siguiente manera. En la primera etapa de la toma del

Fig. 11.6. Fotografía de los objetos a investigar.

Fig. 11.7. Holograma de los objetos (a) representados en la fig. 11.6. y un sector de éste fuertemente aumentado (b)

holograma la placa fotográfica percibe un campo más o menos complicado, cuyas propiedades físicas dependen de las particularidades geométricas del objeto y de la onda testigo, debido a que la emisión láser utilizada es espacialmente coherente. Cualquiera que sea este campo, se lo puede representar como un conjunto de ondas planas (teorema de Fourier). Cada una de ellas como resultado de la interferencia con la onda testigo crea un sistema periódico de franjas interferenciales con un período y una orientación característicos para este sistema. Cada cuadro elemental de interferencia lleva a la formación en el holograma de cierta red de difracción. De acuerdo con lo expuesto en el § 58 cada una de estas redes en la segunda etapa de la toma del holograma reconstruirá la onda plana original. Un análisis más detallado muestra que las ondas elementales reconstruidas se encuentran en las mismas relaciones de fase y de amplitud que el conjunto de ondas planas originales. Por eso el conjunto de ondas planas elementales reconstruidas reproducirá, de acuerdo con el teorema de Fourier, el campo completo dispersado por los objetos, precisamente el cual nosotros observamos visualmente o registramos fotográficamente.

Lo dicho se refiere a la onda elemental plana que en la fig. 11.3, *b* está designada como onda de orden $m = -1$. Además de ella la red elemental de difracción forma por lo menos dos conjuntos más de ondas, de primer orden y de orden cero. Las ondas $m = 0$ se propagan en la dirección de la onda testigo y no son captadas por el ojo, si éste está dispuesto de manera conveniente (véase fig. 11.5, *b*). Las ondas de orden $m = 1$ forman, como se verá, una segunda imagen real del objeto.

Para aclarar esta última circunstancia sería oportuno razonar de otra manera, basándonos en el análisis del holograma de una onda esférica. Cada punto del objeto constituye una fuente de onda esférica, su interferencia con

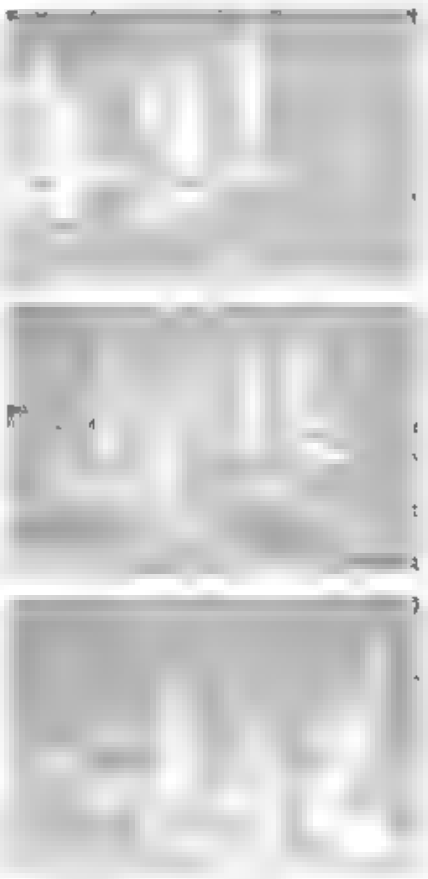


Fig. 11.6. Imágenes holográficas obtenidas para diferentes direcciones de observación

la onda testigo crea en el holograma una red elemental zonal, la cual en la segunda etapa de la toma del holograma reconstruye la onda esférica originaria y forma la imagen del punto escogido del objeto (punto S' en la fig. 11.4). El conjunto de redes elementales zonales crea, evidentemente, la imagen virtual de todo el objeto.

Además de la imagen virtual S' la red elemental zonal forma la imagen real S'' (véase fig. 11.4, *b*, *c*), precisamente el conjunto de las cuales condiciona la aparición de la imagen real del objeto completo.

Además de las redes elementales, condicionadas por la interferencia de la onda testigo con cada una de las ondas elementales, el holograma contiene una estructura adicional que aparece como resultado de la interferencia de las ondas elementales entre sí. Esta estructura adicional lleva a cierta difusión de la onda testigo o, lo que es lo mismo, a la formación de ondas adicionales difractadas que se concentran cerca de la dirección de propagación de la onda iluminadora *). Tal difusión de la onda testigo puede dificultar la observación de las imágenes regulares (virtual y real) del objeto. Sin embargo, si el ángulo de incidencia de la onda testigo sobre el holograma difiere lo suficientemente de los ángulos de incidencia de las ondas salidas del objeto, entonces las ondas adicionales no se sobrepondrán en las imágenes (véase ejercicio 236).

En la descripción cuantitativa de la holografía es cómodo emplear la representación compleja de las oscilaciones (véase § 4), la cual será empleada por nosotros. El campo que se crea en el plano del holograma como resultado de la difusión de la emisión láser por parte del objeto puede ser descrito en la forma

$$E(\rho) = A(\rho) \exp[i\varphi(\rho)], \tag{60.1}$$

donde ρ es el radio vector que se encuentra en el plano del holograma, $A(\rho)$ y $\varphi(\rho)$ son la amplitud y la fase de las oscilaciones luminosas en el punto con un radio vector ρ. La onda plana testigo se describe por la expresión**)

$$A_0 \exp(ik_0 r), \tag{60.2}$$

donde k_0 es el vector de onda, r, el radio vector de un punto arbitrario del espacio, A_0, la amplitud que tiene valor constante en los límites de la sección transversal del haz. Si el origen de coordenadas es colocado en la superficie del holograma, entonces en su plano el campo de la onda testigo tomará la forma

$$E_0(\rho) = A_0 \exp(i k_0 \rho). \tag{60.3}$$

*) Así llamaremos en adelante, para simplificar, la onda que atraviesa el holograma. (*N. de la R.*)

**) Por cuanto la condición de invariabilidad de la fase $k_0 r = \text{const}$ define el plano perpendicular a k_0, la expresión (60.2) realmente corresponde a una onda plana que se propaga a lo largo de k_0.

De esta manera, el campo resultante en la superficie del holograma se describirá de la siguiente manera:

$$E_0(\rho) + E(\rho) = A_0 \exp(i k_0 \rho) + A(\rho) \exp[i\varphi(\rho)]. \qquad (60.4)$$

De acuerdo con las reglas de empleo de la escritura compleja de las oscilaciones, la distribución de la iluminación $I(\rho)$ en el cuadro de interferencia es proporcional al cuadrado del módulo de la expresión (60.4), es decir,

$$I(\rho) = |E_0(\rho)|^2 + |E(\rho)|^2 + E_0^*(\rho) E(\rho) + E_0(\rho) E^*(\rho), \qquad (60.5)$$

en donde nosotros hemos omitido el coeficiente de proporcionalidad que en nuestro cálculo es de poca importancia.

Supongamos que nosotros hemos preparado la fotografía positiva del cuadro de interferencia y hemos escogido el material fotográfico y el régimen de revelación de tal manera que el coeficiente de transmisión del holograma $T(\rho)$ sea proporcional a la iluminación $I(\rho)$, es decir, que $T(\rho) = T_0 I(\rho)$. En estas condiciones la descripción de la segunda etapa de la toma del holograma se reduce a lo siguiente. La onda iluminadora, idéntica a la onda testigo, atraviesa el holograma y resulta modulada en correspondencia con la distribución de la iluminación en el cuadro de interferencia. Designando a través de $\mathscr{E}(\rho)$ el campo alumbrador en la salida del holograma, es decir, en su superficie «de salida», hallamos

$$\mathscr{E}(\rho) = T(\rho) E_0(\rho) = T_0 I(\rho) E_0(\rho). \qquad (60.6)$$

Con ayuda de las relaciones (60.5), (60.1) y (60.3) a la expresión para $\mathscr{E}(\rho)$ se le puede dar la siguiente forma:

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{E}(\rho) = \mathscr{E}_1(\rho) + \mathscr{E}_2(\rho) + \mathscr{E}_3(\rho), \\ &\mathscr{E}_1(\rho) = T_0 [|A_0|^2 + |A(\rho)|^2] E_0(\rho), \\ &\mathscr{E}_2(\rho) = T_0 |A_0|^2 E(\rho), \\ &\mathscr{E}_3(\rho) = T_0 A_0^2 E^*(\rho) \exp(2ik_0\rho). \end{aligned}\right\} \qquad (60.7)$$

Las ecuaciones (60.6) y (60.7) fueron obtenidas por primera vez por Denis Gabor (1948) y llevan el nombre de ecuaciones de Gabor.

De esta manera, el campo $\mathscr{E}(\rho)$ resulta posible representarlo como la suma de tres términos. Según el principio de superposición nosotros podemos examinar separadamente las ondas difractadas condicionadas por cada uno de estos tres términos.

De acuerdo con el principio de Huygens—Fresnel el campo difractado tras el holograma es definido unívocamente por las fases y amplitudes de las fuentes ficticias en alguna superficie arbitraria. Como tal superficie puede servir el plano de salida del holograma, para

el cual nosotros calculamos el campo ($\mathfrak{E}(\rho)$) y, de esta manera, conocimos las características de las fuentes ficticias de Huygens—Fresnel. Hacemos recordar que un significado esencial en cualquier problema de difracción tiene solamente la ley de distribución de las fases y amplitudes de las fuentes ficticias. El aumento o la disminución de las amplitudes que sea igual para todas las fuentes ficticias causará solamente una variación proporcional de las amplitudes de las ondas difractadas, pero no influenciará sobre sus particularidades características. Esta última circunstancia permite aclarar la estructura de la onda reconstruida sin resolver completamente el problema de la difracción.

La parte del campo en el límite del holograma, descrita por el término $\mathfrak{E}_1(\rho)$, con exactitud salvo el multiplicando $T_0 i\,[\,|A_0|^2 + |A(\rho)|^2]$ coincide con lo que crearía la onda testigo en ausencia del holograma, es decir, en el caso de una propagación libre. La onda testigo generalmente es mucho más intensa que la que parte del objeto, de tal manera que el término $|A(\rho)|^2$ puede ser despreciado y el coeficiente de proporcionalidad entre $\mathfrak{E}_1(\rho)$ y $E_0(\rho)$ resulta ser constante. Por lo tanto, en este caso el término $\mathfrak{E}_1(\rho)$ refleja el hecho de que detrás del holograma se propaga una onda plana que coincide en su dirección con la onda testigo*).

El término $\mathfrak{E}_2(\rho)$ en (60.7) es proporcional al campo $E(\rho)$ creado en el plano del holograma por las ondas que parten del objeto a investigar. Por eso queda claro que el campo que se forma con las correspondientes fuentes secundarias de Huygens—Fresnel es idéntico al que se crea por el objeto en ausencia del holograma. De esta manera, esta parte del campo responde a la imagen virtual del objeto. Por eso se puede decir que la observación de la imagen virtual es equivalente a la observación del mismo objeto a través del orificio que coincide con la parte empleada del holograma. A base de lo expuesto, la capacidad del holograma de reconstruir la imagen con ayuda de una parte no grande de su superficie adquiere una explicación casi trivial: la capacidad indicada es equivalente a que cuando se observa de manera inmediata algún punto del objeto sólo se utiliza aquella parte de su emisión que está limitada por el cono de los rayos que inciden sobre el ojo.

No es difícil mostrar que el término $\mathfrak{E}_3(\rho)$ describe la formación de la imagen real del objeto. De esto nos convencemos en el ejemplo de una fuente puntual de luz (véase § 50). Colocando consecutiva-

*) En los marcos de las ideas basadas en la descomposición del campo $E(\rho)$ en ondas elementales, el término $|A(\rho)|^2$ describe, evidentemente, la estructura adicional del holograma que es condicionada por la interferencia entre estas ondas elementales. Como se aclaró anteriormente, la estructura indicada lleva a cierta difusión de la onda iluminadora, pero la influencia dañina de esta difusión puede ser evitada escogiendo racionalmente los ángulos de incidencia de la onda testigo y de la onda iluminadora.

mente la pantalla en diferentes secciones de la región de localización de la imagen real, se puede obtener nítidas imágenes de un objeto tridimensional y de sus detalles, sin utilizar ningún sistema óptico adicional. En tales observaciones es fácil descubrir que la semejanza entre el objeto y su imagen real tiene lugar sólo bajo la condición de que el haz testigo y el iluminador incidan sobre el holograma en forma perpendicular a su superficie. En caso contrario la imagen real resultará mutilada y, bajo ciertas condiciones, puede inclusive desaparecer (véase ejercicio 263).

Hasta ahora nosotros hemos considerado que la onda testigo es plana. De la teoría elemental, expuesta anteriormente, no es difícil notar que en calidad de onda testigo puede ser utilizada también una onda esférica. Efectivamente, sustituyamos la expresión (60.3) por

$$E_0^*(\rho) = A_0 \exp[ik_0 |r_0 - \rho|],$$

donde r_0 es el radio vector del centro de la onda esférica. Debido a que también en este caso $|E_0(\rho)|^2 = |A_0|^2$, al igual que antes, obtendremos $\mathcal{E}_2(\rho) \sim E(\rho)$ y, por lo tanto, la imagen virtual será la misma que en el caso de la onda testigo plana.

§ 61. Holograma como elemento de un sistema óptico ideal. Obtención de imágenes ampliadas

En los parágrafos anteriores habíamos supuesto que las ondas testigo e iluminadora eran idénticas. En este caso la imagen virtual copia completamente el objeto mismo. Sin embargo, el cumplimiento de la condición indicada de ningún modo es obligatorio, y la toma del holograma también se realizará con éxito en el caso cuando en la primera y segunda etapas se utiliza una emisión con diversas longitudes de onda y diversas curvaturas de los frentes ondulatorios. Tales modificaciones de las condiciones del experimento permiten obtener *imágenes ampliadas* de los objetos holografiados.

Examinemos el holograma de la onda esférica obtenido con la utilización de ondas también esféricas en calidad de onda testigo e iluminadora. Las oscilaciones luminosas que corresponden a estas tres ondas, en el punto con radio vector ρ del holograma, pueden ser descritas en la forma

$$\left.\begin{aligned} E(\rho) &= A \exp[ik|r_s + \rho_s - \rho|]; \\ E_0(\rho) &= A_0 \exp[ik|r_0 + \rho_0 - \rho|]; \\ E_0'(\rho) &= A_0' \exp[ik'|r_0' + \rho_0' - \rho|]. \end{aligned}\right\} \qquad (61.1)$$

Los vectores ρ_s, ρ_0 y ρ_0' dan la posición de las bases de las perpendiculares r_s, r_0 y r_0' que están dirigidas desde el plano del holograma hacia el centro de las ondas salientes del objeto, testigo e iluminadora, res-

pectivamente (fig. 11.9). Los números de onda $k = 2\pi/\lambda$ y $k' = 2\pi/\lambda'$, en general, no son iguales entre sí.

Primero examinaremos la imagen virtual del objeto. Repitiendo los razonamientos, efectuados para justificar la relación (60.6), es fácil convencernos de que la parte del campo que nos interese $\mathscr{E}_2(\rho)$ en el límite «de salida» del holograma, después de haberla atravesado con la luz, se expresa por la relación

$$\mathscr{E}_2(\rho) = T_0 E_0^*(\rho)\, E_0'(\rho)\, E(\rho) = T_0 A_0^* A_0' A \exp[i\psi(\rho)], \qquad (61.2)$$

donde $\psi(\rho)$ es la fase de la oscilación en el punto con radio vector ρ

$$\psi(\rho) = k|r_s + \rho_s - \rho| - k|r_0 + \rho_0 - \rho| + k'|r_0' + \rho_0' - \rho|. \qquad (61.3)$$

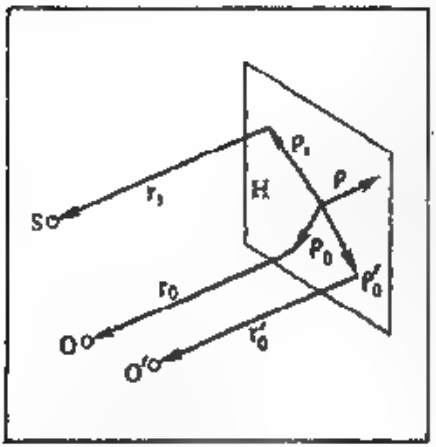


Fig. 11.9. Teoría de los sistemas holográficos.

Supongamos que la longitud de las perpendiculares sobrepasan considerablemente la diferencia $|\rho_s - \rho|$ y demás, es decir, los ángulos de incidencia de los rayos sobre el holograma son pequeños para todos sus puntos y para todas las tres ondas. En este caso, transformaciones simples, pero largas, que al lector sería provechoso efectuar en calidad de ejercicio, permiten obtener para $\psi(\rho)$ la siguiente expresión:

$$\psi(\rho) = \frac{k'}{2r_s'}(\rho - \rho_s')^2 + \psi_0, \qquad (61.4)$$

donde ψ_0 no depende de ρ, y r_s', ρ_s' se definen por las relaciones

$$\frac{k'}{r_s'} = \frac{k}{r_s} + \frac{k'}{r_0'} - \frac{k}{r_0}; \qquad (61.5)$$

$$k'\frac{\rho_s'}{r_s'} = k\frac{\rho_s}{r_s} + k'\frac{\rho_0'}{r_0'} - k\frac{\rho_0}{r_0}. \qquad (61.6)$$

La distribución de fases descrita por la fórmula (61.4) podría ser creada por una onda esférica con longitud $\lambda' = 2\pi/k'$, cuyo centro debería de encontrarse en la perpendicular de r_s' de longitud levantada del punto ρ_s'. En este caso la construcción de Fresnel, que fue deliberada en el § 33, referente a la propagación libre de una onda esférica, permite deducir que detrás del holograma se propagará una onda esférica con la posición indicada de su centro. En otras palabras, las fórmulas (61.5) y (61.6) para r_s', ρ_s' definen la posición de la ima-

gen del objeto puntual que se encontraba en el momento de la exposición del holograma en el punto dado por las magnitudes r_0 y ρ_0.

De esta misma manera se puede deducir relaciones análogas que describen la posición (r_i'', ρ_i'') de la segunda imagen de la fuente puntual, la cual se forma al ser el holograma atravesado por la luz:

$$\frac{k'}{r_i''} = -\frac{k}{r_0} + \frac{k'}{r_i'} + \frac{k}{r_0}; \tag{61.7}$$

$$k' \frac{\rho_i''}{r_i''} = -k \frac{\rho_0}{r_0} + k' \frac{\rho_i'}{r_i'} + k \frac{\rho_0}{r_0}. \tag{61.8}$$

Subrayemos que las magnitudes r_i' y r_i'' pueden ser tanto positivas como negativas. Desde el punto de vista físico, esto significa que los centros de curvatura de cada una de las ondas reconstruidas pueden disponerse a ambos lados del holograma. En adelante acordemos considerar positivas las distancias desde el holograma hasta los puntos S, O, O' (véase fig. 11.9) y hasta los puntos de las imágenes S' y S'', si los puntos indicados se encuentran detrás del holograma (según el recorrido de la luz) y negativas, si ellos se disponen antes del holograma.

De esta manera, en el caso general examinado ambas ondas reconstruidas pueden formar tanto imágenes virtuales ($r_i' < 0$, $r_i < 0$), como reales ($r_i' > 0$, $r_i'' > 0$). Por eso en adelante llamaremos *imagen principal* a S' (parte del campo $\mathscr{E}_2(\rho)$) y *complementaria* a S'' (parte del campo $\mathscr{E}_3(\rho)$).

Si la onda iluminadora es plana, entonces independientemente de la curvatura de la onda testigo las imágenes S' y S'' se encontrarán a iguales distancias del holograma, pero a diferentes lados de éste

$$k'/r_i' = -k'/r_i'' = k(1/r_0 - 1/r_0).$$

Por consiguiente, en este caso una imagen es real y la otra, virtual con la particularidad de que la imagen principal será virtual si la curvatura $1/r_0$ de la onda testigo es menor (en sentido algebraico) que la curvatura $1/r_0$ de la onda emitida por las fuentes. Sea ahora que el objeto y el centro de la onda testigo se encuentran en un mismo plano paralelo al holograma ($r_0 = r_0$). Entonces de (61.5) y (61.7) obtenemos $r_i' = r_i'' = r_0'$, es decir, ambas imágenes se dispondrán a un mismo lado del holograma y a iguales distancias de él. Este caso será examinado mas detalladamente en el siguiente parágrafo.

Recurramos al problema acerca de la ampliación de las imágenes holográficas. Desplacemos el objeto puntual paralelamente al plano del holograma a una magnitud $\Delta\rho_0$. Las imágenes S' y S'' también se desplazarán, pero estos desplazamientos, según la fórmulas (61.6) y (61.8), serán iguales a

$$\Delta\rho_i' = \frac{k}{k'} \frac{r_i'}{r_0} \Delta\rho_0; \quad \Delta\rho_i'' = -\frac{k}{k'} \frac{r_i''}{r_0} \Delta\rho_0. \tag{61.9}$$

Nosotros también llegaremos al mismo resultado, si por $\Delta\rho_s$, $\Delta\rho_s'$ y $\Delta\rho_s''$ comprendemos los vectores que unen correspondientemente los dos puntos del objeto y de sus imágenes. Los coeficientes de proporcionalidad en las relaciones (61.9) se llaman *ampliaciones transversales* V' y V'' del sistema holográfico:

$$V' = \frac{k}{k'}\frac{r_s'}{r_s} = \frac{1}{1-(r_s/r_0)+(k'/k)(r_s/r_0')},$$
$$V'' = -\frac{k}{k'}\frac{r_s''}{r_s} = \frac{1}{1-r_s/r_0-(k'/k)(r_s/r_0')}, \qquad (61.10)$$

y evidentemente, son iguales a las relaciones entre las dimensiones de las imágenes y las del objeto en las direcciones paralelas al plano del holograma.

Las ampliaciones longitudinales U' y U'' se definen como las relaciones de los desplazamientos de las imágenes al desplazamiento del punto del objeto en la dirección normal al holograma. De las relaciones (61.5) y (61.7) hallaremos

$$U' = \frac{dr_s'}{dr_s} = \frac{k}{k'}\left(\frac{r_s'}{r_s}\right)^2 = \frac{k'}{k}V'^2;$$
$$U'' = \frac{dr_s''}{dr_s} = -\frac{k}{k'}\left(\frac{r_s''}{r_s}\right)^2 = -\frac{k'}{k}V''^2. \qquad (61.11)$$

Comparando (61.11) y (61.10) se puede ver que las ampliaciones transversal y longitudinal son diferentes. Esto significa la deformación de la forma de la imagen en comparación con el objeto (tridimensional), en la dirección hacia el holograma la imagen será achatada o alargada en dependencia de cuál de las ampliaciones es mayor $|V'|$ y $|V''|$ o $|U'|$ y $|U''|$. La imagen principal es semejante al objeto sólo si se cumple la condición $r_s = r_s'$, a lo que corresponde una única posición del objeto

$$\frac{1}{r_s} = \frac{1}{k'-k}\left(\frac{k'}{r_0'} - \frac{k}{r_0}\right).$$

Bajo esta condición las ampliaciones transversal y longitudinal son iguales a las relaciones entre las longitudes de onda, es decir,

$$V' = U' = k/k' = \lambda'/\lambda.$$

De esta manera, se puede obtener una imagen holográfica ampliada semejante al objeto; en este caso la longitud de la onda iluminadora deberá ser mayor que la de la emitida por el objeto y de la onda testigo.

Para los objetos planos no es necesario el cumplimiento de la condición $V' = U'$, y se puede obtener una imagen ampliada y no deformada no sólo a cuenta de la diferencia en las longitudes de onda λ y λ', sino también mediante una elección conveniente de las pro-

piedades geométricas del experimento. Por ejemplo, en el caso de una onda testigo plana ($r_0 \to \infty$)

$$V' = \frac{1}{1+(k'/k)(r_s/r_0')}$$

y la imagen principal ampliada se obtendrá cuando r_s y r_0' tengan diferentes signos, es decir, la onda iluminadora deberá ser convergente*). (r_s siempre es negativo).

No vamos a concretizar más las fórmulas generales (61.5)—(61.8) que relacionan la posición del objeto y de sus imágenes, por cuanto ellas formalmente coinciden completamente con las leyes que son válidas para cualquier sistema óptico. Estas últimas serán analizadas detalladamente en los capítulos XII—XIV, y aquí nos limitaremos a constatar la analogía señalada. Para poder comparar cómodamente, escribiremos junto las principales relaciones que describen la imagen en los sistemas holográficos y en los sistemas de lentes (véase § 79):

Imagen holográfica principal	Imagen en una lente ideal
$\frac{k'}{r_s'} - \frac{k}{r_s} = \frac{k'}{f'}$;	$\frac{n_2}{a_2} - \frac{n_1}{a_1} = \frac{n_2}{f_2} = -\frac{n_1}{f_1}$;
$V' = \frac{k}{k'}\frac{r_s'}{r_s}$;	$V = \frac{n_1}{n_2}\frac{a_2}{a_1}$;
$U' = \frac{k}{k'}\left(\frac{r_1'}{r_1}\right)^2 = \frac{k'}{k}V'^2$;	$U = \frac{n_1}{n_2}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 = \frac{n_2}{n_1}V^2$.

Aquí a_2 y a_1 (las distancias desde la imagen y el objeto hasta la lente, más exactamente, hasta sus planos principales) son análogos a r_2' y r_s. Los índices de refracción n_2 y n_1 del espacio de los objetos y del espacio de las imágenes deben ponerse en correspondencia con los números de onda k' y k. El rol de las distancias focales del sistema holográfico lo juegan las magnitudes f' y f, las cuales se definen por las relaciones

$$\frac{k'}{f'} = \frac{k'}{r_0'} - \frac{k}{r_0}; \quad \frac{k}{f} = -\frac{k'}{r_0'} + \frac{k}{r_0} = -\frac{k'}{f'};$$

ellas están relacionadas entre sí de la misma manera como lo están las distancias focales f_2 y f_1 (trasera y delantera) del sistema de lentes.

La analogía examinada puede ser continuada si comparamos f' y f con las distancias focales de la lente delgada **) (véanse §§ 76, 77)

$$\frac{n_2}{f_2} = \frac{n_2 - n}{R_2} - \frac{n_1 - n}{R_1}; \quad \frac{n_1}{f_1} = \frac{n_1 - n}{R_1} - \frac{n_2 - n}{R_2} = -\frac{n_2}{f_2};$$

*) Un análisis análogo para la imagen complementaria véase en el ejercicio 264.
**) Aquí se citan expresiones más generales que en el § 76 que son también válidas cuando $n_2 \neq n_1$.

donde n es el índice de refracción del material de la lente, R_1 y R_2 son los radios de curvatura de sus superficies, los cuales se subordinan a la misma regla de signos que r_1, etc. De esta manera, el holograma respecto a su imagen principal es equivalente a la lente delgada, cuyos radios de curvatura de las superficies están relacionados con r_0 y r_0' de la siguiente manera:

$$\frac{1}{r_0} = \frac{n_1 - n}{n_1}\frac{1}{R_1}; \quad \frac{1}{r_0'} = \frac{n_2 - n}{n_2}\frac{1}{R_2}. \tag{62.12}$$

La imagen holográfica principal y la complementaria se transforman una en otra de la misma manera como en el caso de reflexión en un espejo esférico. En efecto, de las relaciones (61.5) y (61.7), (61.9), (61.11) fácilmente se obtiene

$$\frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_1''} = \frac{2}{r_0}; \quad \Delta\rho_1'' = -\frac{r_1''}{r_1'}\Delta\rho_1'; \quad \frac{dr_1''}{dr_1'} = -\left(\frac{r_1''}{r_1'}\right)^2, \tag{62.13}$$

lo que formalmente describe la reflexión en un espejo esférico (véase (72.4)), si el radio de curvatura de este último es igual a la distancia r_0' entre el holograma y el centro de la onda esférica iluminadora. Por eso a veces la imagen complementaria es llamada imagen *confugada*.

De esta manera, las propiedades geométricas de las imágenes principal y complementaria que se forman con ayuda del holograma, tales como la posición, la orientación*), las dimensiones, etc., son exactamente idénticas a las propiedades de las imágenes formadas por la lente y el espejo con características correspondientemente escogidas.

La analogía formal establecida, desde luego, no es casual. Tanto en la toma del holograma, como en la reflexión en el sistema de lentes o de espejos, la acción de éstos se reduce a la transformación de una onda esférica (del objeto) en otra también esférica (de la imagen). El aspecto formal de la ley de esta transformación (transformación lineal de la curvatura de los frentes ondulatorios) está predeterminado por el mismo planteamiento del problema y no está ligado de ninguna manera con el método concreto de su realización. Cualquier método, holográfico o de lentes, sólo puede variar la curvatura del frente ondulatorio original en un cierto número de veces y añadirle un nuevo sumando**), nada más. El análisis del fenómeno físico que

*) Las imágenes formadas en los espejos y en las lentes se diferencian en el siguiente punto importante: fijemos en el objeto un trío dextrórsum de ortos; en la imagen producida por las lentes este trío siempre se transformará en orto dextrórsum, y en la producida por espejos, siempre en sinistrórsum. Esta propiedad observada reiteradamente por cada cual al utilizar espejos caseros, significa que es imposible hacer coincidir el objeto y su imagen con ayuda de desplazamientos y giros.

**) Lo mismo sucede en los llamados aparatos ópticos no lineales, donde la imagen se forma con la emisión que aparece en el aparato como resultado de la generación de armónicas totales, múltiples y otras (véase § 236).

permite realizar este mecanismo concretiza el sentido físico del correspondiente multiplicando y sumando y la dependencia de éstos con respecto a las características del fenómeno y a las particularidades de la estructura del sistema. Esto último resulta muy esencial cuando se comparan diferentes métodos. Como habíamos mencionado, la utilización de diversas longitudes de onda en la primera y segunda etapas ofrece al holograma posibilidades inmensurablemente más amplias que el factor análogo en los sistemas de lentes y espejos (la distinción de los índices de refracción en el espacio de las imágenes y objetos, objetivos de inmersión de los microscopios, véase § 97), ya que se puede utilizar una emisión con longitudes de ondas que se diferencian fuertemente, por ejemplo, la emisión Roentgen y la visible (cuando sea creado el láser Roentgen).

Para finalizar, subrayemos que el holograma y la onda que lo ilumina permiten obtener información acerca del objeto tridimensional de observación sin ayuda de algún otro sistema óptico. Si en la fotografía corriente cada negativo puede dar solamente una imagen del objeto que es observado bajo cierto ángulo de visión, en cambio, en cada holograma está registrado un complejo de imágenes que permite observar el objeto tridimensional bajo diversos ángulos de visión. Además, la holografía permite observar interferencia de ondas que han existido en diferentes momentos de tiempo (véase § 67).

§ 62. Hologramas de Fourier

Útiles propiedades poseen los sistemas holográficos de determinado género, en los cuales cada punto de objeto crea en el holograma una red elemental de Rayleigh. Uno de los métodos de realización de tales hologramas se ilustra con el esquema representado en la fig. 11.10. El objeto plano transparente mostrado con líneas puntoadas es atravesado con un haz paralelo de emisión láser; una parte del mismo haz es enfocada con la lente L al pequeño orificio O que sirve de fuente de la onda esférica testigo. Lógicamente, el esquema asegura la coherencia de la onda testigo y de las ondas que salen del objeto.

Examinemos el cuadro, aparecido como resultado de la interferencia de la onda testigo y de la onda de algún punto S del objeto, en el plano H del holograma. Los cuadros de interferencia de este género, que fueron estudiados detalladamente en el cap. IV, tienen la forma de una sucesión de franjas periódicas; el ancho de las franjas (período) es igual a la relación entre la longitud de onda y el ángulo, bajo el cual es visto el sector OS desde el punto del holograma H, para el cual se calcula el período. De esta manera, en el esquema de la fig. 11.10, a cada punto del objeto le corresponde una distribución armónica de la intensidad en el plano H*). La amplitud de su varia-

*) Las dimensiones angulares del segmento OS deben ser, por supuesto, aproximadamente iguales para todos los puntos de la parte activa del holograma.

ción es proporcional al coeficiente de transmisión del objeto en el punto S, y el período es tanto menor, cuanto más alejado esté el punto S respecto a la fuente O de la onda testigo.

Basándonos en lo dicho anteriormente, es fácil mostrar que la distribución de intensidad de luz en el plano H, condicionada por la acción de todo el objeto, constituye una transformación de Fourier para la distribución de la amplitud del campo en el plano del objeto (véase ejercicio 265). En otras palabras, la instalación representada esquemáticamente en la fig. 11.10 realiza físicamente la transformación de Fourier sobre la distribución de las amplitudes indicada. Por eso los hologramas que se obtienen en los dispositivos del tipo indicado se llaman *hologramas de Fourier*.

Si el holograma de Fourier es atravesado con una onda plana, entonces cada red elemental formará tres ondas planas con órdenes $m = 0, \pm 1$ (véase § 58). Por consiguiente, se puede decir que cada punto del objeto crea ondas planas (imágenes principal y complementaria), con la particularidad de que la dirección de propagación de éstas se define por la coordenada de este punto. De esta manera, en el caso dado la toma del holograma es equivalente a la colocación del objeto en el plano focal de algún sistema óptico. Esta misma deducción se desprende tambien de las fórmulas generales obtenidas en el parágrafo anterior. Para el caso examinado, en las designaciones del § 61 tenemos $r_0 = r_0$, $r_0' \to \infty$, y de las relaciones

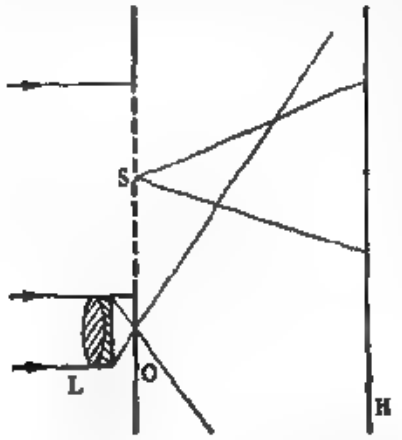


Fig. 11.10. Esquema de obtención del holograma de Fourier.

(61.5) y (61.7) sigue

$$1/r_0' = 1/r_0' = 0,$$

lo que desde el punto de vista físico significa un alejamiento infinito tanto de la imagen principal, como de la complementaria.

Iluminemos ahora el holograma con una onda esférica. En este caso ambas imágenes y el centro de la onda alumbradora resultarán en un mismo plano (fig. 11.11). La pequeña mancha central corresponde al centro de convergencia de la onda iluminadora, las imágenes derecha e izquierda son la principal y complementaria. Las imágenes están mutuamente invertidas debido a que las ampliaciones transversales tienen signos contrarios (véase § 61).

Las particularidades citadas se encuentran totalmente de acuerdo con las deducciones que pueden ser extraídas de la teoría general expuesta en el § 61. Si ponemos en las relaciones (61.5), (61.7) y (61.10) $r_z = r_0$, obtendremos

$$r_i' = r_i'' = r_0'; \quad V' = -V'' = \frac{k}{k'} \frac{r_0'}{r_z} = \frac{\lambda'}{\lambda} \frac{r_0'}{r_0}.$$

Si la onda iluminadora es divergente, entonces ambas imágenes serán virtuales, y para su registración será necesario un sistema óptico adicional, en calidad del cual puede servir también el ojo. La iluminación con una onda convergente ($r_0' > 0$) permite obtener imágenes reales en la pantalla sin utilización de lentes (las llamadas imágenes deslentadas).

De la expresión para la ampliación citada anteriormente se ve que

Fig. 11.11. Imágenes reconstruidas de un objeto plano obtenidas con ayuda del holograma de Fourier.

en la holografía de Fourier la imagen ampliada puede ser obtenida tanto a cuenta de la diferencia de las longitudes de onda λ y λ', como acercando el objeto al holograma (disminución de r_z), el cual, por lo tanto, funciona como el objetivo de un microscopio.

Otro método de obtención de la imagen ampliada consiste en la confección de la reproducción del holograma a escala disminuida. Debido a que la escala de la estructura de interferencia disminuye en este caso (por ejemplo, M veces), entonces los ángulos de difracción para la luz iluminadora aumentarán correspondientemente (también M veces). Por lo tanto, deberá aumentar también la dimensión de la imagen. En efecto, un cálculo simple muestra que

$$V' = Mk/k'$$

(véase ejercicio 266). El método señalado se utiliza, no sobreentiendo, no sólo en la holografía de Fourier (en particular, en la microscopia holográfica), sino también en una serie de otros casos.

§ 63. Poder separador de los sistemas holográficos

Las relaciones obtenidas en el § 61 que permiten calcular la posición de las imágenes no deben ser comprendidas en el sentido de que a cada punto del objeto le corresponderá un punto (en el sentido matemático de esta palabra) en la imagen. Así como en cualquier otro sistema óptico, la limitación de las dimensiones del frente ondulatorio conduce a que la imagen de la fuente puntual tenga la forma de una mancha de mayor o menor dimensión, proporcional a la longitud de onda (véanse caps. IX, XV). Las relaciones citadas describen sólo la posición de los centros de las manchas de difracción. En lo que se refiere a sus formas, dimensiones, distribución de energía en ellas, etc., todas estas importantes propiedades de la imagen se definen por la forma del holograma y sus dimensiones, si, por supuesto, para la observación de la imagen se utiliza completamente toda la luz procedente del holograma. Pero si el sistema que registra la imagen (aparato fotográfico o el ojo) deja pasar sólo una parte de la onda reconstruida, entonces las propiedades de la mancha de difracción serán caracterizadas por el sistema registrador

Como resultado del ensanchamiento difractivo de la imagen del punto el sistema holográfico no podrá discernir (separar) dos puntos, si la distancia entre ellos es menor que el diámetro de la mancha de difracción, es decir, ellos serán percibidos en la imagen como un sólo punto. En este caso se dice que los puntos dados no son discernibles en el sistema dado.

Examinemos las condiciones de separación de dos fuentes puntuales de luz S_1 y S_2 (fig. 11.12), basándonos en las ideas expuestas en los parágrafos anteriores. Los puntos S_1 y S_2 se discernirán si los cuadros de interferencia correspondientes a ellos se separan con suficiente claridad uno del otro en el plano del holograma. Lo último a su vez depende de en cuanto se distinguen las diferencias de fase ψ_1 y ψ_2 entre la onda testigo y las ondas emergentes de S_1 y S_2. No es difícil ver que $\psi_1 - \psi_2$ es simplemente igual a la diferencia de fases $\delta\psi$ entre las ondas emitidas por S_1 y S_2. De esta manera, si $\delta\psi$ es lo suficientemente grande, por ejemplo, mayor que π, entonces los cuadros de interferencia correspondientes a S_1 y S_2 estarán desplazados uno respecto al otro lo necesario y los puntos S_1 y S_2 se discernirán.

De la fig. 11.12 se puede ver que $\delta\psi$ tiene máximo valor en el borde del diafragma que limita el holograma, en donde la correspondiente diferencia de recorrido es igual a

$$\Delta = l \operatorname{sen} u,$$

donde l es la distancia entre los puntos S_1 y S_2, u es el ángulo que empalma la mitad del diafragma. Debido a que $\delta\psi = 2\pi\Delta/\lambda$, el criterio de separación (resolución) $\delta\psi \geqslant \pi$ es equivalente a $\Delta \geqslant \lambda/2$, ya que los puntos S_1 y S_2 se discernirán si se cumple la condición

$$l \geqslant l_{\min} = \lambda/2 \operatorname{sen} u. \tag{63.1}$$

Si el ángulo u no es grande, entonces $\operatorname{sen} u \approx u \approx D/2r_s$ y la condición (63.1) adquirirá la forma

$$l \geqslant l_{\min} = \frac{\lambda}{D} r_s \tag{63.2}$$

(D es el diámetro del diafragma, r_s, la distancia desde S_1 hasta el holograma).

La condición (63.1) obtenida con ayuda de consideraciones cualitativas, poco difiere de los resultados del riguroso análisis del poder separador (resolutivo) del microscopio (véase § 97). Esto era de esperar, ya que los rasgos específicos de la toma de hologramas, tales como la presencia de la onda testigo, su geometría, la iluminación, etc. no tienen importancia en absoluto en el problema acerca del límite de separación en la difracción.

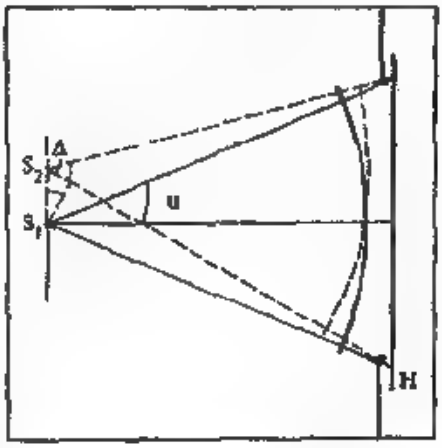


Fig. 11.12. Determinación del poder separador de los sistemas holográficos.

En los razonamientos anteriores implícitamente se suponía que la capa fotosensible que registraba el cuadro de interferencia reflejara por completo todos los detalles más finos de éste. Sin embargo, en la realidad la capa fotográfica por sí misma no posee un ilimitado poder separador, y si las dimensiones lineales de la estructura del cuadro de interferencia son menores que cierto valor límite ε, la capa fotográfica dejará de reflejar la verdadera distribución de iluminación. La magnitud ε se define (para las emulsiones holográficas) por las dimensiones del grano de sustancia fotosensible.

Observemos la influencia de la propiedad indicada de la capa fotográfica en el holograma de una onda esférica, el cual es obtenido para una onda testigo plana (véase § 59). En este caso el holograma tiene la forma de la red zonal, representada en la fig. 8.5. A partir de determinado número, la distancia entre los anillos resultará menor que el poder separador ε de la capa fotográfica, y los anillos se mezclarán

unos con otros*). La onda iluminadora, al pasar a través de estos sectores periféricos del holograma, no experimentará una difracción regular y no participará en la formación de la imagen de la fuente. En otras palabras, la dimensión activa del holograma resulta limitada por las propiedades de la capa fotosensible. Determinemos la magnitud de esta dimensión.

De acuerdo con el § 59, el radio del n-ésimo anillo de la red de zonas se da por la relación

$r_n^2 = 2\lambda r_2 n.$

La distancia entre los anillos adyacentes se expresa aproximadamente de la siguiente manera:

$$r_{n+1} - r_n = \frac{2\lambda r_2}{r_{n+1} + r_n} \approx \frac{\lambda r_2}{r_n}.$$

Igualando $r_{n+1} - r_n$ a la menor distancia resoluble ε, hallamos el diámetro de la parte activa del holograma

$D = 2\lambda r_2/\varepsilon,$

y con ayuda del valor obtenido del diámetro determinaremos el límite de separación en la imagen holográfica

$l \geqslant l_{\min} = {}^1/_2\varepsilon.$

De esta manera, en el caso dado la distancia límite entre los puntos del objeto es igual a la mitad de la distancia discernible en la capa fotosensible.

Generalmente el material fotosensible se caracteriza por la magnitud inversa a ε, es decir, por $N = 1/\varepsilon$ (número de líneas discernibles por mm). Para los sistemas holográficos han sido elaboradas especialmente fotoemulsiones con un valor grande del número N (del orden de 1000—8000 mm^{-1}) que permiten lograr un gran poder separador del aparato. Si, por ejemplo, $N = 10^3$ mm^{-1}, entonces la magnitud ${}^1/_2\varepsilon = 1/2N = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ mm resultará comparable con la longitud de onda, y la placa fotográfica no empeorará muy fuertemente el poder separador del aparato.

Sin embargo, hay que tener presente que el cálculo realizado se refería a los esquemas, donde los haces que formaban las imágenes principal y complementaria no estaban separados (véase fig. 11.4, *b*). En los dispositivos más utilizados con incidencia oblicua de haces, que es necesaria para la separación de las dos imágenes, se utilizan

*) Una idea clara acerca de la deformación introducida en el holograma como consecuencia del efecto indicado, se puede obtener de la fig. 7.5, en la cual están representados unos anillos de interferencia análogos. Lejos del centro los anillos no se separan a consecuencia de que la reproducción polígráfica se compone de celdillas, cuyas dimensiones en el caso dado son iguales a 0,5 mm y las cuales se ven fácilmente con ayuda de una lupa. Precisamente cada celdilla de la reproducción juega el rol de grano de la fotoemulsión del holograma.

solamente anillos de alto orden (véase fig. 11.4, *c*), y el rol de capa fotosensible aumenta. Por eso en la holografía de Frensel con incidencia oblícua el poder separador, por regla, es limitado por el material fotosensible.

§ 64. Calidad de las imágenes holográficas

Hasta ahora nosotros habíamos supuesto que la emisión utilizada en calidad de onda testigo y onda iluminadora del holograma, así como también para la iluminación de los objetos, era completamente coherente. Sin embargo, la luz absolutamente coherente no existe y, naturalmente, surge la cuestión acerca de las exigencias que debe satisfacer la fuente de emisión.

De acuerdo con lo expuesto en los §§ 21 y 22, para observar un cuadro de interferencia contrastante el ancho del espectro de emisión expresado en longitudes de onda debe subordinarse a la condición

$$\Delta\lambda < \lambda/m,$$

donde m es el orden de interferencia, es decir, la relación entre la diferencia de recorrido L de las ondas interferentes y λ. Más cómoda que la longitud de onda resulta ser la variable inversa que es igual a la frecuencia dividida entre $2\pi c$ ($\omega/2\pi c = 1/\lambda$), expresada en cm^{-1} y comúnmente designada con ν al igual que el número de oscilaciones por segundo. Si el ancho del espectro de emisión es expresado en cm^{-1}, $\Delta\nu = \Delta\lambda/\lambda^2$, y en lugar del orden de interferencia se introduce la diferencia de recorrido en correspondencia con la definición $m = L/\lambda$, entonces al criterio de monocromaticidad de la emisión se le puede dar una forma simple:

$$\Delta\nu < 1/L. \tag{64.1}$$

De esta manera, el ancho del espectro de emisión, expresado en cm^{-1}, deberá ser menor (con preferencia, considerablemente menor) que la inversa de la diferencia de recorrido $1/L$. El sentido físico de esta condición es evidente: la longitud de coherencia de la emisión o la longitud de los trenes, de los cuales consta la emisión casimonocromática, que es igual a $1/\Delta\nu$ (véase § 21), deberá ser mayor que la diferencia de recorrido L, para que en el plano del holograma ocurra la interferencia de las oscilaciones pertenecientes a un mismo tren.

Los valores máximos de la diferencia de recorrido tienen lugar en la toma de hologramas de objetos tridimensionales, cuando L coincide prácticamente con las dimensiones del objeto. Por lo tanto, si estas últimas son de unas cuantas decenas de cm, entonces $\Delta\nu$ no podrá sobrepasar 0,01 cm^{-1}. Para comparar, indiquemos que los anchos de las líneas espectrales en las fuentes de luz de descarga, como regla, se encuentran en los límites de 0,1—1 cm^{-1} y por eso la utilización de éstas en la holografía presupone una monocromatización adi-

cional con ayuda de aparatos espectrales de un alto poder separador de tipo del interferómetro de Fabry—Perot (véanse §§ 30, 50).

Las exigencias, en lo que respecta a la coherencia espacial de la emisión, son fáciles de formular con ayuda del concepto de región de coherencia, introducido en el § 22: las dimensiones de la región de coherencia $2l_{coh}$ deberán ser mayores que las dimensiones del holograma D. Si las dimensiones angulares de la fuente son iguales a θ, entonces $2l_{coh} = \lambda/\theta$ y del criterio formulado de la coherencia espacial necesaria $2l_{coh} > D$, se deduce

$$\theta < \lambda/D. \tag{64.2}$$

La condición obtenida puede interpretarse de otro modo: las dimensiones angulares de la fuente deberán ser menor que el límite de separación del sistema, expresado en medidas angulares (véase (63.2)). Al mismo resultado se puede llegar con ayuda de la condición general (17.1) que limita las dimensiones tolerables de la fuente extendida de luz en los experimentos de interferencia, si se toma en cuenta la coincidencia de la apertura de interferencia y del ángulo u en la fig. 11.9 y en la relación (63.1).

Cada una de las condiciones (64.1) y (64.2), al ser tomada sin relación con la otra, puede ser realizada de manera bastante fácil. Por ejemplo, un nítido cuadro de interferencia con un valor no grande del orden m aparece fácilmente en superficies relativamente grandes, de lo que nosotros nos convencimos en el § 16 al examinar diversos esquemas de experimentos de interferencia. Sin embargo, el cumplimiento simultáneo de ambas condiciones nos obliga a trabajar con flujos tan pequeños, que los experimentos de holografía con fuentes no láser de luz resultan increíblemente difícultosos y complicados.

Las ideas físicas fundamentales de la holografía fueron formuladas por Denis Gabor en el año 1948 en relación con el problema del aumento del poder separador de los microscopios electrónicos. Gabor comprobó sus consideraciones teóricas con experimentos en la región óptica del espectro. Sin embargo, debido a las dificultades señaladas, la holografía se desarrollaba muy lentamente hasta que se creó el máser óptico (láser), la emisión del cual, por el mismo principio de su trabajo, es excepcionalmente monocromática y posee un alto grado de coherencia espacial (véanse §§ 228 y 229). A principios de los años sesenta, E. N. Leith y J. Upatnieks obtuvieron los primeros hologramas con ayuda de emisión láser. A partir de este momento la holografía progresó rápidamente y se convirtió en una amplia rama de la óptica aplicada. Por eso se puede decir con toda seguridad que los éxitos de la holografía estuvieron completamente predeterminados por la invención de los másers ópticos*).

*) Refiriéndose a esto, el creador de la holografía D. Gabor en el año 1971 escribió: «A menudo los caminos de la ciencia son incomprensibles. La microsco-

La longitud de coherencia de la emisión láser puede alcanzar centenas de metros y, por lo menos en principio, los láseres han solucionado el problema de las fuentes de luz para la holografía. Se utilizan láseres de diferente tipo, pero una propagación mucho más amplia obtuvo el láser a mezcla de helio y neón ($\lambda = 632{,}8$ nm, véase § 227).

En los apartados anteriores, principal atención se concentró en el sentido físico del proceso de la toma del holograma. Nosotros conscientemente no hemos discutido ciertos detalles que no son de mucho valor desde este punto de vista, pero que son muy importantes para la obtención de imágenes holográficos de alta calidad. Señalemos ahora unos de estos detalles.

En el § 60 se mostró que si la onda testigo es idéntica a la iluminadora, entonces la imagen es completamente semejante al objeto y puede diferenciarse de éste sólo como resultado de la ampliación difractiva de cada punto (véase § 63). El intento de obtener una imagen ampliada (véase § 61) inevitablemente está acompañado, como resulta, de un empeoramiento adicional de la calidad de la imagen (las llamadas aberraciones de la imagen; véase cap. XIII). Esta circunstancia exige una atención particular por cuanto las aberraciones crecen rápidamente a medida que aumentan las dimensiones del holograma y de los ángulos de incidencia de la luz.

Para la holografía es característica la posibilidad de aparición de muchas imágenes adicionales. La causa de esto, en esencia, fue aclarada en el § 58. El cuadro de interferencia puede ser considerado como la superposición de sistemas elementales de franjas originados por la interferencia de la onda testigo plana con las componentes espaciales de la descomposición de Fourier del campo del objeto (véase también § 52). La correspondiente red elemental de difracción será periódica, pero si el proceso fotográfico no está regulado de la manera adecuada, el coeficiente de su transmisión no dependerá armónicamente de las coordenadas. Al iluminar esta red se forman ondas no sólo de orden $m = 0, \pm 1$, sino también con $m = \pm 2$, etc. A cada orden de difracción le corresponde su imagen, es decir, se forman muchas imágenes, la superposición de las cuales generalmente es indeseable e incluso perjudicial.

Además de los pormenores citados, existen muchos otros en el experimento holográfico (así como en cualquier otra rama). En particular, un gran significado pueden tener: la relación de las intensidades de la onda testigo y la onda proveniente del objeto, las vibracio-

---

pia electrónica hasta ahora no ha sacado ninguna utilidad importante de la reconstrucción de ondas, mientras que los experimentos ópticos (los cuales fueron ideados como simulación) dieron comienzo a la holografía. A pesar de que muchos investigadores ... alcanzaron ciertos éxitos en los años posteriores, la holografía experimentó un verdadero segundo nacimiento en el año 1962, cuando E. N. Leith y J. Upatnieks utilizaron láseres...»

nes del aparato, las alteraciones de fase en la capa de gelatina, etc. No vamos a profundizar el análisis de este tipo de factores que desempeñan un importante rol, pero que ofrecen un interés especial.

§ 65. Hologramas estereoscópicos (método de Denisiuk)

El campo de interferencia que se forma en la región de superposición de la onda testigo con la onda proveniente del objeto, por supuesto, no está localizado en la superficie de la placa fotográfica. Así como en cualquier experimento con ondas coherentes, los lugares de mayores y menores valores de la amplitud de la oscilación resultante están distribuidos en todo el espacio por determinada ley que depende del tipo de los frentes ondulatorios. Por eso en la capa de la emulsión

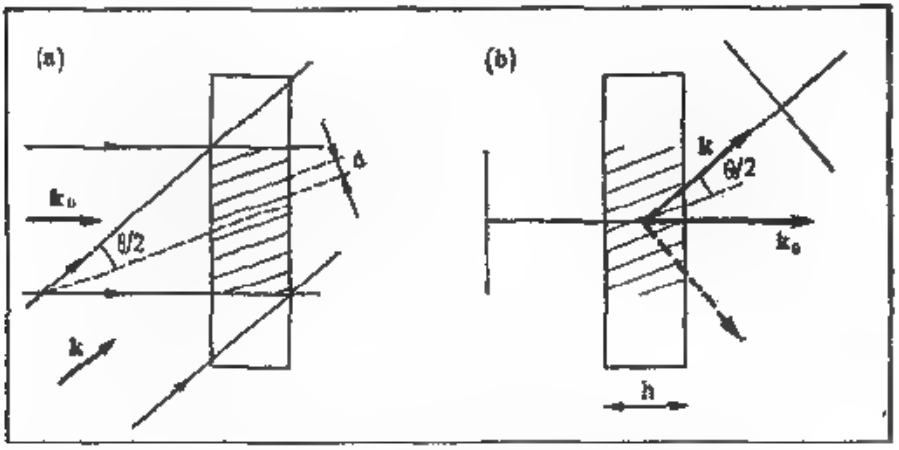


Fig. 11.13. Holograma estereoscópico de una onda plana.

fotosensible, la cual posee siempre un cierto espesor, se forma una estructura *tridimensional* de ennegrecimiento, y no una bidimensional, como aproximadamente nosotros suponíamos anteriormente. Además, las leyes de difracción de la luz en las estructuras tridimensionales tienen sus particularidades (véase cap. X) que, como ahora se aclarará, encuentran interesantes aplicaciones en la holografía.

Para comenzar examinemos el caso muy simple del holograma de una onda plana, cuando la onda testigo también es plana (compárese con el § 58). En estas condiciones las capas de ennegrecimiento de la emulsión fotográfica que corresponden a los puntos de sumación cofásica de las oscilaciones luminosas se dispondrán paralelamente a la bisectriz del ángulo entre los vectores de onda $\mathbf{k}_0$ y $\mathbf{k}$ de la onda tes-

tigo y la del objeto, con la particularidad de que la distancia entre las capas adyacentes es igual a $d = \lambda/2 \operatorname{sen} 2/1\,\theta$ (véase ejercicio 267). En la fig. 11.13, *a* las capas de ennegrecimientos son designadas condicionalmente con líneas continuas y están representadas a una escala fuertemente aumentada.

Para la onda iluminadora este holograma sirve como una estructura periódica tridimensional, y, en correspondencia con la ley de Wulff—Bragg, deberá observarse una onda difractada en la dirección que corresponde a la reflexión especular en las capas de ennegrecimiento (véase fig. 11.13, *b*). Pero justamente en esta dirección se propagaba la onda del objeto. De esta manera, el carácter estereoscópico de la estructura del holograma no obstaculiza la reconstrucción del frente ondulatorio.

El experimento muestra que al iluminar un holograma de un

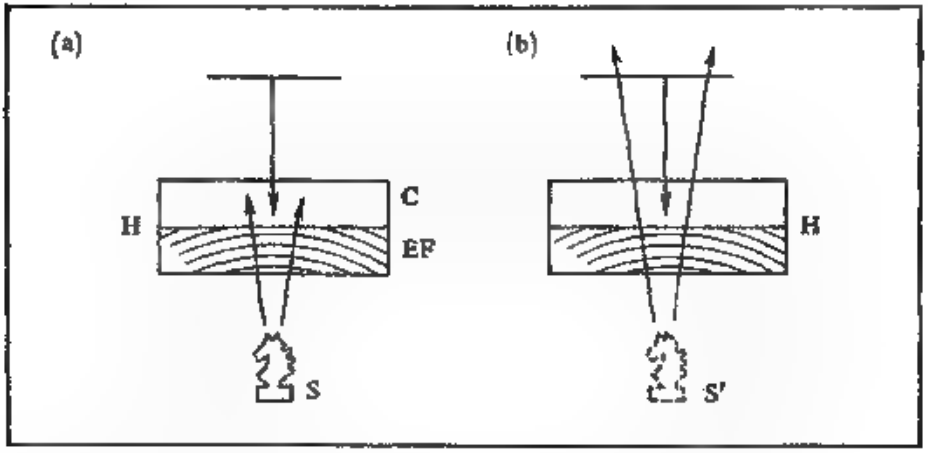


Fig. 11.14. *Esquema de obtención de hologramas estereoscópicos con ayuda de haces dirigidos al encuentro.*

espesor lo suficientemente grande se observan solamente ondas de orden $m = 0, -1$ (vectores de onda k_0 y k), y no se forma la onda de primer orden, lo que concuerda con lo expuesto anteriormente (véase cap. X). Así ocurre sólo bajo la condición de que el espesor h de la capa sobrepase considerablemente el período d de la estructura. En caso contrario la estructura tridimensional resulta equivalente a la red de Rayleigh y en ella se forma también la onda de primer orden que es mostrada en la fig. 11.13, *b* con la flecha punteada.

Sea, por ejemplo, el vector k_0 perpendicular al plano del holograma Bajo esta condición, como se desprende de los cálculos, las ondas de primer orden que se engendran en las capas consecutivas

de la emulsión fotográfica se anularán mutuamente, si se cumple la desigualdad (véase ejercicio 268)

$$h > \lambda / [2|\text{sen } {}^1/_2\theta|^2. \qquad (65.1)$$

Si $\lambda = 0{,}63$ μm, $\theta = 10°$, entonces $\lambda/[2 \text{ sen } {}^1/_2\theta]^2 = 21$ μm, lo que sobrepasa el espesor (6—15 μm) de los materiales fotográficos comúnmente empleados y la desigualdad (65.1) no se cumple. Por eso en los dispositivos que se caracterizan por ángulos relativamente pequeños entre las ondas testigo y la del objeto, el carácter estereoscópico del holograma resulta de poca importancia y se observa tanto la imagen principal, como también la adicional (§§ 58—64).

Un cuadro inverso tiene lugar en la interferencia de ondas que viajan al encuentro, o casi al encuentro ($\theta \approx 180°$), cuando $\lambda/[2 \text{ sen } {}^1/_2\theta]^2 \approx \lambda/4$ y la condición (65.1) se cumple con bastante facilidad. En tales dispositivos la onda difractada responde a la reflexión de Bragg y se debe esperar la formación sólo de una imagen holográfica.

En la fig. 11.14, *a* se muestra el esquema de un experimento holográfico de este género. El objeto S es alumbrado con emisión láser a través de la placa fotográfica, y las ondas reflejadas se pro-

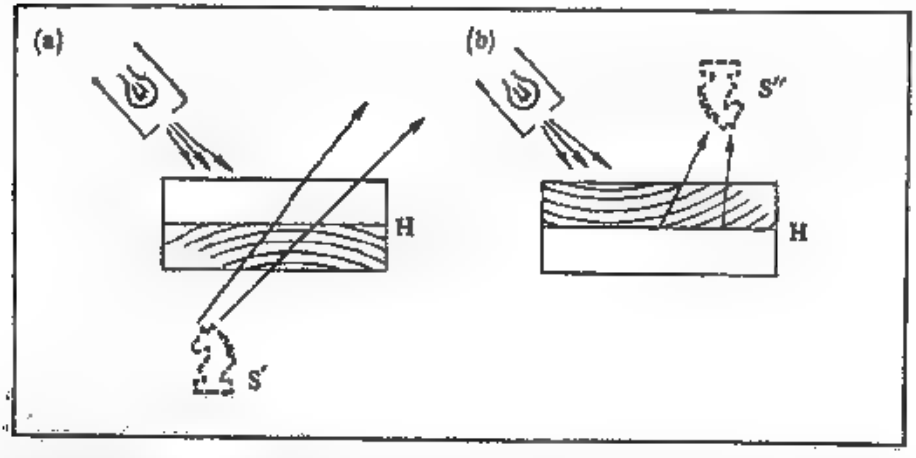


Fig. 11.15. Reconstrucción de la imagen principal (a) y de la complementaria (b) cuando el holograma estereoscópico es alumbrado con luz no coherente.

pagan hacia atrás, hacia la capa de la emulsión fotográfica especial (EF), que es prácticamente transparente antes del revelado. Con la letra C se ha designado el vidrio de la placa fotográfica. La onda láser juega también el rol de onda testigo, formando junto con la onda del objeto el campo de interferencia que transmite todas las particu-

laridades del frente ondulatorio que va desde el objeto y que posee por eso una estructura muy complicada. Como muestra el experimento, al iluminar el holograma obtenido de esta manera se reconstruye solamente la imagen virtual (principal) del objeto (véase fig. 11.14, *b*), como debería de ocurrir de acuerdo con las consideraciones expuestas anteriormente.

El método descrito de holografía, en el cual se utiliza la reflexión de Bragg de la onda iluminadora en la estructura tridimensional del holograma, fue propuesto y realizado por Yu. N. Denisiuk (año 1962) y lleva su nombre.

Una formidable particularidad del método de Denisiuk consiste en que en calidad de emisión iluminadora se puede utilizar un haz divergente de luz blanca y, sin embargo, la imagen del objeto se reconstruye (fig. 11.15, *a*). Esto es originado por las particularidades de la difracción de la luz en una estructura tridimensional: la reflexión efectiva de la luz sucede solamente para aquellas longitudes de onda y para aquellas direcciones de su propagación que están ligadas por la relación de Wulff-Bragg. Toda la parte restante de la emisión pasa a través del holograma y no participa en la formación de la imagen.

Si el holograma es iluminado por el lado reverso (fig. 11.15, *b*), entonces la imagen principal se ausentará, pero se formará la adicional. Al igual que en los dispositivos examinados en los §§ 59—64, la imagen adicional obtenida según el método de Denisiuk es especular con relación al objeto.

§ 66. Imágenes holográficas en colores

El método descrito anteriormente de holografía estereoscópica permite obtener imágenes en colores con una calidad de transmisión cromática bastante satisfactoria. Para aclarar el principio de la holografía en colores es necesario tener en cuenta que la visión cromática está ligada con la existencia en la retina del ojo de tres tipos de receptores de luz que reaccionan a las emisiones roja, verde y azul (véase § 193). Se puede decir que la imagen del objeto en la retina del ojo constituye algo así como tres imágenes combinadas que son observadas en los tres indicados intervalos de longitudes de onda. Un principio semejante de coincidencia de las imágenes se empleado en la reproducción en colores, donde en dependencia de la calidad requerida en la transmisión cromática son combinados desde tres hasta 10—15 imágenes en diversos colores.

Consideraciones análogas sirven de base en la holografía en colores. Para la obtención de una imagen en colores según el método de Denisiuk se puede registrar el holograma, utilizando la iluminación del objeto (simultánea o consecutivamente) por la emisión que tiene en su espectro tres líneas (roja, verde y azul). Entonces en

el espesor de la emulsión fotográfica se forman tres sistemas de ondas estacionarias y respectivamente tres sistemas de estructuras espaciales. En la reconstrucción de la imagen con ayuda de luz blanca cada uno de los sistemas indicados formará su imagen del objeto en la luz del correspondiente sector espectral que se utilizaba en el momento de su exposición. Debido a que la posición de la imagen no depende, de acuerdo con lo expuesto en el parágrafo anterior, de la longitud de onda, nosotros obtenemos tres imágenes combinadas en tres sectores del espectro, y esto ya es suficiente para la reconstrucción de la imagen en colores.

La red tridimensional de difracción, formada por varias decenas de capas de ennegrecimiento, posee un poder separador espectral relativamente pequeño. Por esto cada una de las imágenes componentes de ningún modo es tan «monocromática», como la emisión láser que se utiliza en la primera etapa de la toma del holograma. Esta circunstancia hasta cierto grado contribuye a la «suavidad» de la transmisión cromática.

Una de las dificultades de la holografía en colores está ligada con la variación del espesor de la emulsión fotográfica que sucede en su procesamiento fotográfico (revelado, fijado, lavado y secado). La práctica muestra que la elaboración provoca el «encogimiento» de la emulsión fotográfica, a consecuencia de lo cual disminuye también el período de la estructura tridimensional. Como resultado, la condición de Wulff—Bragg se cumple para una emisión de onda más corta que la onda testigo. Esto explica cierta distorsión en la coloración de las imágenes holográficas en colores.

§67. Aplicación de la holografía. Interferometría holográfica

Terminando la exposición de los principios físicos de la holografía, formulemos otra vez las consideraciones que sirven de base a este método de registración de información acerca del objeto de observación, la cual es transmitida por el campo electromagnético. A nosotros nos interesa la información que se encierra en la distribución de amplitudes y fases en este campo. La toma de la fotografía de la distribución de intensidad en un cuadro de interferencia especialmente creado que aparece como resultado de la superposición del campo ondulatorio del objeto con la onda testigo coherente a él, hace posible el registro de la información completa, transmitida por el campo ondulatorio estudiado. La ulterior difracción de la luz en la distribución de los ennegrecimientos en la capa fotográfica del holograma reconstruye el campo ondulatorio del objeto y permite el estudio de este campo en ausencia del objeto de observación. Examinemos ahora algunas aplicaciones prácticas de la holografía.

El número de los datos independientes acerca del objeto, fijados en el holograma, puede ser valorado aproximadamente con ayuda de las siguientes consideraciones. Como elemento independiente del objeto (como su «celdilla elemental») es necesario tomar el área con dimensiones iguales al intervalo discernible $l_{mín}$. En realidad, si las propiedades del cuerpo cambian en la extensión de dicha área, entonces el holograma no podrá reflejar las variaciones y registrará solamente cierto valor medio de los parámetros que describen estas propiedades. Al contrario, para distancias que sobrepasan el intervalo resoluble tenemos la posibilidad de distinguir alguna diferencia de las propiedades del objeto. Lo dicho puede ser considerado, en esencia, como una definición general del concepto del poder separador, y las condiciones de separación, deducidas en el § 63, como medida cuantitativa del poder separador.

Designemos a través de Ω el ángulo sólido que se apoya en el objeto desde el plano del holograma. El ángulo sólido correspondiente al elemento independiente del objeto, evidentemente es igual a $l^2_{mín}/r^2_1$. Por eso el número de elementos independientes que contiene el ángulo sólido Ω se da por la expresión $N = \Omega r^2_1/l^2_{mín}$. Por otra parte, el valor $l_{mín}$ está ligado con las dimensiones D del holograma por la relación (63.1) y con su ayuda hallamos que $N = \Omega D^2/\lambda^2$. En las siguientes valoraciones vamos a poner $\Omega = 1$, lo que responde a dimensiones angulares del objeto próximas a 60°. En este caso

$$N = D^2/\lambda^2. \tag{67.1}$$

De esta manera, el número de datos independientes acerca del objeto registrados en el holograma es inversamente proporcional al cuadrado de la longitud de onda y proporcional al área del holograma (D^2). Por lo tanto, se puede decir que en 1 cm² del holograma se registran

$$N_1 = 1/\lambda^2 \tag{67.2}$$

datos independientes sobre el objeto.

Podemos llegar a las expresiones (67.1) y (67.2) para N y N_1 con ayuda de consideraciones algo diferentes. Se puede considerar, por ejemplo, que N es igual al cuadrado de la relación entre las dimensiones lineales del holograma y el período mínimo del cuadro de interferencia, $N = (D/d)^2$. Debido a que $d^2 = (\lambda/2\varphi)^2 = \lambda^2/\Omega$ (2φ son las dimensiones angulares del objeto), nosotros volvemos a obtener (67.1).

Sea $\lambda = 0{,}63 \cdot 10^{-4}$ cm (láser a mezcla de helio y neón); en este caso en 1 cm² de superficie del holograma pueden contenerse $N = 2{,}5 \cdot 10^8$ datos de información independientes, y en un holograma relativamente pequeño de 5 × 8 cm² se encuentran aproximadamente $N = 10^{10}$ datos.

Desde luego, no toda la información de este número fantástico posee igual valor y no siempre aparece la necesidad de un número tan grande de N. Si, por ejemplo, es necesario fijar la posición de treinta y dos figuras en el tablero de ajedrez, entonces con una reserva diez veces mayor es suficiente disponer de un área del holograma de $32 \cdot 10 \, \delta_{min}$. Una partida de ajedrez de 40 jugadas exige para su registro $10 \cdot 32 \cdot 40 \cdot 2 \, \delta_{min} = 2{,}56 \cdot 10^3 / 2{,}5 \cdot 10^3 = 10^{-4}$ cm^2. Pero si nosotros queremos obtener una información detallada acerca de las figuras talladas de ajedrez*), entonces el volumen necesario de datos aumentará considerablemente. En este caso el área del holograma, que se exige en el caso de observación unilateral, es aproximadamente igual al área de proyección de las figuras en el plano perpendicular a la dirección de la observación, es decir, constituye cerca de un centenar de cm^2, y en el caso de una observación multilateral contendrá mucho más.

El número grande de datos independientes de información registrados por el holograma se manifiesta exteriormente en la complejidad extraordinaria de su estructura que causa la impresión de un conjunto caótico y completamente aleatorio de manchas de ennegrecimiento de todas las posibles formas y orientaciones, como se ve en la fig. 11.7, *b*. Sin embargo, la opinión acerca del carácter aleatorio de la estructura del holograma, desde luego, es subjetiva, y es consecuencia de la incapacidad del aparato de visión de extraer del holograma los datos completamente ordenados y regulares acerca del objeto de forma compleja. Contrariamente a esto, en la estructura anular del holograma de la onda esférica, el ojo a primera vista capta una regularidad general, y este holograma nos parece normal. Sin embargo, si el problema consiste no sólo en constatar la onda esférica en primera aproximación, sino en medir exactamente su radio de curvatura o en estudiar las pequeñas desviaciones de la forma esférica del frente ondulatorio, entonces aquí también la situación puede adquirir un carácter complicado y exigir para su descripción un número grande de datos de información y correspondientemente un área grande del holograma.

En el ejemplo de la onda esférica los datos acerca de la fuente registrados por el holograma pueden ser extraídos con el procesamiento inmediato del mismo holograma, es decir, con ayuda de la medición de los radios de los anillos (véase § 59). En casos más complejos, por ejemplo, el holograma de las figuras de ajedrez, un intento de elaboración semejante está condenado al fracaso. Desde este punto de vista la reconstrucción de la imagen puede ser considerada como una *transformación automática de la información* de una forma a otra más cómoda para la percepción y para la formulación de cierto

*) Esta impresión no puede ser percibida de las figs. 11.6, y 11.8 precisamente a causa del insuficiente poder separador de la reproducción.

conclusión a base de los datos adquiridos. Al mismo tiempo, precisamente esta transformación constituye la esencia de los numerosos métodos del procesamiento óptico de información.

Es necesario subrayar que la transformación señalada de la información registrada se realiza muy rápidamente. El tiempo mínimo necesario para la reconstrucción de la imagen se puede valorar así. Sea que la onda iluminadora constituye un impulso luminoso con duración τ. El impulso de duración limitada puede ser considerado como un conjunto de ondas monocromáticas, además el ancho espectral $\delta\nu$ del impulso, de acuerdo con lo expuesto en el § 21, está relacionado con τ mediante la fórmula universal $\delta\nu\tau = 1$. El holograma, siendo en esencia, una red de difracción, efectuará la descomposición espectral del impulso, y la imagen de cada punto del objeto será ampliada de la manera correspondiente. Para que esta ampliación prácticamente no sea notable, el ancho espectral del impulso debe ser menor que el intervalo de frecuencias discernible por el holograma-red (véase § 50). A base de las consideraciones expuestas es fácil mostrar que la duración del impulso debe de satisfacer la condición

$$\tau > \frac{D}{c}(\operatorname{sen}\varphi_0 - \operatorname{sen}\varphi), \qquad (67.3)$$

donde D es la dimensión del holograma, φ_0 y φ son los ángulos de incidencia sobre el holograma de la onda testigo y la del objeto. La condición obtenida puede ser interpretada de otro modo: la longitud del impulso $c\tau$ debe ser mayor que la diferencia de recorrido $D(\operatorname{sen}\varphi_0 - \operatorname{sen}\varphi)$ entre las ondas que van desde los trazos extremos de la red; en caso contrario las ondas indicadas no podrán interferir en el punto de la imagen, trabajará no todo el holograma y la imagen resultará ensanchada.

Poniendo $D = 9$ cm, $\operatorname{sen}\varphi_0 - \operatorname{sen}\varphi = 1/3$ en (67.3), hallamos el valor extraordinariamente pequeño de la duración necesaria del impulso $\tau \approx 10^{-10}$ s. Si se reducen las exigencias a la calidad de la imagen se puede disminuir aún más la duración mínima del impulso.

Lógicamente, no siempre la rapidez del proceso de reconstrucción de la imagen holográfica garantiza un pequeño tiempo del trabajo del sistema que incluye también el registro de la imagen reconstruida. El tiempo de inercia del ojo, por ejemplo, constituye aproximadamente 0,1 s, y en el caso del registro visual de la imagen la capacidad de inercia del sistema completo es limitada por el ojo. Sin embargo existen receptores de luz con un tiempo de inercia de 10^{-8} s y aún menor (por ejemplo los fotomultiplicadores, véase § 181) y, por lo tanto, puede ser realizada la holografía rápida.

De esta manera, desde el punto de vista del carácter aplicado de la holografía ésta posee la capacidad de registrar (*grabar*), conservar

y transformar de manera extraordinariamente rápida un inmenso número de datos. Justamente estos rasgos de la holografía, fundamentados en sus principios físicos, aseguraron el amplio campo de su aplicación para la solución de los más diversos problemas científicos y técnicos.

Examinemos uno de los métodos de la holografía aplicada, llamado *interferometría holográfica*, el cual disfruta de una amplia propagación. La esencia de este método en su variante más simple se reduce a lo siguiente. En una placa fotográfica se registran consecutivamente dos cuadros de interferencia, correspondientes a dos estados diferentes, pero que casi no se distinguen del objeto, por ejemplo, en el proceso de deformación. Al iluminar este holograma «doble» se formarán, lógicamente, dos imágenes del objeto, variadas una con respecto a la otra en la misma medida que el objeto en sus dos estados. Las ondas reconstruidas que forman estas dos imágenes son coherentes, interfieren y por eso en la superficie de la imagen se observan franjas, las cuales caracterizan precisamente la variación de estado del objeto.

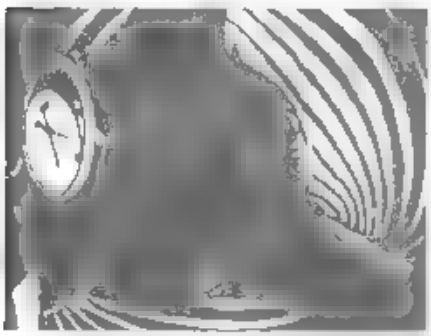


Fig. 11.16. Deformación del objeto registrada con el método de la interferometría holográfica.

En otra variante el holograma es confeccionado para algún estado determinado del objeto; al ser atravesado el holograma con la luz, el objeto no se quita, sino que se alumbra como en la primera etapa de la toma del holograma. Entonces de nuevo obtenemos dos ondas, una de las cuales forma la imagen holográfica, y la otra se propaga desde el objeto mismo. Si ahora ocurre alguna variación en el estado del objeto (en comparación con el que había en el momento de la exposición del holograma), entonces entre las ondas indicadas aparece una diferencia de recorrido y la imagen se cubre de franjas de interferencia.

El método descrito se utiliza para la investigación de las deformaciones de los objetos, sus vibraciones, los movimientos de avance y rotaciones, de las heterogeneidades de los objetos transparentes, etc. En la fig. 11.16 se muestra la fotografía de la imagen de un conjunto de bolas, comprimido en el patrón de un torno. El cuadro de interferencia testimonia claramente la diferencia de las deformaciones en el caso de dos valores de la fuerza de compresión, acerca de lo cual podemos juzgar por las dos posiciones de la aguja del tensómetro (parte izquierda de la figura) registradas en los momentos de las dos exposiciones consecutivas.

Una formidable particularidad de la interferometría holográfica es que no hace falta plantear altas exigencias ante el acabado de las superficies reflectoras o ante la homogeneidad óptica de los objetos a investigar. En la realidad, como resultado de las deformaciones, vibraciones y otros cambios en el estado del objeto aparecen diferencias de recorrido, que varían a lo largo de la superficie del cuerpo. Por eso el cuadro de franjas es análogo al observado en el caso de interferencia en películas delgadas (véase cap. VI), el rol de las cuales (con ciertas restricciones) lo desempeña el espacio *intermedio* entre dos posiciones de la superficie del cuerpo en sus dos estados consecutivos. En otras palabras, los frentes de las ondas interferentes pueden tener una forma muy compleja, pero frecuentemente el cuadro de interferencia es relativamente tosco y fácilmente observable. Utilizando la terminología holográfica, se puede decir que una de estas ondas sirve de testigo a la otra, además en cada caso concreto la onda testigo es completamente semejante a la que proviene del objeto. Al contrario, en los aparatos de interferencia (interferómetros de Jamin, Michelson y otros, véase cap. VII) como onda de comparación, es decir, testigo sirve una onda completamente determinada, estándar, plana o esférica, y el frente ondulatorio de las ondas a investigar debe ser igualmente simple. En caso contrario la interferencia da un cuadro a pequeña escala del tipo mostrado en la fig. 11.7, *b*, lo que, por supuesto, es menos cómodo. Por lo tanto, también los cuerpos reflectores deben tener una superficie de alta calidad óptica. La interferometría holográfica está exenta de esta rigurosa restricción.

Gracias a la particularidad indicada, se puede realizar una interferencia holográfica en el caso de reflexión de la luz en superficies ásperas de cuerpos difusores (por ejemplo, llantas de automóviles, vigas, superficies corroídas, etc.), para objetos introducidos en un recipiente con paredes muy heterogéneas, etc. Por eso la interferometría holográfica ha obtenido una amplia aplicación.

ÓPTICA GEOMÉTRICA DE RAYOS

12. FUNDAMENTOS DE LA ÓPTICA DE RAYOS

§ 88. Introducción

Los fenómenos de interferencia y de difracción de la luz muestran que la propagación de la luz es un proceso ondulatorio. Con ayuda de la teoría ondulatoria nosotros podemos resolver los problemas acerca de la propagación de la luz tanto en un medio homogéneo, como también a través de cualquier sistema óptico, es decir, a través de un conjunto de diferentes medios limitados por determinadas superficies y diafragmas. Sin embargo, en muchísimos casos que son de un gran valor práctico como, por ejemplo, el problema acerca de la formación del haz luminoso (luminotecnia) y los problemas acerca de la formación de imágenes (optotecnia), la solución puede ser obtenida de una manera mucho más simple con ayuda de las concepciones de la *óptica geométrica*.

La óptica geométrica opera con el concepto de *rayos* luminosos aislados que se subordinan a las conocidas leyes de refracción y reflexión y que son independientes entre sí (véase «Introducción», § 1).

El concepto haz luminoso se puede obtener del análisis de un haz luminoso real en un medio homogéneo, del cual con ayuda de un diafragma con orificios o de una sucesión de éstos se separa un estrecho haz paralelo. Cuanto menor sea el diámetro de estos orificios, más angosto será el haz separado, y en el límite, al pasar este último a través de los orificios infinitamente pequeños, se podría, al parecer, obtener un haz luminoso como una línea recta. Sin embargo, nosotros sabemos que tal proceso de separación de un haz infinitamente angosto (de un rayo) es imposible a consecuencia del fenómeno de difracción. El inevitable ensanchamiento angular del haz luminoso que pasa a través del diafragma de diámetro D, se define por el ángulo de difracción $\varphi \sim \lambda/D$ (dirección hacia el primer mínimo, véase § 39). Sólo en el caso límite, cuando $\lambda = 0$, tal ensan-

chamiento no se produciría y se podría hablar del rayo como de una línea geométrica, cuya dirección coincide con la dirección de propagación de la energía luminosa. De esta manera, el rayo luminoso es un concepto matemático abstracto, y no un ente físico, y la óptica geométrica es solamente un caso límite de la óptica ondulatoria real, que corresponde a una onda luminosa infinitamente pequeña.

La relación $\varphi \approx \lambda/D$ muestra que la desviación angular que viola la rectitud de la propagación de la luz en un medio homogéneo puede ser bastante pequeña, si las dimensiones del orificio o de la pantalla son muy grandes en comparación con la longitud de onda λ. Por eso en la óptica real, donde λ es una magnitud finita, las divergencias de las leyes de la óptica geométrica deberán ser tanto menores cuanto mayores sean las dimensiones D.

Las dimensiones de los objetos son muy importantes también en el problema de la formación de sombras nítidas, cuya existencia constituye uno de los mejores argumentos a favor de las concepciones de rayos en la óptica (véase § 1). Como se ve del § 37 para distancias relativamente pequeñas desde el objeto hasta el punto de observación (difracción de Fresnel) el ancho de la región en donde se observan franjas de difracción, en las cercanías de la sombra geométrica, es igual aproximadamente al radio de la primera zona de Fresnel; en el caso de una onda plana (fuente infinitamente alejada) el radio de esta zona $r = \sqrt{f\lambda}$ (f es la distancia desde el objeto que provoca la difracción de la luz hasta el punto de observación). Como medida de la nitidez de la sombra es natural tomar la relación entre la dimensión lineal del objeto x y el radio de la zona, es decir, x/r. Sólo para $x/r \gg 1$ la región de penumbra será relativamente ancha y será alterada la semejanza entre el objeto y la sombra. De esta relación se deduce que la ausencia de sombra tendrá lugar sólo para distancias $f \gg x^2/\lambda$. Ya para $x = 1$ cm, $\lambda = 500$ nm tenemos $f = 200$ m.

La fig. 8.18 citada anteriormente, muestra cómo se vería la sombra producida por una mano que sostiene un plato al ser alumbrada ésta por un haz paralelo de rayos. Para una distancia relativamente pequeña (véase fig. 8.18, *a*) la sombra es bastante nítida y semejante al objeto, mientras que para una distancia mayor ($f = 11$ km, véase fig. 8.18, *b*) no tiene lugar ninguna semejanza geométrica entre la sombra y el objeto. Sin embargo, en las condiciones ordinarias de observación tales deformaciones no se manifiestan, y la aplicación de las leyes de la óptica geométrica lleva a construcciones que, como muestra la experiencia, de una manera satisfactoria resuelven el problema de la propagación de luz y de la formación de imagen.

De esta manera, para un vasto círculo de tareas de la luminotecnia y de la optotecnia nosotros tenemos posibilidad de utilizar la óptica geométrica de los rayos. Sin embargo, al utilizar las leyes de la óptica de los rayos no se debe olvidar de que ellas son solamente la primera aproximación a la realidad y que los fenómenos de di-

fracción están presentes en cada caso de propagación de la luz. Por lo tanto, es necesario comprender el sentido ondulatorio (de difracción) de estas construcciones de rayos (geométricas). De aquí está claro que las leyes de la óptica de rayos tienen una aplicación limitada, y hay que saber orientarse en qué condiciones sea posible la aplicación de estas leyes y cuándo concuerden prácticamente con el experimento. Sin embargo, resulta que incluso en la óptica aplicada los problemas más delicados (por ejemplo, el problema acerca del poder separador de los instrumentos ópticos) se resuelven con ayuda de la teoría de difracción.

§ 69. Principio de Fermat

En aquel caso extremo, cuando es válida la transición a la óptica geométrica, es decir, en el caso de una longitud de onda infinitamente pequeña, la dirección de la propagación del frente ondulatorio puede ser determinada con una construcción sencilla. Sea que la superficie F (fig. 12.1) representa la superficie de igual fase (frente ondulatorio) en cierto momento t. En cada punto M de esta superficie construyamos una esfera con radio $dn = v\tau$, donde v es la velocidad de propagación de la onda en el lugar dado, y τ, un intervalo infinitamente pequeño de tiempo. La superficie F' que contornea estas pequeñas esferas también es una superficie de igual fase, ya que todos sus puntos tendrán en el momento $(t + \tau)$ las mismas fases que los puntos de la superficie F en el momento t. Los segmentos de recta dn, que unen los puntos M con el punto de intersección de la esfera correspondiente y la envolvente, constituyen unos elementos de rayo, que son perpendiculares a la superficie del frente*).

Continuando esta construcción, nosotros podemos paso a paso determinar la superficie de igual fase y al mismo tiempo hallar la dirección de los rayos, que son curvas, en las cuales se convierten las líneas quebradas compuestas por los segmentos dn, si τ es escogido infinitamente pequeño.

Con ayuda de la construcción indicada se puede demostrar la siguiente afirmación importante: *el camino real de propagación de la luz (el rayo) es aquel camino que la luz recorre en un tiempo mínimo en comparación con cualquier otro camino posible entre los mismos puntos*. En efecto, habiendo efectuado la construcción descrita anteriormente (fig. 12.2), veremos que desde el punto A hasta el B *a lo largo del rayo* la luz tardará un tiempo $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n$, donde $\tau_i = dn_i/v_i$, es decir,

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} \frac{dn_i}{v_i} = \int_A^B \frac{dn}{v}.$$

*) Para simplificar los razonamientos nos limitaremos al caso de un medio isótropo, cuando el rayo y la normal al frente coinciden (véase § 142).

Cualquier otro camino posible estará compuesto de segmentos, para el recorrido de los cuales se requiere un tiempo τ_i, si este segmento coincide con la normal al frente, o un tiempo *mayor* que τ_i, si el segmento difiere de la normal. De esta manera, el camino real de propagación de la luz (el rayo) corresponde al tiempo mínimo de propagación.

Este teorema demostrado por nosotros para la teoría ondulatoria en aquella aproximación, cuando es válida la óptica geométrica ($\lambda \to 0$), constituye en la óptica geométrica un *axioma* que es denominado como principio del *recorrido óptico más corto* (o del tiempo mínimo de propagación). El fue formulado por Fermat como una ley general de propagación de la luz (principio de Fermat, cerca del año 1660). En efecto, no es difícil ver que para un medio homogéneo este principio conduce a la ley de propagación rectilínea de

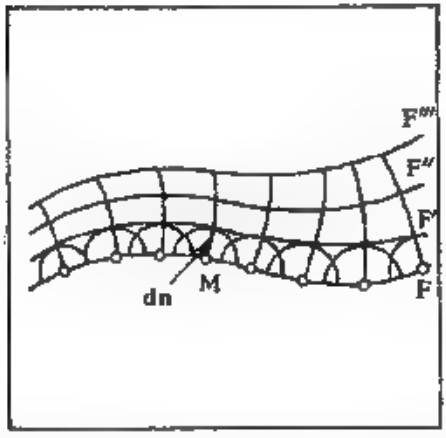


Fig. 12.1. Ilustración al principio de Fermat: construcción consecutiva del frente ondulatorio.

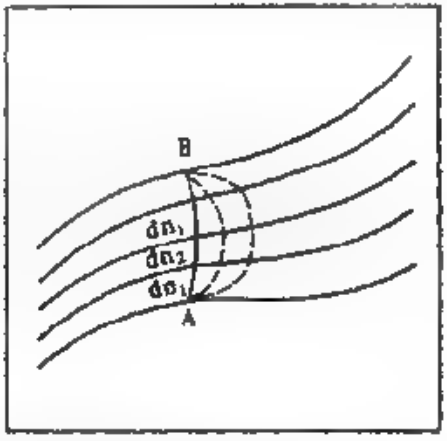


Fig. 12.2. Principio de Fermat: el recorrido real AB de la luz corresponde al tiempo mínimo de propagación.

acuerdo con el axioma geométrico acerca de que la recta es la distancia más corta entre dos puntos; en el caso cuando la luz pasa a través del límite de dos medios diferentes este principio da las leyes de reflexión y refracción de la luz.

Sea que la luz procedente del punto P llega al punto Q refringiéndose en el límite plano de separación de dos medios (fig. 12.3). Tracemos a través de P y Q un plano perpendicular al límite de separación (plano de incidencia). La luz pasará *cualquier* camino PO_1Q que se encuentre fuera del plano de incidencia en un tiempo mayor que el necesario para el recorrido de POQ trazado en el plano de incidencia de tal manera que O sea la base de la perpendicular bajada desde O_1 sobre el plano de incidencia. En efecto, tanto en el primero, como

en el segundo medio, las longitudes de los recorridos a través de O_1 son respectivamente mayores que a través de O ($PO_1 > PO$ y $QO_1 > QO$).

Por lo tanto, de acuerdo con el principio de Fermat, el camino que requiere el tiempo mínimo debe contenerse en el plano de incidencia (primera ley de la refracción). Para que de todos los caminos desde P hasta Q en el plano de incidencia podamos escoger el camino que requiere el mínimo tiempo investiguemos cómo varía este tiempo en dependencia de la posición del punto O sobre la línea de intersección del plano de incidencia con el plano de separación.

La posición del punto O es definida por la longitud del segmento $AO = x$, donde A es la base de la perpendicular bajada desde el punto P hacia el plano de separación. El tiempo de propagación de la luz por el camino POQ es

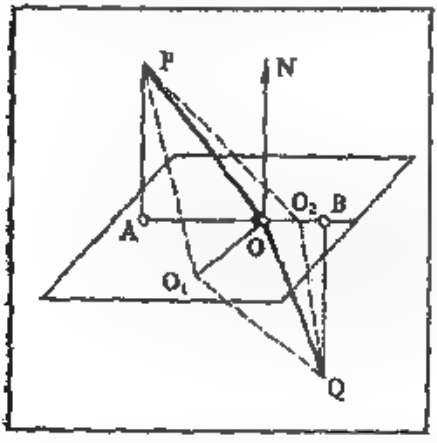


Fig. 12.3. Deducción de la ley de refracción a partir del principio de Fermat.

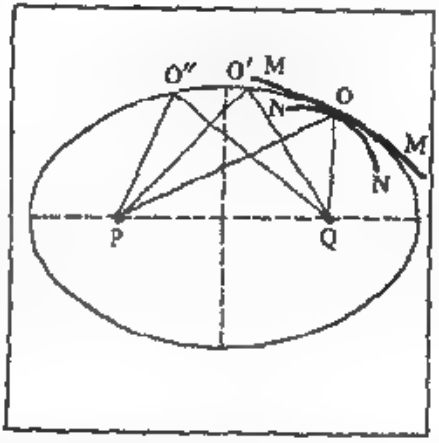


Fig. 12.4. Principio de Fermat: el camino real de la luz corresponde al tiempo estable de propagación.

$$t = \frac{PO}{v_1} + \frac{OQ}{v_2},$$

donde v_1 y v_2 son las velocidades de la luz en el primer medio y en el segundo. Designando $PA = h_1$, $QB = h_2$ y $AB = p$, hallaremos que

$$t = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (p-x)^2}}{v_2}.$$

La condición que define para qué valor de x este tiempo será el mínimo, es que $\frac{dt}{dx}$ sea igual a cero. De ella se deduce

$$\frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2}\frac{p-x}{\sqrt{h_2^2 + (p-x)^2}} = 0,$$

es decir,

$$\frac{\operatorname{sen} i}{v_2} - \frac{\operatorname{sen} r}{v_1} = 0,$$

o bien

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{v_1}{v_2} = \text{const}\left(\frac{n_2}{n_1}\right).$$

De esta manera, del principio de Fermat se desprende la ley de refracción de los rayos luminosos. Del mismo modo se puede analizar el problema de la reflexión (véase ejercicio 34).

Es interesante notar, que el principio de Fermat conduce a la afirmación de que, en el medio con mayor índice de refracción ($n_2 > n_1$), la velocidad de la luz es menor ($v_2 < v_1$), es decir, concuerda con las concepciones de Huygens y contradice a la teoría de Newton. La fundamentación del principio de Fermat, sin embargo, no era lo suficientemente irreprochable para que, apoyándose en él, se pudiera hacer una elección entre las teorías de la luz.

Para que el principio de Fermat adquiriera un matiz más real era necesario darle una formulación más general, de la que fue hecha por el mismo Fermat; justamente, la condición $\frac{dl}{dx} = 0$ que destaca el recorrido real es una condición de extremo, es decir, puede ser no sólo condición de mínimo sino también condición de máximo o de estabilidad, o sea, el camino real puede ser mínimo, máximo o igual a todos los demás caminos posibles trazados desde P hacia Q a través del límite de separación de los dos medios. Ejemplo de recorrido mínimo son los casos estudiados anteriormente del paso de los rayos a través de un límite plano. Como ejemplo de valor estable del tiempo sirve el caso de reflexión de los rayos en la superficie interna de un elipsoide de revolución, en uno de los focos del cual está colocado el punto luminoso P (fig. 12.4). La imagen Q se obtiene en el otro foco, además de acuerdo con la propiedad del elipsoide $PO + OQ$ es una constante para todas las posiciones de O. La reflexión en una superficie de menor curvatura (MM), por ejemplo, en el plano tangente al elipsoide, corresponde a un mínimo de la longitud del recorrido (o del tiempo), y la reflexión en una superficie de mayor curvatura (NN), al máximo (véase ejercicio 35).

§ 78. Definiciones fundamentales. Ley de refracción y reflexión. El principio de reciprocidad

Utilizando las concepciones de la óptica de rayos nosotros consideramos cada punto luminoso de la fuente como el vértice del haz divergente de rayos, llamado *homocéntrico*, es decir, poseedor de un centro común. Si después de la reflexión y refracción este haz se convierte

en un haz convergente también en un punto, entonces este último también será un haz homocéntrico y su centro será *la imagen* del punto luminoso. En el caso de conservación de la homocentricidad, a cada punto de la fuente le corresponderá un punto de la imagen. Estas imágenes se llaman puntuales o *estigmáticas* (fig 12.5) En virtud de la reversibilidad (reciprocidad) de los rayos luminosos (véase más adelante), la imagen puede ser considerada como fuente, y la fuente como imagen. Por eso en el caso de la imagen estigmática los centros de nuestros haces se llaman puntos *confugados* de aquel sistema óptico, en el cual ocurre la transformación del haz homocéntrico divergente en convergente. Los rayos y los haces correspondientes también se llaman *confugados*. La superficie normal a los rayos

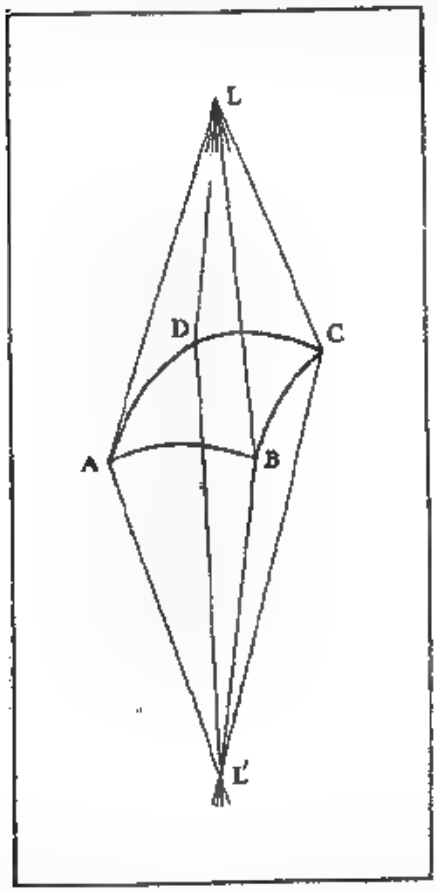


Fig. 12.5. *Imagen estigmática del punto L.*

El haz al pasar a través del sistema óptico conserva su homocentricidad.

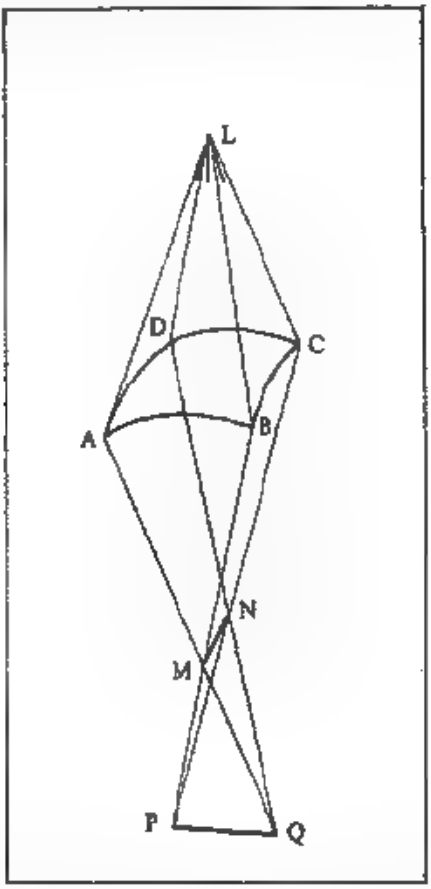


Fig. 12.6. *Imagen astigmática del punto L.*

La homocentricidad del haz es violada al pasar éste a través de un sistema óptico.

se llama *superficie ondulatoria*.*) Desde el punto de vista indicado, la superficie ondulatoria tiene un sentido puramente geométrico y no tiene aquel contenido profundo que nosotros le dábamos anteriormente. La superficie ondulatoria de un haz homocéntrico en un medio homogéneo e isótropo, evidentemente, es una superficie esférica.

Si como resultado de la reflexión y refracción el haz deja de ser homocéntrico, entonces la superficie ondulatoria dejará de ser una esfera. El carácter estigmático de la imagen se perderá, y la imagen ya no será un punto (fig. 12.6). Debido a que en la óptica práctica generalmente se plantea la tarea de obtener imágenes que reflejen exactamente la forma de la fuente, el problema más importante de la óptica de rayos consiste en aclarar bajo qué condiciones se conserva el carácter homocéntrico de los haces.

Las bases de todas las construcciones de la óptica de rayos son las leyes de refracción y reflexión de la luz. En la Introducción hemos examinado el contenido de éstas y mostramos qué sentido introduce en ellas la óptica ondulatoria. Aquí solamente reproduciremos la formulación matemática de estas leyes, dándole una expresión que permita examinar conjuntamente los problemas de refracción y reflexión, de tal manera que de las fórmulas referentes a los sistemas refringentes (lentes) puedan ser obtenidas inmediatamente las conclusiones para los sistemas reflectores (espejos).

Sin embargo previamente mostraremos que en los fenómenos de reflexión y refracción se cumple la ley de *reciprocidad*, o de *reversibilidad* de los haces luminosos.

Sea que el medio *1* está separado del vacío por una lámina fina *planoparalela* de medio *2* (fig. 12.7), n_1, n_2 y N_{21} son los índices de refracción absolutos y relativo de los medios respectivos. De la fig. 12.7 queda claro que

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} \alpha} = n_2; \quad \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} r} = N_{21}.$$

De aquí

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = n_2 N_{21}.$$

Esta fórmula es válida para *cualquier espesor* del medio *2*.

Pasemos al caso límite, cuando el medio *2* se vuelve infinitamente delgado, es decir, al caso de refracción inmediata desde el vacío al medio *1*. Entonces tenemos sen i/sen $r = n_1$. Contraponiendo estas dos fórmulas, hallaremos $N_{21} = n_1/n_2$. Repitiendo los mismos razonamientos para el caso cuando una capa fina del medio *1* separa el medio *2* del vacío, hallaremos $N_{12} = n_2/n_1$ ó $N_{12} = 1/N_{21}$, es decir, *el índice de refracción del primer medio respecto al segundo* (N_{12}) *es*

*) Véase § 6.

igual al valor inverso del índice de refracción del segundo medio respecto al primero (N_{21}).

De aquí de manera inmediata se deduce que en el caso de refracción en el límite de dos medios los rayos se mantienen *recíprocos*, es decir, al cambiar la dirección de los rayos por su opuesta la disposición mutua de éstos no varía (fig. 12.8). En la ley de reflexión este principio de reversibilidad del recorrido luminoso también es válido, como se ve fácilmente de la fig. 12.9. El principio de reciprocidad conserva, por supuesto, su validez para cualquier número de refracciones y reflexiones, ya que se cumple para cada una de ellas. De esta manera, el principio de reciprocidad es válido para todos los problemas relacionados con la construcción de imágenes.

La ley de refracción, al pasar la luz del primer medio al segundo (véase fig. 12.8), es:

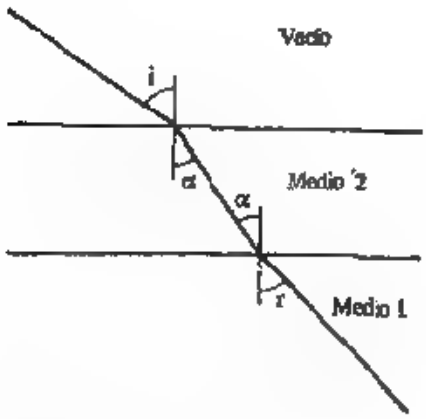


Fig. 12.7. Deducción de la ley de reciprocidad en la refracción.

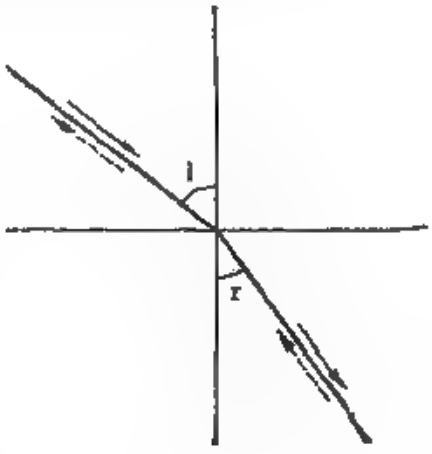


Fig. 12.8. Recorrido de los rayos en la refracción de la luz.

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = N_{12} = \frac{n_2}{n_1} \qquad (70.1)$$

o, bien

$$n_1 \operatorname{sen} i = n_2 \operatorname{sen} r.$$

La ley de reflexión (véase fig. 12.9) se expresa con la relación*)

$$i = -i'. \qquad (70.2)$$

Ella puede ser obtenida de la fórmula anterior poniendo $n_1 = -n_2$, de donde

$\operatorname{sen} i = -\operatorname{sen} r$, $i = -r$.

*) El signo menos indica que los ángulos i' e i se miden en diferentes lados de la normal a la superficie.

De esta manera, la ley de reflexión se obtiene de la ley de refracción si se pone $n_2 = -n_1$ y si por r se comprende el ángulo de reflexión. Por lo tanto, cualquier fórmula deducida para los sistemas refringentes puede ser utilizada para la descripción de los fenómenos en los sistemas reflectores.

§ 71. Refracción (y reflexión) en una superficie esférica

Supongamos que dos medios con índices de refracción n_1 y n_2 están separados por una superficie esférica Σ (fig. 12.10). Coloquemos la fuente puntual de luz L en la línea LL' que pasa a través del centro O de nuestra esfera. Examinemos un estrecho cono homocéntrico de

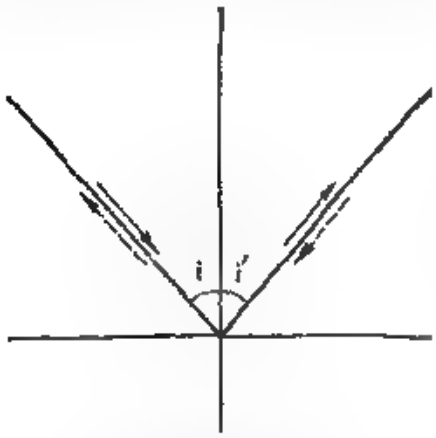


Fig. 12.9. Recorrido de los rayos en la reflexión de la luz.

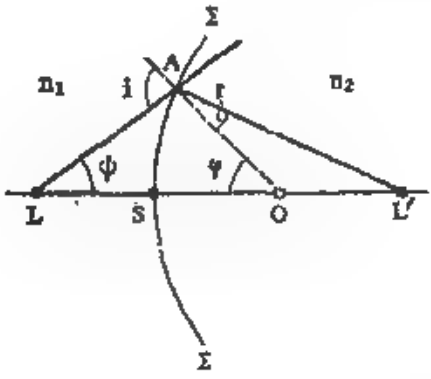


Fig. 12.10. Refracción de rayos paraxiales en el límite esférico de dos medios.

rayos incidentes desde L sobre la superficie de división de los dos medios.

Nosotros suponemos que el haz es tan estrecho, es decir, que el ángulo ψ es tan pequeño, que se puede considerar el segmento LS prácticamente igual a LA y $L'S$, igual a $L'A$, etc. Denominemos *paraxial**) a este haz estrecho. Así la condición para que un haz sea paraxial es

$$LS \approx LA \text{ y } L'S \approx L'A.$$

Tomemos algún rayo de este haz, por ejemplo LA, incidente sobre Σ bajo un ángulo i, construyamos el rayo AL' conjugado de él (án-

*) La línea LL' generalmente es llamada eje (*axis*) del sistema dado. De ahí la denominación paraxial (cercano al eje).

gulo de refracción r) y hallemos la posición del punto, en el cual el rayo refractado interseque el eje del sistema.

Del triángulo ALO tenemos

$$\frac{LO}{LA} = \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} \varphi},$$

del triángulo OAL'

$$\frac{AL'}{OL'} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} r}.$$

De aquí

$$\frac{LO}{LA}\frac{AL'}{OL'} = \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{n_2}{n_1}. \qquad (71.1)$$

En adelante todos los segmentos a lo largo del eje serán medidos a partir del punto S, considerando positivos los segmentos que se hallan de S *a la derecha* (en la dirección de propagación de la luz), y negativos, *a la izquierda*. De esta manera, $AL \approx SL = -a_1$, $AL' \approx SL' = a_2$, $AO = SO = R$ (radio de nuestra esfera). En este caso $LO = -a_1 + R$, $OL' = a_2 - R$. De la fórmula (70.1) obtenemos

$$\frac{-a_1 + R}{-a_1}\frac{a_2}{a_2 - R} = \frac{n_2}{n_1},$$

es decir,

$$n_1\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{R}\right) = n_2\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{R}\right) = Q. \qquad (71.2)$$

La última fórmula muestra que el producto $n\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R}\right)$ en la refracción conserva su magnitud Q. Este producto se llama *invariante nulo de Abbe*. Para muchos fines a esta fórmula es cómodo darle la forma

$$\frac{n_1}{a_1} - \frac{n_2}{a_2} = \frac{n_1 - n_2}{R}. \qquad (71.3)$$

La relación (71.3) permite calcular la longitud $a_2 = SL'$, si es conocido $a_1 = LS$, es decir, permite determinar la posición del punto L' para un L prefijado. En su deducción nosotros, además de la ley de refracción, hemos utilizado también la suposición de que el rayo LA pertenece a un haz paraxial. Por lo tanto, la relación es válida para *cualquier rayo* del haz *paraxial*. De la fórmula (71.3) se ve, que a_2 para parámetros del problema predeterminados (n_1, n_2, R) depende sólo de a_1. De esta manera, todos los rayos del haz paraxial homocéntrico que sale de L intersecan el eje en un mismo punto L', el cual es, por lo tanto, la imagen estigmática de la fuente L. Así el haz homocéntrico al refractarse sobre una superficie esférica se mantiene homocéntrico, si él cumple con la condición de paraxia-

lidad. La ecuación fundamental (71.3) abarca todos los casos de refracción de los rayos en una superficie esférica. Con el convenio de signos establecido anteriormente, nosotros podemos analizar el caso de una superficie convexa ($R > 0$) o cóncava ($R < 0$).

De la misma manera, en dependencia de la diferencia o igualdad de los signos de a_1 y a_2, tendremos los casos, en que la imagen se dispone al lado opuesto de la superficie refringente o del mismo lado respecto a la fuente. En el primer caso ($a_2 > 0$) el punto denominado imagen es realmente el punto de intersección de los rayos refractados. Esta imagen se llama *real*. En el segundo caso ($a_2 < 0$), evidentemente, los rayos refractados que pasan al segundo medio permanecen divergentes y no se intersecan realmente. En este caso la denominación *imagen* se refiere a aquel punto imaginario que constituye el lugar de intersección de la supuesta prolongación de los rayos refractados. Esta imagen se llama *virtual*. Nuestros razonamientos y la fórmula (71.3) muestran que el haz homocéntrico después de la refracción está dirigido de tal manera, que sus rayos se intersecan en un punto (imagen real) o bien pueden ser representados como si se intersequen en un punto (imagen virtual). Justamente en este sentido se dice que él se mantiene *homocéntrico*. Debido a que para todos nuestros razonamientos es importante saber *la dirección* de los rayos luminosos, entonces en todas las construcciones podemos utilizar igualmente tanto la imagen real como la virtual.

La fórmula (71.3) muestra también, que si la fuente estuviese en L', entonces la imagen se colocaría en L (reciprocidad).

§ 72. Focos de la superficie esférica

De la ecuación fundamental (71.3)

$$\frac{n_1}{a_1} - \frac{n_2}{a_2} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

se deduce que

para $a_1 = -\infty$

$$a_2 = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1} = f_2, \tag{72.1}$$

para $a_2 = \infty$

$$a_1 = -\frac{n_1 R}{n_2 - n_1} = f_1, \tag{72.2}$$

es decir, f_1 y f_2 dependen solamente del radio de curvatura R de la superficie y de los índices de refracción n_1 y n_2 de ambos medios.

Las magnitudes f_1 y f_2 son longitudes constantes que caracterizan la superficie refringente y se llaman sus *distancias focales*: f_1 es la

distancia focal anterior (el punto F_1 es el foco anterior); f_2 es la distancia focal posterior (el punto F_2 es el foco posterior) (fig. 12.11).

De esta manera, se llama foco de la superficie esférica el punto en el cual convergen, después de la refracción, los rayos paralelos (es decir, los rayos que vienen desde un punto infinitamente alejado). Se comprende que los focos, al igual que las imágenes, pueden ser reales y virtuales, es decir, son los puntos de intersección de los rayos refractados (que eran paralelos antes de refractarse) o de sus supuestas continuaciones. De esta manera, si el lado cóncavo de la superficie de separación está dirigido hacia el medio poseedor del menor índice de refracción, entonces ambos focos serán virtuales. Es fácil convencerse de esto tanto del análisis de las fórmulas (72.1) y (72.2), como de la construcción geométrica.

Los rayos paralelos que van de derecha a izquierda a lo largo

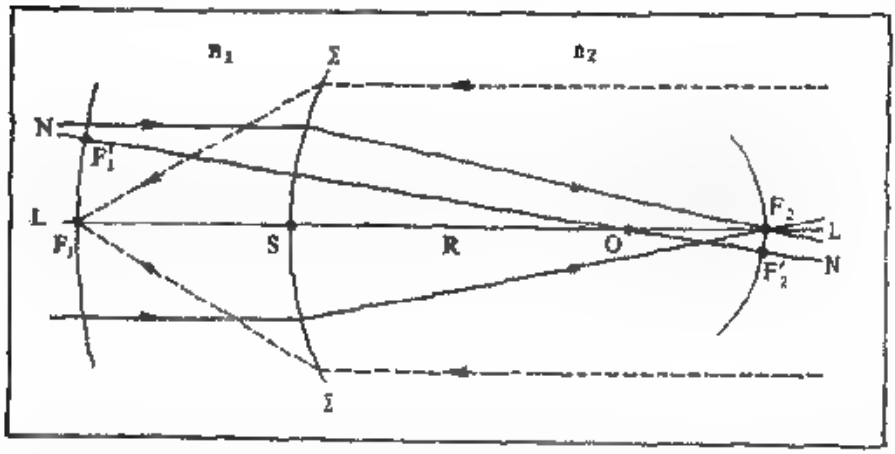


Fig. 12.11. Focos de la superficie esférica

de NO (véase fig. 12.11) se reunirán en el foco F'_1 que está dispuesto en la línea NO también a una distancia $|f_1|$ de la superficie refringente. El lugar geométrico de los puntos F_1, F'_1 . . . forma una superficie esférica con radio $|R - f_1|$ (para el caso mostrado en la fig. 12.11, $f_1 < 0$) la cual es concéntrica con la esfera refringente (con centro en el punto O). Esta superficie lleva el nombre de *superficie focal anterior* En forma análoga construyamos *la superficie focal posterior* de radio $|f_2 - R|$ Los pequeños sectores de estas superficies (para la región paraxial) pueden ser considerados como planos (planos focales).

Las distancias focales de la superficie esférica son de diferentes signos y no son iguales entre sí según su magnitud absoluta (véase fig. 12.11), ya que $n_1 \neq n_2$. El caso examinado es fácil de realizar

en el experimento, si tomamos un ancho tubo de vidrio y pegamos uno de sus extremos a un vidrio de reloj que posea una forma esférica. Si se vierte al tubo agua, o, lo que es mejor, benceno cuyo índice de refracción prácticamente coincide con el del vidrio de reloj, entonces obtendremos un límite esférico de separación entre el aire ($n_1 = 1{,}00$) y el benceno ($n_2 = 1{,}49$). En este sencillo aparato es fácil convencerse que de acuerdo con (72.1) y (72.2) se cumple

$$f_2/f_1 = -n_2/n_1. \tag{72.3}$$

Un importante ejemplo práctico de una superficie esférica refringente es el sistema equivalente al ojo que lleva el nombre de «ojo reducido» (véase § 91). En calidad de segundo ejemplo examinemos el espejo esférico. De acuerdo con lo dicho en el § 70, la fórmula (71.3) puede ser utilizada también para el caso de reflexión si ponemos $n_2 = -n_1$. Entonces tendremos

$$1/a_1 + 1/a_2 = 2/R, \tag{72.4}$$

es decir, la conocida fórmula del espejo esférico. La distancia focal de este espejo se determina por la fórmula (72.1). Encontraremos $f = R/2$, y por lo tanto, a la fórmula (72.4) se le puede dar la forma

$$1/a_1 + 1/a_2 = 1/f. \tag{72.5}$$

En el caso de un espejo la imagen es real, si ella está de mismo lado que la fuente, y es virtual, si está dispuesta detrás del espejo.

Los casos de espejos convexo y cóncavo se diferencian solamente por el signo de R. Es fácil ver que el foco del espejo cóncavo es real y el foco del espejo convexo, virtual.

Para obtener las leyes del espejo plano, es suficiente poner $R = \infty$. En este caso encontraremos $a_1 = -a_2$, es decir, la imagen del punto en el espejo plano es virtual y está dispuesta simétricamente.

§ 73. Imagen de objetos pequeños obtenida en el caso de refracción en una superficie esférica

Utilizando las propiedades de los haces homocéntricos paraxiales, se puede construir la imagen de pequeñas áreas en el caso de refracción en una superficie esférica. Imaginemos una superficie esférica, cerca del centro de la cual está dispuesto un pequeño diafragma DD que separa estrechos haces paraxiales con relación a sus respectivos ejes. Este haz homocéntrico paraxial después de la refracción queda homocéntrico, es decir, de la imagen de su vértice. De manera correspondiente se formará la imagen de cualquier punto del arco luminoso ACB (o de una parte de la esfera) (fig. 12.12) con centro en O. Para obtener la imagen de todos los puntos de ACB utilizaremos la fór-

mula

$$\frac{n_1}{a_1} - \frac{n_2}{a_2} = \frac{n_1 - n_2}{R}.$$

Debido a que para todos los puntos de ACB todos los a_1 tienen un mismo valor, entonces todos los a_2 también serán iguales; el elemento de la esfera con radio $R - a_1$ tendrá una imagen de la forma de un elemento de esfera con radio $a_2 - R$ con el centro común O. Para hallar gráficamente el punto B', por ejemplo, se puede trazar el rayo $BM \parallel CO$; entonces el rayo refractado deberá pasar a través del foco F_2; el rayo BO pasa sin refractarse. La intersección de las continuaciones de MF_2 y BO corresponderá justamente a la posición de B'.

Considerando que AB y $A'B'$ son muy pequeños, en vez de los arcos (elementos de la esfera) se pueden coger cuerdas (elementos del

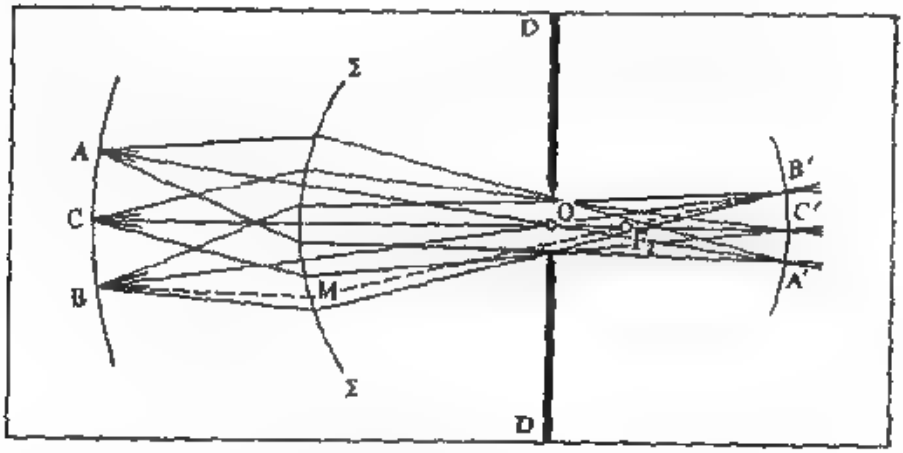


Fig. 12.12. Imagen del pequeño objeto ACB en el caso de refracción en una superficie esférica.

plano). De esta manera, en el sistema esférico una pequeña área perpendicular al eje formará su imagen con ayuda de rayos paraxiales en forma de un área también perpendicular al mismo eje.

El plano objeto AB y el plano imagen $A'B'$ se llaman planos *conjugados* con respecto a dado sistema óptico.

§ 74. Aumento. Teorema de Lagrange — Helmholtz

Escojamos en cal dad de objeto luminoso la línea A_1B_1 perpendicular al eje y construyamos su imagen A_2B_2 (*fig.* 12.13). La relación entre las dimensiones lineales de la imagen ($y_2 = A_2B_2$) y el objeto

($y_1 = A_1B_1$) lleva el nombre de aumento *lineal* o *lateral* $V = y_2/y_1 = A_2B_2/A_1B_1$. Dándoles a A_1B_1 y A_2B_2 los signos (como se acostumbra en la geometría), obtendremos que el aumento es *positivo* si la imagen está *derecha* y *negativo* si está *invertida*.

De los triángulos A_1B_1S y A_2B_2S tenemos

$$y_1/a_1 = \operatorname{tg} i, \quad y_2/a_2 = \operatorname{tg} r.$$

Para pequeñas dimensiones de A_1B_1 y A_2B_2

$$\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} r} = \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{n_2}{n_1},$$

es decir,

$$\frac{n_1 y_1}{a_1} = \frac{n_2 y_2}{a_2} \text{ o bien } \frac{y_2}{y_1} = V = \frac{n_1}{n_2}\frac{a_2}{a_1}. \tag{74.1}$$

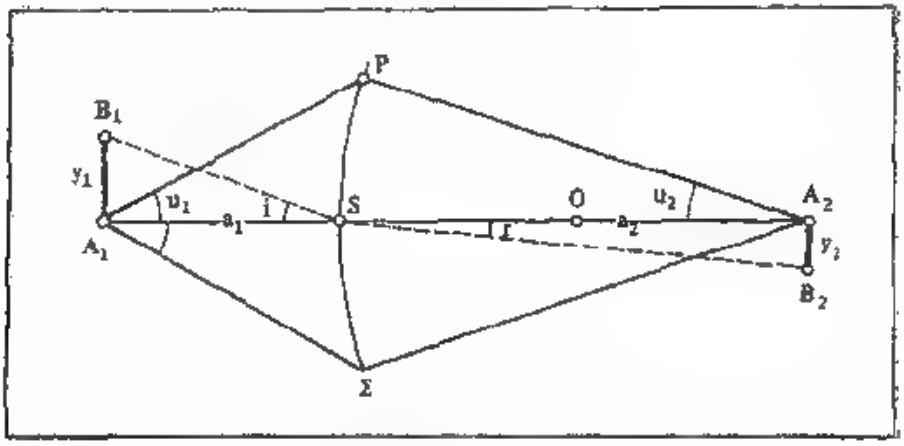


Fig. 12.12. Deducción de la ecuación de Lagrange—Helmholtz para los rayos paraxiales: $y_1 n_1 \operatorname{sen} u_1 = y_2 n_2 \operatorname{sen} u_2$.

Para el sistema refringente, n_1 y n_2 son siempre positivos, por lo que el signo de V se define por el signo de la razón a_2/a_1. Para los dispositivos correspondientes a imágenes reales (véase fig. 12.13) a_1 y a_2 tienen diferentes signos, es decir, V es negativo y la imagen será invertida; para las imágenes virtuales, al revés.

Para los espejos $n_1/n_2 = -1$, es decir, $V = -a_2/a_1$. En el caso de una imagen real, a_1 y a_2 tienen signos iguales, es decir, $V < 0$ y la imagen será invertida; en el caso de una imagen virtual, los signos de a_1 y a_2 son diferentes, $V > 0$, la imagen es derecha. Para un espejo plano ($a_1 = -a_2$) $V = 1$, es decir, la imagen es derecha y en tamaño natural.

Los planos conjugados se llaman *principales* si para ellos $V = 1$, es decir, la imagen es derecha y del tamaño natural del objeto. No es difícil ver que para la superficie esférica los planos principales coinciden entre sí y constituyen un plano tangente a la esfera en el punto S, es decir, $a_1 = a_2 = 0$ (véase ejercicio 100). De acuerdo con esto, las distancias focales de la superficie esférica también deben considerarse como distancias desde los planos principales hasta los focos. En la fig. 12.13 están representados también los ángulos u_1 y u_2 que caracterizan la apertura *máxima* de los haces incidentes sobre la superficie Σ (ángulo $2u_1$) y de los haces conjugados de ellos, que forman la imagen (ángulo $2u_2$). El valor extremo de estos ángulos se define por la exigencia de que se cumplan las condiciones de paraxialidad

Debido a que para todos los valores de los ángulos u que se encuentran *entre los límites* de la apertura de los rayos paraxiales la relación a_2/a_1 se mantiene constante, la relación (74.2) muestra que el aumento de un objeto pequeño A_1B_1 permanece invariable, cualquiera que sea la parte del haz paraxial que forma la imagen. En otras palabras, no sólo la imagen del punto en el eje (véase § 71), sino también la imagen *de un objeto pequeño* dispuesto cerca del eje, se forma sin deformación por un haz paraxial.

Para los rayos paraxiales $A_1P \approx A_1S = a_1$ y $PA_2 \approx SA_2 = a_2$, de manera que

$$u_1 \approx \operatorname{tg} u_1 \approx \frac{SP}{a_1}, \quad u_2 \approx \operatorname{tg} u_2 \approx \frac{SP}{a_2}, \quad \frac{u_1}{u_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

A base de (74.1) tenemos

$$\frac{n_1 a_2}{n_2 a_1} = \frac{n_1 u_1}{n_2 u_2} = V = \frac{y_2}{y_1},$$

o bien

$$y_1 n_1 u_1 = y_2 n_2 u_2. \tag{74.2}$$

La relación (74.2) lleva el nombre de *teorema de Lagrange—Helmholtz*.

Esta relación es válida para la región de los rayos paraxiales. Cuando se utilizan haces con una apertura considerable es posible obtener nítidas imágenes sólo si se cumple la condición

$$y_1 n_1 \operatorname{sen} u_1 = y_2 n_2 \operatorname{sen} u_2 \tag{74.3}$$

(condición de los senos de Abbe, véase § 85). La condición de Lagrange—Helmholtz o la condición de los senos impone una restricción sobre la libertad de transformación de los haces luminosos con ayuda de sistemas ópticos, al relacionar la apertura y dimensión del objeto con la apertura y dimensión de la imagen. De ella se deduce que la transformación de determinado haz óptico con ayuda de un sistema

óptico en otro haz *de una estructura* cualquiera *prefijada de antemano* es imposible. La estructura del haz transformado puede ser sólo aquella, que es permitida por la condición de Lagrange—Helmholtz. Esta importante restricción *de principio* adquiere un significado particular en los problemas de fotometría y de concentración de la energía radiante con ayuda de sistemas ópticos.

§ 75. Sistema óptico centrado

El caso de refracción en *una única* superficie esférica es relativamente raro. La mayoría de los sistemas refringentes reales contiene por lo menos dos superficies refringentes (lente) o un número más grande.

El sistema de superficies esféricas se llama *centrado*, si los centros de todas las superficies están en una sola línea (fig. 12.14) de-

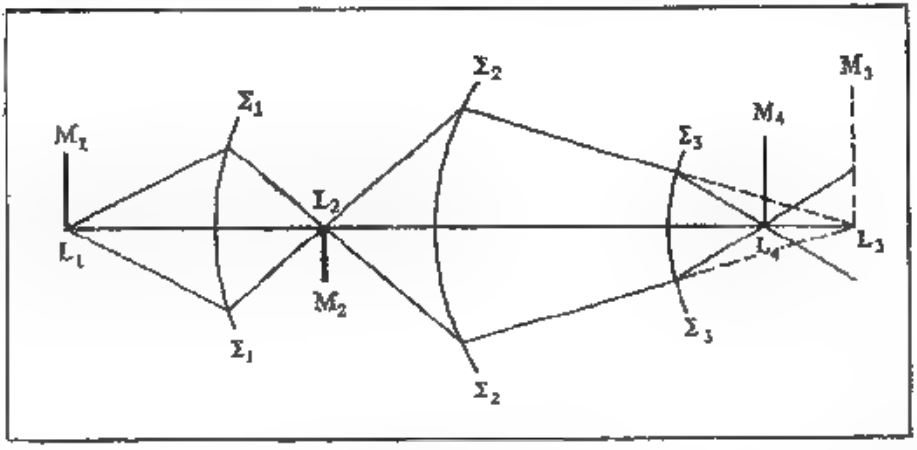


Fig. 12.14. Sistema óptico centrado.

nominada *eje óptico principal* del sistema.

Para todos los razonamientos expuestos en el § 71, era esencial que el haz homocéntrico de rayos saliera del punto L (véase fig. 12.10) y no importaba en absoluto de qué forma había sido obtenido. En particular, en L puede encontrarse no una fuente puntual de luz, sino su imagen estigmática obtenida con ayuda de algún otro sistema óptico. Por lo tanto, la relación (71.3) puede ser aplicada consecutivamente a cada superficie refringente del complejo sistema óptico, comprendiendo por L la imagen de la fuente puntual formada por todas las superficies anteriores. Es evidente que en este caso a_1 puede ser también positivo, si sobre la superficie examinada incide un haz convergente de rayos (véase fig. 12.14, superficie Σ_3).

Para el punto L_1 situado en el eje, el haz de rayos paraxiales conserva su homocentricidad, es decir, convergerá en el punto L_2

del cual se propagará también en forma paraxial y, por lo tanto, permanecerá homocéntrico, y así sucesivamente.

De esta manera, *el haz paraxial homocéntrico se mantiene homocéntrico* en el caso de un número arbitrario de refracciones (reflexiones) en un sistema centrado óptico; por lo tanto, el punto L_1 da en el sistema centrado una imagen estigmática (real o virtual).

De manera semejante, repitiendo los razonamientos de los §§ 73, 74, se puede mostrar que un sector no grande de un plano, dispuesto en el primer medio perpendicularmente al eje óptico del sistema centrado, en el último medio refringente tendrá como imagen un plano conjugado, el cual también será perpendicular al eje óptico, además la imagen se mantendrá geométricamente semejante al objeto. La presencia de dos focos y de dos superficies focales, que fue establecida para una superficie esférica, se conserva también para cualquier sistema centrado de superficies. De igual manera para el sistema centrado de superficies también es válido el teorema de Lagrange—Helmholtz, es decir,

$$y_1 n_1 u_1 = y_2 n_2 u_2 = y_3 n_3 u_3 = \ldots$$

Para el sistema centrado también conserva sentido el concepto de los planos principales como tales planos, en los cuales el objeto y la imagen poseen iguales magnitud y dirección. Pero mientras que para una superficie esférica refringente ambos planos se unían en uno solo, tangente a la superficie esférica en su vértice S, para las superficies centradas estos dos planos, en forma general, no coinciden. Las distancias focales del sistema, al igual que en el caso de una superficie esférica, son las distancias entre el correspondiente plano principal y el foco.

§ 76. Refracción en la lente. Fórmula general de la lente

Un gran significado tiene el caso muy simple de un sistema centrado compuesto solamente de dos superficies esféricas que limitan algún material transparente bien refringente (generalmente vidrio) del aire circundante. Este sistema, evidentemente, constituye una *lente* ordinaria.

La lente se llama *delgada*, si los vértices de ambas superficies pueden considerarse coincidentes, es decir, si el espesor d de la lente es pequeño en comparación con los radios R_1 y R_2 de curvatura de las superficies separadoras. En la fig. 12.15 para mayor claridad la lente está representada gruesa. En los cálculos posteriores vamos a suponer que los puntos S_1 y S_2 coinciden y los designaremos con la letra S. Todas las distancias serán medidas a partir del punto S, el cual prácticamente coincide con S_1 y S_2. El punto S lleva el nombre de *centro óptico* de la lente. Cualquier rayo paraxial que pasa a

través de S prácticamente no experimenta refracción. En efecto, para tales rayos los sectores de ambas superficies de la lente pueden considerarse paralelos, de manera que el rayo, al pasar a través de ellos, no cambia su dirección y solamente se desplaza paralelamente a sí mismo (refracción en una lámina planoparalela), y como el espesor de la lente es despreciable, este desplazamiento es insignificante y el rayo prácticamente pasará sin refractarse. El rayo que pasa a través del centro óptico se llama *eje* de la lente. Aquel de los ejes que pasa a través de los centros de ambas superficies, se llama eje *principal*, los demás, *secundarios*.

La refracción en la primera superficie esférica crearía sin la segunda superficie esférica en el vidrio puro con un índice de refracción n una imagen C a la distancia $SC = a$ (véase fig. 12.15) del vértice, de tal manera que

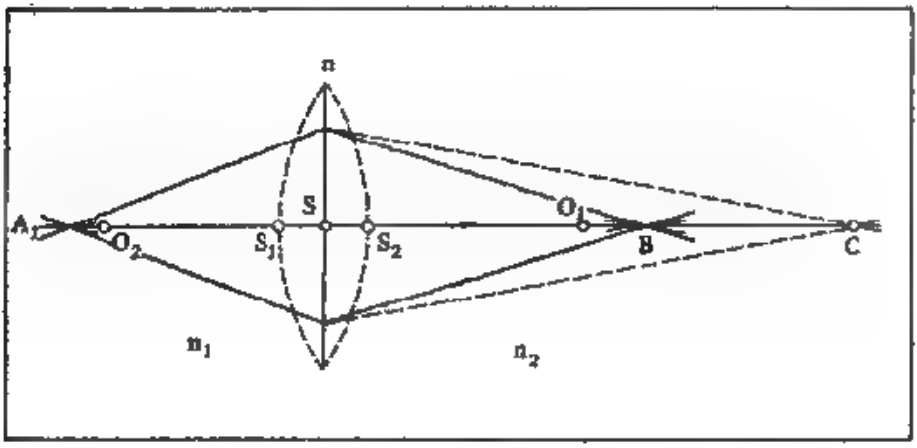


Fig. 12.15. Refracción en una lente delgada.

$$\frac{n_1}{a_1} - \frac{n}{a} = \frac{n_1 - n}{R_1},$$

donde $a_1 = SA_1$, R_1 es el radio de curvatura de la primera superficie de la lente.

Para la segunda superficie C sería como una fuente virtual de luz. La construcción de la imagen de esta fuente después de refractarse en la segunda superficie de la lente dará el punto B a una distancia $a_2 = SB$ de la lente. Aquí otra vez es aplicable la fórmula

$$\frac{n}{a} - \frac{n_2}{a_2} = \frac{n - n_2}{R_2},$$

donde R_2 es el radio de la segunda superficie.

Debido a que $n_1 = n_3$ (aire a ambos lados de la lente), tenemos

$$\frac{n_1}{a_1} - \frac{n}{a} = \frac{n_1 - n}{R_1}, \quad \frac{n}{a} - \frac{n_1}{a_2} = \frac{n - n_1}{R_2}.$$

Al sumar la primera ecuación con la segunda, obtendremos

$$n_1 \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) = (n - n_1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

o, introduciendo el índice relativo de refracción $N = n/n_1$,

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = (N-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \tag{76.1}$$

Esta fórmula general de la lente es válida para las lentes cóncavas y convexas, para cualquier disposición de la fuente y la correspondiente disposición del foco. Solamente es necesario tomar en cuenta los signos de a_1, a_2, R_1 y R_2, considerándolos positivos si ellos están trazados *a la derecha* de la lente, y negativos, si ellos están trazados *a la izquierda* de la lente (como se hizo en la deducción de la fórmula (71.2)). Si los signos de a_1 y a_2 son iguales, entonces uno de los puntos conjugados será virtual, es decir, en él no se intersecarán los rayos mismos, sino sus continuaciones imaginarias.

§ 77. Distancias focales de la lente delgada

Si el punto luminoso que se encuentra en el eje principal se aleja de la lente (aumenta el valor absoluto de a_1), entonces la imagen se desplazará. La posición de la imagen, que corresponde al caso límite cuando la fuente está alejada en el infinito, lleva el nombre de *foco* de la lente. De esta manera, el foco es el punto conjugado del punto del eje principal infinitamente alejado, o, lo que es lo mismo, el lugar de convergencia de los rayos paralelos al eje óptico principal. La distancia desde la lente hasta el foco es *la distancia focal* de la lente delgada. El plano que pasa a través del foco perpendicularmente al eje principal se llama *plano focal*.

Si los rayos van desde el infinito en forma de haz paralelo, pero bajo un ángulo con respecto al eje principal (a lo largo de un eje secundario), entonces ellos se intersecarán en el correspondiente punto A del plano focal (fig. 12.16). Por lo tanto, el plano focal es el plano conjugado del plano infinitamente alejado.

Para determinar las distancias focales tenemos las siguientes relaciones:

para $a_1 = -\infty$

$$a_2 = f_2 = \frac{1}{(N-1)(1/R_1 - 1/R_2)}, \tag{77.1}$$

para $a_2 = \infty$

$$a_1 = f_1 = -\frac{1}{(N-1)(1/R_1 - 1/R_2)}, \tag{77.2}$$

es, decir,

$$f_1 = -f_2. \qquad (77.3)$$

Así tenemos que las distancias focales de la lente son iguales en magnitud*) y de signos contrarios, es decir, los focos se encuentran a diferentes lados de la lente.

En dependencia del signo y de las magnitudes de R_1 y R_2, y también del signo de $(N - 1)$, la magnitud f_1 puede ser positiva o negativa, es decir, el foco puede ser real o virtual. Lo mismo se refiere también a f_2 y no es difícil ver que si el primer foco es virtual, entonces el segundo también será virtual, y viceversa.

Si los focos son reales, es decir, si los rayos paralelos después de refractarse en la lente convergen, entonces la lente se llama *convergente* o *positiva*. En el caso de focos virtuales los rayos paralelos después de refractarse en la lente se volverán divergentes. Por eso estas lentes se llaman *divergentes* o *negativas*.

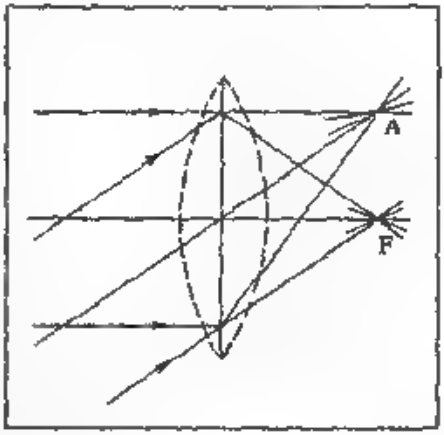


Fig. 12.16. Posición de los focos dispuestos en el eje principal y el secundario de la lente delgada.
AF es el plano focal de la lente.

Si el material de la lente delgada refracta más fuertemente que el medio circundante (por ejemplo, la lente de vidrio en el aire), entonces serán convergentes las lentes biconvexas, plano-convexas y convexo-cóncavas (menisco positivo), es decir, las lentes que son más gruesas en el centro (fig. 12.17, *a*); a las lentes divergentes pertenecen las bicóncavas, plano-cóncavas y las cóncavo-convexas (menisco negativo), es decir, las lentes que son más delgadas en el centro (véase fig. 12.17, *b*). Si el material de la lente delgada refracta menos que el medio circundante (por ejemplo, una cavidad de aire en el agua), entonces las lentes del tipo de la fig. 12.17, *a* serán divergentes y las del tipo de la fig. 12.17, *b* convergentes.

Introduciendo la distancia focal de la lente, daremos a la fórmula de la lente la forma

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{f}, \quad f = f_2 = -f_1.$$

*) Si la lente es dispuesta de tal manera que a ambos lados de ella se encuentran medios diferentes ($n_1 \neq n_2$), entonces la fórmula se complicará. En este caso las distancias focales f_1 y f_2 se relacionan entre sí como $-n_1/n_2$ (vease ejercicio 115). Como ejemplo puede servir el cristalino del ojo humano

La dependencia entre a_1 y a_2 está representada gráficamente en la fig. 12.18.

Es fácil ver que la variación de la magnitud a_1 conlleva a una variación de a_2 del mismo signo. En otras palabras, la imagen se desplaza a lo largo del eje en la misma dirección que el objeto. Sólo

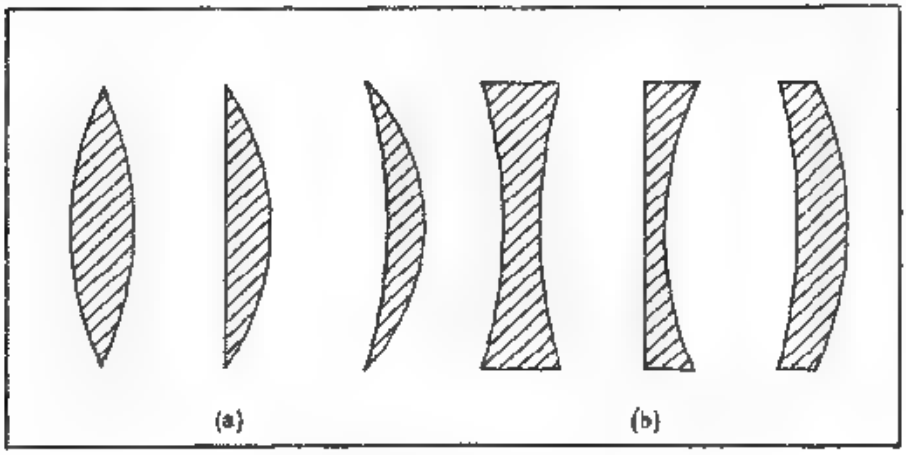


Fig. 12.17. Diferentes tipos de lentes delgadas.
a, convergentes, b, divergentes.

el punto $a_1 = f_1$ es una excepción, ya que al pasar por él la imagen pasa desde $a_2 = +\infty$ a $a_2 = -\infty$.

§ 78. Construcción de la imagen en la lente delgada. Aumento

Sea que la imagen de un pequeño objeto cercano al eje se forma con un sistema centrado de superficies esféricas. La construcción puede ser realizada con ayuda de haces paraxiales (véase § 73). Debido a que se demostró que para los rayos paraxiales la imagen del punto es estigmática (es decir, se conserva la homocentricidad del haz), para la construcción de su imagen es suficiente hallar el punto de intersección de *dos* rayos cualesquiera.

La construcción más sencilla se efectúa con ayuda de los rayos indicados en la fig. 12.19. Uno de ellos, el rayo CF_2B_2 que es conjugado del rayo B_1C es paralelo al eje óptico principal; este rayo pasa a través del foco posterior F_2; el otro es el rayo DB_2 paralelo al eje óptico principal y conjugado del rayo B_1F_1D trazado a través del foco anterior F_1. El tercer rayo a lo largo del eje óptico secundario B_1SB_2 pasa a través del centro óptico de la lente (punto S), es decir, pasa sin refractarse. La construcción de estos rayos se realiza sin dificultad. Cualquier otro rayo que va desde B_1 debe ser construido

a base de la ley de refracción lo que es mucho más complicado. Pero de la propiedad de homocentricidad se deduce que después de realizar la construcción cualquier rayo refractado deberá pasar a través del punto B_2. Debido a que la construcción de la imagen del punto B_1 se reduce a la tarea *geométrica* de buscar el punto B_2 entonces no hay necesidad de que los pares más simples de rayos escogidos tuviesen un carácter *real*. En particular, cuando A_1B_1 es mayor que las dimensiones de la lente (por ejemplo, en la toma de fotografías), los rayos B_1C y B_1D (fig. 12.20) no pasan a través de la lente, pero pueden ser utilizados para la construcción de la imagen. Los rayos reales que participan en la construcción de la imagen son limitados por la montura de la lente MN, pero, por supuesto, convergen en el mismo punto B_2, ya que se supone que la lente es lo suficientemente

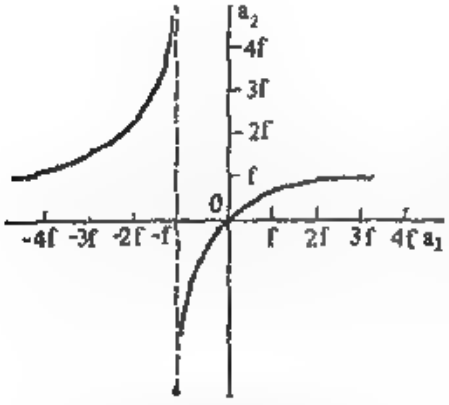


Fig. 12.18. Dependencia gráfica entre a_1 y a_2 para determinado f en una lente delgada ideal.

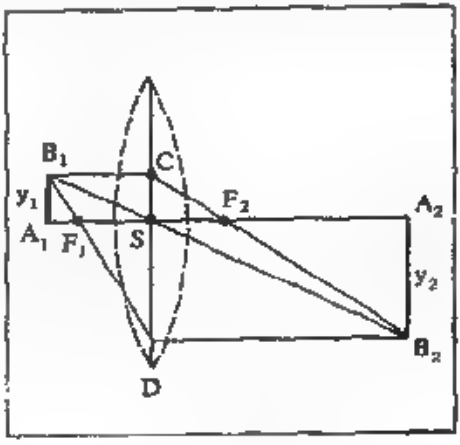


Fig. 12.19. Construcción de la imagen en una lente delgada.

buena, de manera que los haces que pasan a través de ella se mantienen homocéntricos.

Habiendo definido *el aumento* lateral como en el § 74, con ayuda de la relación $V = \frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{y_2}{y_1}$, de la fig. 12.19, hallaremos

$$V = \frac{SA_2}{SA_1} = \frac{a_2}{a_1}. \qquad (78.1)$$

De manera análoga a lo expuesto en el § 74, hallaremos que para las imágenes reales $V < 0$, es decir, la imagen está invertida y para las virtuales, $V > 0$, es decir, la imagen es derecha.

Los planos principales de la lente, como de cualquier otro sistema, son aquellos planos conjugados, para los cuales $V = 1$. Para las lentes delgadas estos planos se juntan en uno que pasa a través del

centro óptico perpendicularmente al eje óptico (es decir, $a_1 = a_2 = 0$) (véase ejercicio 100). De esta manera, las distancias focales de la lente, que deben medirse a partir de los planos principales, en el caso de la lente delgada pueden medirse a partir de su superficie.

La lente delgada como un sistema de dos superficies centradas constituye un sistema óptico más simple que da una imagen bastante imperfecta. En la mayoría de los casos nosotros recurrimos a la construcción de sistemas más complicados que se caracterizan por la presencia de un número grande de superficies refringentes, de las cuales no se requiere que estén cerca unas de otras (delgadez de la lente). Sin embargo, incluso las simples lentes delgadas tienen un gran significado en la práctica, especialmente en la calidad de lentes para gafas. En la inmensa mayoría de los casos las gafas son simplemente unas lentes delgadas.

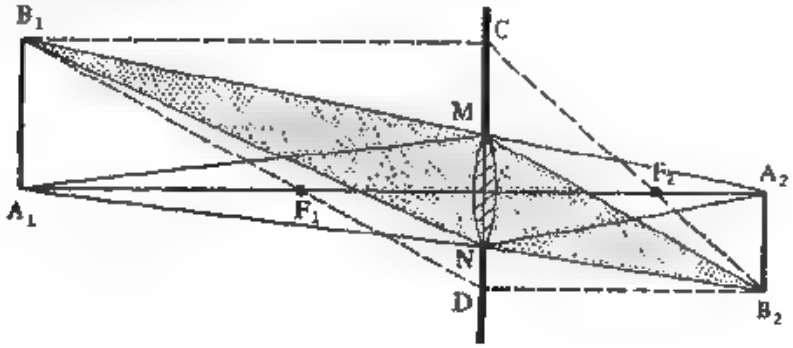


Fig. 12.20. Limitación de los haces en una lente delgada.

Para la clasificación de las lentes para gafas generalmente se utiliza el concepto de potencia de la lente. Se llama *potencia de la lente* la magnitud inversa a la distancia focal posterior de la lente. Si la distancia focal se mide en metros, entonces la potencia de la lente habitualmente se expresa en *dioptrías*, considerándola positiva o negativa en dependencia de si la lente es convergente o divergente. Así, por ejemplo, una lente divergente con la distancia focal de 20 cm ($f = -1/5$ m) tiene una potencia de —5 dioptrías.

§ 79. Sistemas ópticos ideales

Gauss (año 1841) dio la teoría general de los sistemas ópticos, la cual posteriormente fue profundizada en las obras de muchos matemáticos y físicos. La teoría de Gauss es la teoría de un sistema óptico

ideal, es decir, el sistema en el cual se conserva la homocentricidad de los haces y la imagen es geométricamente *semejante* al objeto. De acuerdo con esta definición, a cualquier punto del espacio objeto le corresponde en el sistema ideal un punto del espacio imagen; estos puntos se llaman *conjugados*. De igual manera a cada recta o plano del espacio objeto deberá corresponderle una recta o un plano conjugados del espacio imagen. De esta manera, la teoría del sistema óptico ideal es una teoría puramente geométrica que establece la relación entre puntos, rectas y planos.

Lo expuesto en el § 75 muestra que el sistema óptico ideal puede ser aproximado bastante bien por un sistema centrado óptico, si nos limitamos a la región en las cercanías del eje de simetría, es decir, a los rayos paraxiales. En la teoría de Gauss el requisito de la «delgadez» del sistema no hace falta, pero como antes se supone que los rayos son paraxiales. La búsqueda de un sistema físico que se aproxime a uno ideal inclusive para haces con una considerable abertura, es una tarea de la óptica geométrica aplicada.

La línea que une los centros de las superficies esféricas constituye el eje de simetría del sistema centrado y se llama *eje óptico principal* del sistema. La teoría de Gauss establece una serie de los llamados *puntos y planos cardinales*, el conocimiento de los cuales permite describir completamente todas las propiedades del sistema óptico y utilizarlo sin necesidad de examinar el recorrido real de los rayos en el sistema.

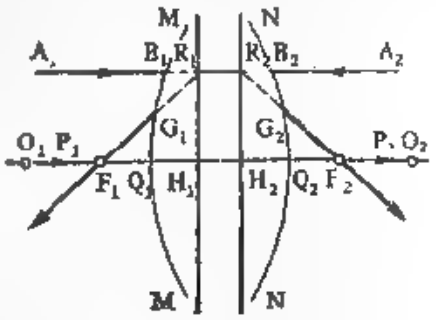


Fig. 12.21. Planos principales H_1R_1 y H_2R_2 y focos F_1 y F_2 del sistema óptico

Sean MM y NN las superficies esféricas extremas que limitan nuestro sistema, y O_1O_2 su eje principal (fig. 12.21). Tracemos el rayo A_1B_1 paralelo a O_1O_2; el punto B_1 es el lugar de entrada del rayo al sistema. De acuerdo con la propiedad del sistema ideal, al rayo A_1B_1 le corresponde en el espacio imagen el rayo conjugado G_2F_2 que sale del sistema en el punto G_2. A nosotros no nos interesa cómo se propaga el rayo dentro del sistema. El segundo rayo P_1Q_1 lo escogeremos a lo largo del eje principal. El rayo Q_2P_2 conjugado de él, también irá a lo largo del eje principal. El punto F_2 como intersección de los dos rayos G_2F_2 y Q_2P_2 es la imagen del punto, en el cual se intersecan los rayos A_1B_1 y P_1Q_1 conjugados de G_2F_2 y Q_2P_2. Pero debido a que $A_1B_1 \parallel P_1Q_1$, el punto conjugado de F_2 estará en el infinito. De esta manera, F_2 es *el foco* (el segundo o posterior) de nuestro sistema. El plano que pasa a través del

foco perpendicularmente al eje, lleva el nombre de plano *focal*.

Repitiendo los mismos razonamientos para el rayo A_2B_2 y para el rayo axial P_2Q_2, hallaremos el punto F_1 que constituye el foco anterior de nuestro sistema, además el punto G_1 es el punto de salida del rayo conjugado de A_2B_2. Prolonguemos ahora F_1G_1 y F_2G_2 hasta la intersección con las prolongaciones de A_1B_1 y A_2B_2 y marquemos los puntos de intersección R_1 y R_2. Es fácil ver que R_1 y R_2 son puntos conjugados. En efecto, R_1 es el punto de intersección de los rayos $A_1B_1R_1$ y $F_1G_1R_1$, de los cuales les son conjugados los correspondientes rayos $R_1G_2F_2$ y $R_2B_2A_2$ que se intersecan en R_2. De la construcción se ve claramente también que R_1 y R_2 se encuentran a igual distancia del eje principal, es decir, $H_1R_1 = H_2R_2$, o sea que el aumento lineal lateral es igual a

$$V = \frac{H_2R_2}{H_1R_1} = +1.$$

Con razonamientos especiales se puede mostrar que también *cualquier* punto de la línea H_1R_1 es conjugado del punto de la línea H_2R_2 que se encuentra a la misma altura de O_2O_2 que el punto escogido. Lo mismo se refiere a los planos trazados a través de H_1R_1 y H_2R_2 en forma perpendicular al eje principal, ya que todo el sistema es simétrico con respecto al eje.

De esta manera, hemos hallado dos planos H_1R_1 y H_2R_2, los puntos de los cuales son conjugados y forman su imagen con un aumento igual a la unidad, es decir, el plano H_1R_1 tiene como imagen derecha y en tamaño natural el plano H_2R_2 (fig. 12.22). Estos planos se llaman *planos principales* (véase § 74). De esta manera, hemos mostrado que el sistema ideal tiene planos principales y hemos indicado el método de la búsqueda de éstos. Los puntos H_1 y H_2 de intersección de los planos principales con el eje llevan el nombre de *puntos principales* del sistema. Las distancias desde los puntos principales hasta los focos se llaman *distancias focales* del sistema $f_1 = H_1F_1$ y $f_2 = H_2F_2$*).

Fijando la posición de los puntos conjugados mediante sus distancias (a_1 y a_2) hasta los correspondientes planos principales y conservando la regla de los signos, que fue establecida en el § 71, hallaremos con facilidad una serie de relaciones que definen la posición de los puntos conjugados en el sistema dado y que sirven de fórmulas

*) Anteriormente se suponía que el rayo R_2F_2 (véase fig. 12.21) conjugado del rayo A_1B_1 que es paralelo al eje, intersecaba a este último. Sin embargo, es posible el caso cuando el rayo se mantiene paralelo al eje después de haber atravesado el sistema. Este caso excepcional corresponde a los llamados *sistemas telescópicos* (véase §92). Para ellos los focos y los puntos principales se encuentran en el infinito.

de sistema. Las más importantes de ellas (véase ejercicio 106) tienen la forma

$$f_1/a_1 + f_2/a_2 = 1;\ x_1x_2 = f_1f_2;\ f_1/f_2 = -n_1/n_2;$$
$$V = -x_2/f_2 = -f_1/x_1, \qquad (79.1)$$

donde $x_1 = a_1 - f_1$ y $x_2 = a_2 - f_2$ son las distancias de los puntos conjugados hasta los focos correspondientes. Para el caso muy frecuente cuando $n_1 = n_2$ (la fuente y su imagen se encuentran en un mismo medio, por ejemplo, aire) tenemos:

$$1/a_2 - 1/a_1 = 1/f;\ x_1x_2 = -f^2;\ f_2 = -f_1 = f. \qquad (79.2)$$

Utilizando la regla de los signos, podemos describir todas las propiedades tanto de los sistemas convergentes como también de

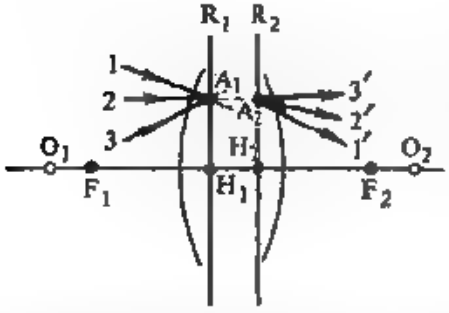


Fig. 12.22. Demostración de la existencia de los planos principales. Los rayos 1, 2, 3 y 1', 2', 3' son conjugados.

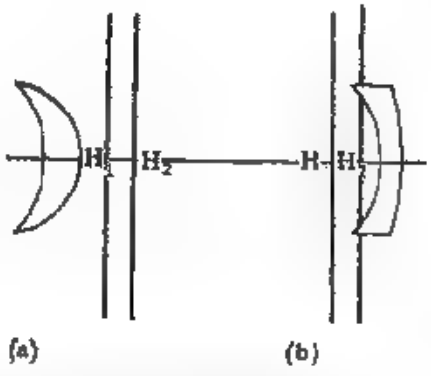


Fig. 12.23. Disposición de los planos principales en los meniscos convergentes (a) y divergentes (b).

los divergentes e introducir el concepto de puntos e imágenes, etc.

Los planos y los puntos principales pueden situarse tanto dentro como fuera del sistema de una manera completamente asimétrica respecto a las superficies que limitan el sistema, incluso a un solo lado de éste (fig 12.23). Hacemos recordar otra vez que las distancias focales se miden a partir de los planos principales; por eso incluso cuando $|f_1| = |f_2|$, las distancias desde los focos hasta las superficies que limitan el sistema pueden ser muy diferentes (ejemplo: los meniscos representados en la fig. 12.23).

Además del aumento lineal, el sistema también puede ser caracterizado por el aumento *angular*. Por aumento angular W se entiende

la relación de las tangentes de los ángulos u_2 y u_1 que son formados por los rayos conjugados A_2M_2 y A_1M_1 con el eje óptico (fig. 12.24), es decir,

$$W = \frac{\operatorname{tg} u_2}{\operatorname{tg} u_1}.$$

De la fig 12.24 se ve que $W = a_1/a_2$ (ya que $H_1M_1 = H_2M_2$), mientras que el aumento lineal $V = n_1a_2/n_2a_1$ (véase § 74), es decir,

$$WV = n_1/n_2.$$

Para el caso frecuente, cuando el objeto y la imagen se encuentran en un mismo medio ($n_1 = n_2$) tenemos

$$WV = 1.$$

Tanto el aumento angular, como el lineal del sistema es distinto para diferentes puntos del eje; además cuanto *mayor* sea la ampliación

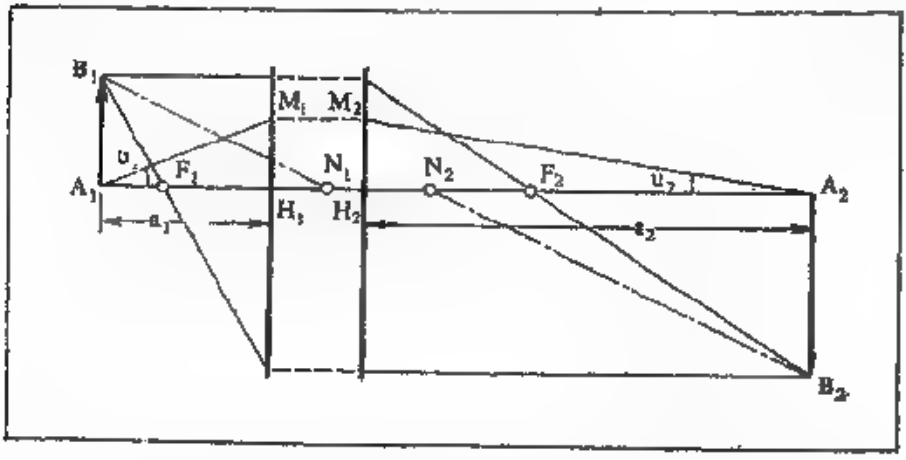


Fig. 12.24. Determinación del aumento angular del sistema.

lineal, *menor* será la angular, es decir, con el aumento de las dimensiones de la imagen los rayos que la originan formarán un ángulo menor. Esta circunstancia es de suma importancia cuando se estudia el rol de los instrumentos ópticos en la percepción visual (véase § 95).

De la misma manera como los planos conjugados con aumento lineal $V = 1$, poseen un particular significado, los puntos conjugados, en los cuales el aumento angular $W = 1$, también son puntos particulares del sistema. Estos puntos se llaman *nodos* (o *puntos nodales*) y se caracterizan por que los rayos conjugados que pasan a través de los nodos, son paralelos entre sí, ya que $u_1 = u_2$. No es difícil mostrar que en cada sistema este par de puntos serán los N_1 y N_2 que están separados del primero y segundo foco por una distancia igual a la segunda y primera distancias focales respectivamente (fig. 12.25).

es decir $x_1 = F_1N_1 = f_2$ y $x_2 = F_2N_2 = f_1$. Es fácil ver que los puntos N_1 y N_2 son conjugados, ya que sus coordenadas satisfacen la ecuación (79.1) del sistema $x_1x_2 = f_1f_2$. Además, de la fig. 12.25 se ve que las distancias de ellos con respecto a los planos principales son iguales respectivamente a $H_1N_1 = a_1 = f_2 + f_1$ y $H_2N_2 = a_2 = f_2 + f_1$, es decir $a_1 = a_2$, y, por lo tanto, para estos puntos $W = a_1/a_2 = 1$. De esta manera, los puntos señalados N_1 y N_2 son conjugados y satisfacen el requisito $W = 1$, es decir sirven como puntos nodales del sistema.

Los planos perpendiculares al eje óptico que pasan a través de los nodos se llaman *planos nodales*. Los seis planos (dos principales, dos focales y dos nodales) y seis puntos del eje principal, que les corresponden a ellos (los focos, puntos principales, nodos) se llaman planos y puntos *cardinales*. La disposición general de los puntos car-

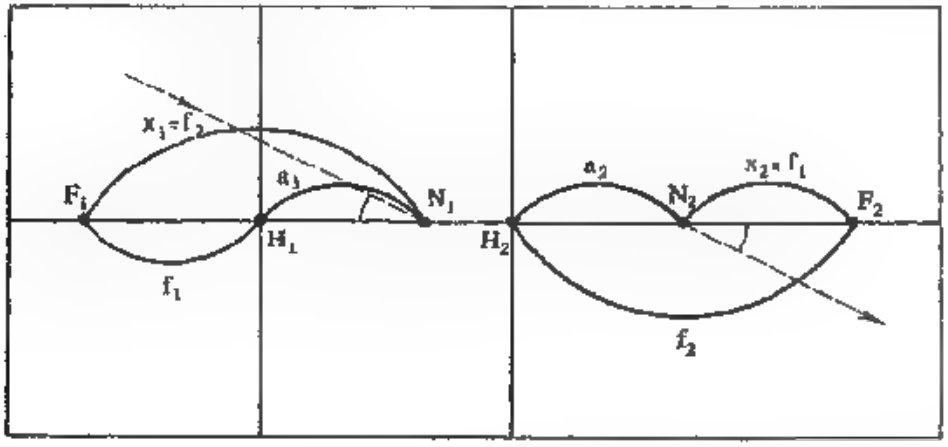


Fig. 12.25. Posición de los puntos nodales N_1 y N_2.

dinales F_1, N_1, H_1, F_2, N_2, H_2 está mostrada en la fig. 12.26.

Cuando a ambos lados del sistema se dispone de un mismo medio, nosotros obtendremos, como se indicó anteriormente, distancias focales iguales en valor absoluto $f_1 = -f_2$. Los puntos nodales ahora se confunden con los principales ya que $F_1N_1 = F_1H_1 = f_2$, y el sistema se caracteriza por la posición de sólo cuatro puntos y planos.

Conociendo las propiedades de los puntos y planos cardinales se puede sin ninguna dificultad construir la imagen en cualquier sistema, utilizando dos rayos provenientes de un solo punto. En particular, para las lentes deja de ser necesaria la exigencia de delgadez. La fig. 12.27 muestra cómo se puede construir la imagen en una lente gruesa, si es conocida la disposición de sus planos principales y de los focos. En la fig. 12.27 han sido trazados los rayos, cuya construc-

ción en forma particularmente simple determina la posición del punto B' conjugado del punto B. En virtud de la homocentricidad del haz cualquier otro rayo proveniente de B pasará a través de B'.

El rayo *1* trazado paralelamente al eje principal tiene su conjugado el rayo $1'$ que interseca el segundo plano principal a una altura de $H_2D_2 = H_1D_1$ y pasa a través del foco F_2. El rayo *2* que va a través del nodo N_1 tiene como conjugado el rayo $2'$ que pasa a través del segundo nodo paralelamente al rayo *2*. El rayo *3* que pasa a través del foco F_1 y que interseca el plano principal a la altura H_1C_1, pasará a la misma altura ($H_2C_2 = H_1C_1$) a través del segundo plano principal y seguirá adelante paralelamente al eje principal. Para la construcción de la imagen podemos limitarnos a utilizar dos de los tres rayos.

Es fácil ver que la lente delgada examinada anteriormente puede

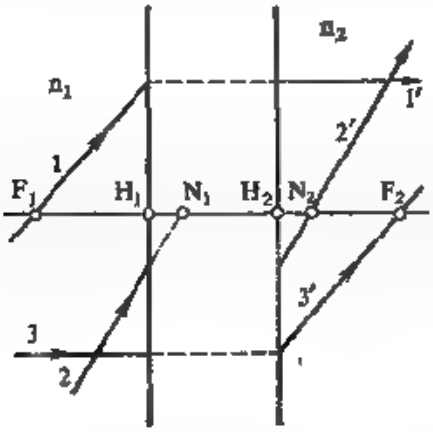


Fig. 12.26. Puntos y planos cardinales del sistema.

F_1 y F_2 son los focos principales; N_1 y N_2, los nodos; H_1 y H_2, los puntos principales (planos principales).

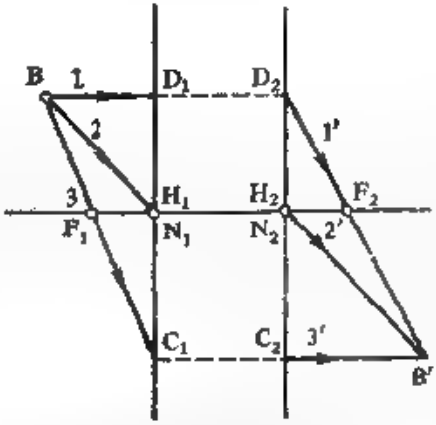


Fig. 12.27. Construcción de la imagen en un sistema con la utilización de los puntos cardinales.

ser considerada como un caso particular de la lente gruesa, en la cual los puntos H_1 y H_2 coinciden y los planos principales se juntan. Los puntos nodales colocados en H_1 y H_2 también coincidirán formando el centro óptico de la lente. La construcción de la imagen se efectuará, al igual que antes, con ayuda de dos simples rayos cualesquiera (compare también con la fig. 12.19).

Introduciendo el concepto de planos principales y nodales del sistema óptico, también introducimos simultáneamente la noción acerca del aumento *lateral* V y del aumento *angular* W. Generalmente nos vemos obligados a operar con la imagen de los objetos *espaciales*, los diversos puntos de los cuales se encuentran a diferentes distan-

cias del plano principal. Por eso es racional introducir también el aumento *longitudinal* (U) que muestra la relación entre la longitud Δx_2 de la imagen y la longitud del pequeño segmento Δx_1, cuya imagen se obtiene si este último está dispuesto a lo largo del eje. Se comprende que es necesario hablar acerca del aumento de segmentos de pequeña longitud, ya que el aumento longitudinal para diferentes puntos del eje se diferencia mucho. De esta manera,

$$U = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}.$$

La expresión para U es fácil hallar si se utilizan las fórmulas (79.1). Tenemos

$$x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1 = 0$$

o bien

$$U = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{x_2}{x_1} = -\frac{f_1 f_2}{x_1^2} = -\frac{x_2^2}{f_1 f_2} = -V^2 \frac{f_2}{f_1} = \frac{n_2}{n_1} V^2,$$

debido a que

$$V = -x_2/f_2 = -f_1/x_1 \text{ y } f_2/f_1 = -n_2/n_1.$$

Contraponiendo los valores de U, V y W, encontramos

$$U = \frac{n_2}{n_1} V^2, \quad VW = \frac{n_1}{n_2}$$

y por lo tanto

$$UW = V. \tag{79.3}$$

El aumento lateral es importante para caracterizar los sistemas que proyectan la imagen sobre una pantalla o una placa fotográfica (objetivos de proyección y fotográficos). El aumento angular es importante en la observación de objetos lejanos, cuando se quiere aumentar las dimensiones angulares de los objetos observados (sistemas telescópicos, véase § 92). El aumento longitudinal caracteriza la nitidez de la imagen de un objeto espacial en la pantalla (la llamada «profundidad del sistema óptico»). Él es siempre positivo, es decir Δx_1 y Δx_2 coinciden en su dirección.

La teoría expuesta del sistema óptico ideal tiene un carácter completamente general, es decir es aplicable a los sistemas axialmente simétricos de estructura arbitraria. El sistema resulta completamente descrito, si se conoce la disposición mutua de los cuatro puntos cardinales. Evidentemente, la posición de estos puntos en cada sistema concreto depende de su estructura (de la curvatura de las superficies refringentes y reflectoras, de la posición de éstas, del índice de refracción, etc.). Existen varios métodos para encontrar los puntos cardinales. Uno de ellos consiste en el cálculo consecutivo del recorrido de los rayos que inciden sobre el sistema de derecha e

izquierda en forma paralela al eje. En este caso a cada superficie refringente es aplicable la fórmula (71.2) o (71.3). La esencia de otro método más utilizado, se hace clara de lo siguiente. Sea que están dados dos sistemas ópticos y para ellos son conocidas las distancias focales y la posición de los puntos principales, además ambos sistemas están dispuestos en un eje común a cierta distancia uno del otro; entonces se puede calcular las distancias focales y las posiciones de los puntos cardinales de sistema complejo compuesto de estos sistemas. De esta manera, si el sistema complejo consta de dos o de un número mayor de subsistemas con puntos cardinales conocidos, entonces efectuando varias veces el proceso de adición descrito, se puede determinar los parámetros del sistema entero.

Demos los índices 1 y 2 a las magnitudes que se refieren a los dos subsistemas, además las magnitudes con primas (por ejemplo f'), corresponderán al espacio imagen, y las sin primas, al espacio objeto x. En las designaciones, evidentes de la fig. 12.28, la posición del foco anterior F del sistema complejo con respecto al foco anterior F_1 del primer subsistema se define por la fórmula (véase ejercicio 107)

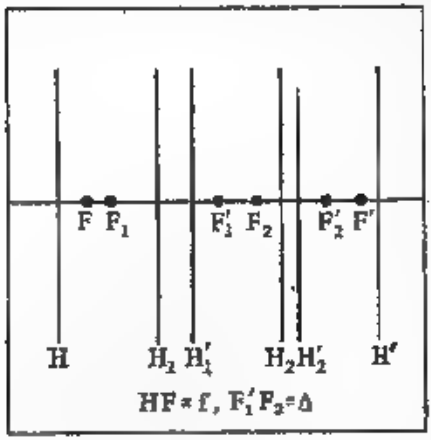


Fig. 12.28. Determinación de los parámetros de un sistema óptico complejo.

$$x_F = f_1 f'_1/\Delta. \qquad (79.4)$$

La fórmula análoga para el foco posterior del segundo sistema tiene la forma

$$x'_{F'} = -f_2 f'_2/\Delta; \qquad (79.5)$$

aquí la distancia se mide a partir del foco posterior F'_2 del segundo subsistema (véase fig. 12.28). Para las distancias focales del sistema complejo obtendremos

$$f' = -f'_1 f'_2/\Delta, \quad f = f_1 f_2/\Delta. \qquad (79.6)$$

En las últimas tres fórmulas la distancia Δ entre F'_1 y F_2 se mide a partir de F'_1, es decir para la disposición mostrada en la fig. 12.28 $\Delta > 0$.

Si en calidad de subsistemas se examinan superficies refringentes, entonces el cálculo de un sistema óptico arbitrario puede reducirse a la aplicación consecutiva de las fórmulas de adición (79.4)—(79.6), introduciendo en cada etapa una de las superficies refringentes. Apliquemos estas consideraciones a la lente, es decir al sistema compuesto de dos superficies refringentes dispuestas a una distancia d

una de la otra y con los radios de curvatura R_1 y R_2. De (79 6) y de las fórmulas del § 72 fácilmente se encuentra su distancia focal

$$\frac{1}{f'} = (N-1)\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{N-1}{N}\frac{d}{R_1 R_2}\right].$$

Cuando el espesor d de la lente es pequeño en comparación con R_1 y R_2, se puede despreciar el último término en esta expresión y obtendremos la fórmula para la lente delgada (véase § 77). Pero si d es lo suficientemente grande la distancia focal de la lente depende de modo esencial de su espesor. En particular, se puede, evidentemente, escoger las condiciones en que $1/f' = 0$, es decir la lente gruesa resultará un sistema telescópico, cuyo aumento se define por la relación R_1/R_2.

---

13. ABERRACIONES DE LOS SISTEMAS ÓPTICOS

§ 80. Introducción

En el capítulo anterior fueron expuestas las bases de la construcción de la imagen en los sistemas centrados, las cuales son válidas si se cumplen las siguientes condiciones:

1) la luz incide sobre el sistema en forma de haces paraxiales;

2) los haces forman ángulos pequeños con el eje principal del sistema,

3) el índice de refracción es constante para todos los rayos, es decir el medio no posee dispersión o la luz es lo suficientemente monocromática.

Todas estas tres condiciones no se observan en la óptica práctica. Generalmente nosotros trabajamos con luz de una composición espectral complicada y debemos tomar en consideración la dependencia del índice de refracción en función de la longitud de onda (dispersión). Si se limita a los haces débilmente inclinados respecto al eje esto equivale a negarnos a obtener la imagen de los puntos que se encuentran fuera del eje principal del sistema, y la utilización de haces solamente paraxiales traería consigo la utilización sólo de flujos luminosos insignificantes.

La eliminación de todas estas restricciones, extremadamente incómodas para la práctica, trae, sin embargo, la aparición de numerosos defectos de la imagen.

El estudio cuidadoso de estos últimos trajo consigo un increíble perfeccionamiento de los sistemas ópticos modernos, en los cuales con frecuencia son casi completamente eliminados muchos de los posibles defectos o aberraciones.

La tarea principal del sistema óptico consiste en la formación

de la imagen se *nta* del objeto que en el caso más simple constituye un cuadro plano dispuesto perpendicularmente al eje óptico del sistema. Una imagen correcta requiere el cumplimiento de las siguientes condiciones:

1) cada punto del plano deberá formar una imagen estigmática;

2) todos los puntos de la imagen deberán encontrarse en el plano perpendicular al eje del sistema;

3) la escala de la imagen (el aumento) deberá ser constante en toda la imagen

La violación de la primera y segunda de estas condiciones lleva a la disminución de la nitidez de la imagen, la violación de la segunda y tercera deforma la imagen.

Por último, una peculiar dificultad aparece como consecuencia de que los objetos observados generalmente son tridimensionales, y no planos: la imagen obtenida (en la placa fotográfica, en el ojo o en el anteojo), en cambio, es prácticamente plana (véase § 87).

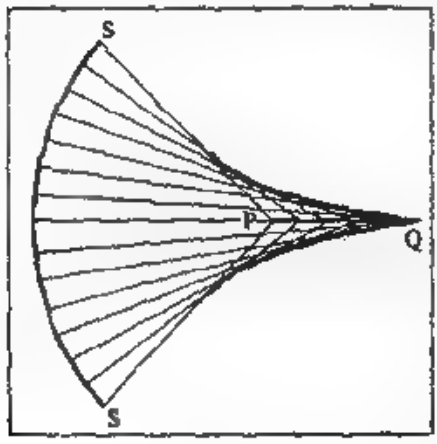


Fig. 13.1. Sección de la superficie cáustica.
SS es el frente ondulatorio.

§ 81. Superficie cáustica. Carácter de su simetría

La superficie envolvente del conjunto de rayos del haz refractado, lleva el nombre de *superficie cáustica* (*cáustica*) y su corte efectuado por cualquier plano que pasa a través del rayo se llama *curva cáustica*. Si al pasar a través del sistema óptico el haz conserva su homocentricidad, entonces la cáustica se degenerará en un punto que constituye el vértice del haz homocéntrico. La violación de la homocentricidad es equivalente a una mayor o menor deformación de la superficie cáustica en comparación con este caso muy simple de degeneración. Se puede caracterizar las diversas aberraciones según el carácter de la disminución de la simetría de la superficie cáustica. De esta manera, en el caso de aberración esférica (véase § 82) la cáustica adquiere la forma de una superficie poseedora de un eje de simetría, pero que no tiene un centro de simetría. La fig. 13,1 representa una de tales formas, donde las líneas gruesas constituyen la curva cáustica en el plano de la figura, y la cáustica misma se obtiene al girar la figura alrededor del eje PQ. La aberración astigmática (véanse §§ 82, 83) corresponde a la ulterior disminución de simetría de la superficie cáus-

tico, la cual no tiene ya ningún eje de simetría y solamente posee dos planos mutuamente perpendiculares de simetría.

La aberración de coma (véase § 82) significa que la superficie cáustica posee solamente un plano de simetría que pasa a través del punto luminoso y del eje óptico.

§ 82. Aberraciones originadas por haces anchos de rayos

Aberración esférica. Supongamos que en el eje óptico del sistema está dispuesto el punto luminoso L que envía un ancho haz de rayos hacia el sistema óptico (lente). Para examinar el funcionamiento de las diferentes zonas de la lente, la taparemos con un disco de cartón, en el cual han sido practicados pequeños orificios dispuestos a lo largo

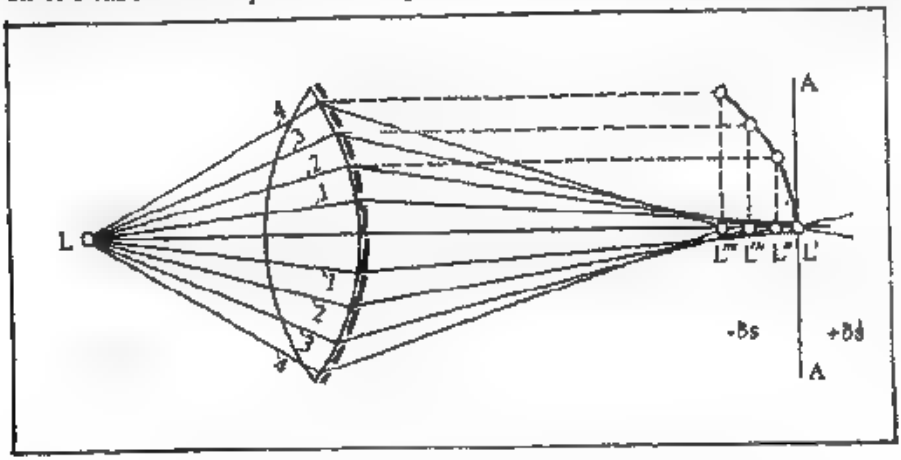


Fig. 13.2. Aberración esférica y su representación gráfica.

del diámetro del disco como se muestra en la fig. 13.2.

El haz paraxial *1* al pasar a través del orificio central dará la imagen del punto en L'; los haces que pasan a través de las zonas más alejadas (haces *2*, *3*, etc.) darán imágenes en los puntos L'', L''', ... El fenómeno puede ser bien observado en el aire lleno de polvo. Si se quita el cartón con orificios, entonces los haces que pasan a través de las zonas intermedias darán imágenes en los puntos intermedios, de tal manera que el punto L tendrá como imagen en el eje la línea $L' \ldots L''''$, y en cualquier pantalla perpendicular al eje se obtendrá la imagen en forma de un disco con una distribución heterogénea de iluminación. De esta manera para un haz bastante ancho el carácter estigmático de la imagen se pierde inclusive para los puntos en el eje. Este tipo de error lleva el nombre de *aberración esférica*, aunque él es característico no sólo para las superficies esféricas

Como medida de aberración esférica se toma la distancia entre L' y L'' para las zonas correspondientes (aberración axial). Una cómoda representación gráfica de la aberración esférica se da en la fig. 13.2, donde los δs positivos son marcados a la derecha de la línea AA.

La magnitud de la aberración esférica depende de la curvatura de las superficies de la lente y del índice de refracción, así como de cuál de las superficies de la lente asimétrica está dirigida hacia la fuente. Así, por ejemplo, la lente biconvexa de crown-glass ($n = 1{,}5$) con una relación de los radios de curvatura de 1 : 6, dirigida hacia los rayos paralelos con la cara más convexa, tiene aberraciones mínimas. La lente plano-convexa es aproximadamente de igual calidad. Como consecuencia de la aberración esférica el punto luminoso da en la pantalla una imagen en forma de un pequeño círculo (*círculo de dispersión*), el cual está iluminado, por lo general, no uniformemente. Al desplazar la pantalla a lo largo del eje óptico las dimensiones del círculo de dispersión y la distribución de la iluminación en él variarán. Si la pantalla coincide con el plano AA (véase fig. 13.2), es decir pasa a través del foco L' de los rayos paraxiales, entonces el círculo de dispersión tendrá la forma de un punto brillante con un halo relativamente grande y débil; al desplazar la pantalla desde L' hacia L'' las dimensiones del halo disminuirán pero su iluminación crecerá y el diámetro del punto brillante aumentará; para cierta posición de la pantalla el círculo de dispersión tiene las dimensiones menores (aproximadamente 4 veces menores que en el plano L') y una iluminación casi uniforme, si la pantalla sigue desplazándose se observará una rápida disipación de la parte iluminada.

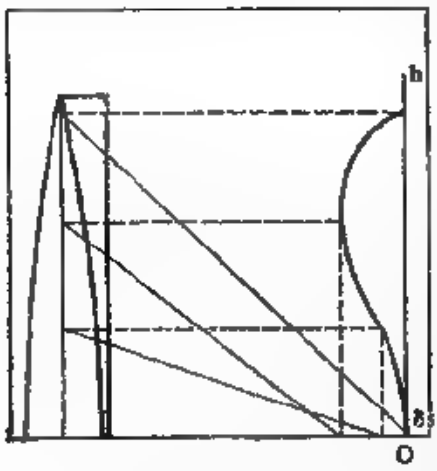


Fig. 13.2. Aberración esférica de un sistema corregido.

Una particularidad característica de la aberración esférica es que ella se conserva inclusive si el punto luminoso está situado en el eje del sistema, mientras que todas las demás aberraciones (en luz monocromática) desaparecen.

Las lentes positivas (convergentes) crean la aberración representada en la fig. 13.2, es decir $\delta s < 0$ para todas las zonas; las lentes negativas (divergentes) tienen una aberración de signo contrario. Por eso al combinar estas simples lentes se puede corregir considerablemente la aberración esférica. El ejemplo correspondiente está

representado en la fig. 13.3. Hablando rigurosamente, la aberración esférica puede ser completamente corregida sólo para algún par de zonas estrechas y además sólo para dos determinados puntos conjugados. Sin embargo, la corrección prácticamente puede ser bastante satisfactoria inclusive para los sistemas de dos lentes citados anteriormente. Tales sistemas de dos lentes pueden ser muy bien corregidos en lo que respecta a la aberración esférica. Así, por ejemplo, un objetivo astronómico no grande con el diámetro de 80 mm y la distancia focal de 720 mm dio un valor máximo $\delta s' = -0{,}011$ mm.

Para corregir la aberración esférica de los espejos (por ejemplo, de los proyectores) a ellos generalmente no se les da una forma esférica, sino la de un paraboloide de revolución, disponiendo la fuente en el foco; en tales espejos, si han sido confeccionados cuidadosamente, la aberración esférica puede ser muy pequeña. Pueden ser bien corre-

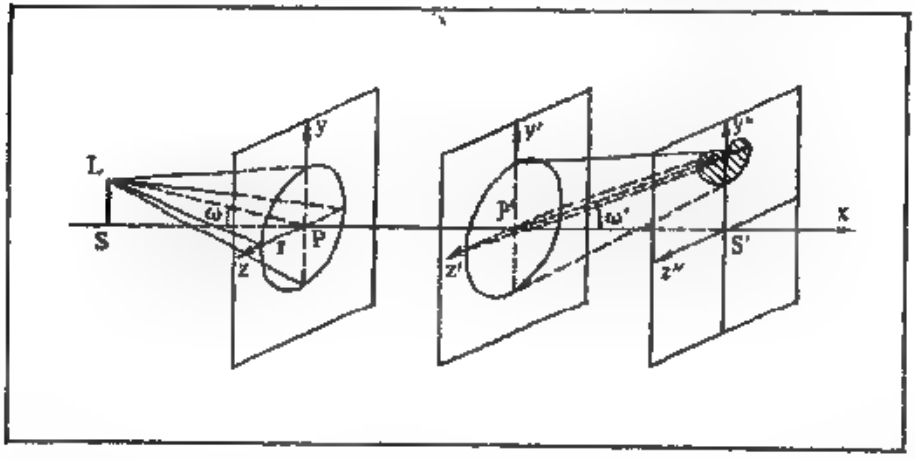


Fig. 13.4. Coma.

gidos los reflectores, ambas superficies de los cuales son esféricas pero de diferente curvatura; la superficie plateada posterior tiene menos curvatura. La luz reflejada experimenta una refracción complementaria en el vidrio del reflector, que juega el rol de lente divergente (más delgada en el centro) calculada de tal manera que pueda ser corregida la aberración de la superficie posterior. Tales espejos son utilizados en la actualidad sólo en los aparatos pequeños de señales (con un diámetro no mayor de 100 mm).

b. *Coma* Si el punto luminoso que envía un ancho haz no se encuentra en el eje del sistema, entonces la cáustica adquirirá una forma mas complicada. Tapemos la lente con una pantalla, en la cual ha sido cortada una estrecha rendija en forma de un anillo de gran diámetro con centro en el eje. El punto luminoso L está colocado fuera

del eje. El ancho haz al pasar a través del sistema dará en la pantalla la imagen de L en forma de una figura asimétrica bastante complicada (fig. 13.4).

Quitando la pantalla y haciendo trabajar toda la lente, en calidad de imagen del punto obtendremos una manchita iluminada no uniformemente, un tanto parecida a un cometa con cola. De aquí se deriva el nombre de este tipo de aberración (coma κόμη significa cabellera; cometa significa estrella con cabellera).

Generalmente el coma tiene una forma más complicada. Escogiendo debidamente el conjunto de partes del sistema el coma puede ser debilitado considerablemente.

§ 83. Aberraciones producidas por finos haces oblicuos extraaxiales de rayos

a. *Astigmatismo de haces oblicuos* Si el haz de rayos proveniente de un punto incide sobre el sistema formando un ángulo con el eje, entonces él pierde su carácter homocéntrico. Para poder tener una idea más clara del carácter de la deformación que se observa en este caso introduzcamos algunas designaciones complementarias. Los planos que pasan a través del eje del sistema llevan el nombre de planos *meridionales*. Supongamos que el rayo central del haz elemental (eje del haz) se encuentra en el plano meridional. Entonces de este haz se puede separar mentalmente una pequeña cinta plana de rayos que se encuentran en el plano meridional y que son llamados rayos *meridionales*, o una pequeña cinta plana de rayos dispuestos en el plano perpendicular y llamados rayos *sagitales* (f.g. 13.5).

Los haces con una suficiente oblicuidad con respecto al eje no dan la imagen estigmática del punto L. El haz después de la refracción adquiere una forma análoga a la mostrada en la fig. 12 6. Como imagen del punto L sirven dos líneas focales. Una de ellas (L_sL_s, véase fig 13 5) se forma como resultado de la refracción de los rayos sagitales y está orientada en el plano meridional, la otra (L_mL_m) que se obtiene en la refracción de los rayos meridionales está orientada en el plano perpendicular. Los planos focales (*I* y *III*), en los cuales están estas dos imágenes rectilíneas están dispuestos a distancias desiguales del plano principal del sistema. De esta manera, también en este caso el punto L tiene como imagen a un círculo de dispersión, cuya forma depende de la posición de la pantalla. En el plano *I* la figura de difusión tiene la forma de un segmento de recta dispuesta en forma perpendicular al plano meridional; en el plano *III* la figura de dispersión se degenera en una recta que está situada en el plano meridional; en el plano *II* que se encuentre entre *I* y *III*, la figura de dispersión posee la forma de un círculo; en los planos intermedios la forma será de elipses de diferentes excentricidades.

Si como fuente de luz se utiliza un segmento de línea, y no un punto, entonces la imagen de ella puede ser bastante satisfactoria en uno de los planos *I* o *III* en dependencia de la orientación del segmento luminoso. Las imágenes de los segmentos dispuestos en los planos meridionales serán nítidas en el plano *III*, donde las imagenes de cada punto están orientadas en el plano meridional, y por lo tanto, se unirán formando una imagen satisfactoria de toda la línea, los segmentos en forma de arcos (anillos), dispuestos en el plano perpendicular al eje (y por lo tanto, que intersecan todos los planos meridionales bajo un ángulo recto), darán por la misma razón una imagen satisfactoria en el plano *I*. La red, que es cómoda para mostrar los fenómenos descritos, está representada en la fig. 13.5. Colocando la red de tal manera, que el punto *O* se encuentre en el eje, obtendremos en el plano *I* una imagen más o menos satisfactoria de las circunfe-

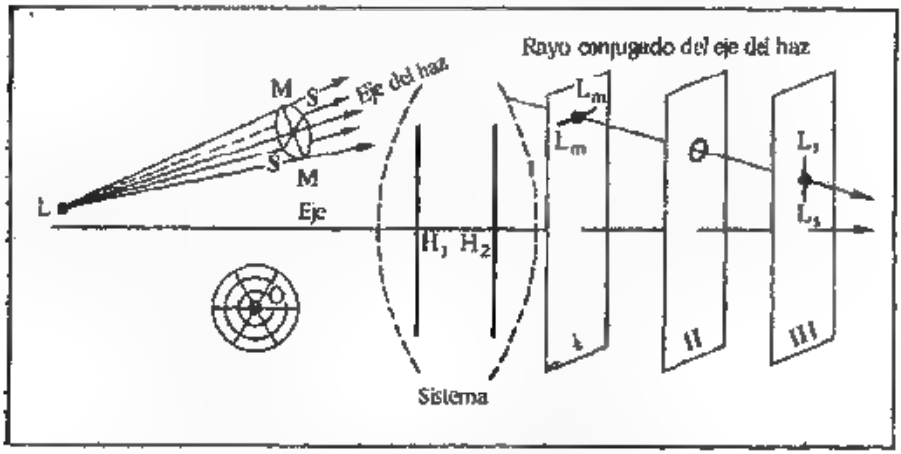


Fig. 13.5. Astigmatismo de haces oblicuos.

LMM, la sección meridional; L_m L_m, la línea focal meridional; LSS, la sección sagital; L_s L_s, la línea focal sagital.

rencias concéntricas, y en el plano *III* la imagen de las líneas radiales. Las líneas radiales y circulares de la parte central de la red formarán sus imágenes igualmente nítidas en un solo plano.

b. *Curvatura del plano imagen.* La imagen de la red, mostrada en la fig. 13.5, permite observar simultáneamente con la pérdida del carácter estigmático también una particularidad relacionada con los haces oblicuos. Para determinada posición de la pantalla la nitidez de la imagen de diferentes anillos (o la nitidez de los radios a lo largo de su longitud) puede ser diferente. Desplazando la pantalla, nosotros podemos mejorar la imagen de unos sectores empeorando la de otros. Este experimento muestra que la imagen no constituye un plano perpendicular al eje óptico, sino una superficie curvada, además el

grado de curvatura para los haces meridionales y para los haces sagitales es diferente. La fig. 13.6 muestra el carácter de esta curvatura: QO es el eje del sistema, MH_1, el eje de los haces inclinados, OS, el plano de la imagen no encorvada, que corresponde a un haz paraxial, OS_m y OS_s, las superficies curvadas de la imagen que son originadas por los haces oblicuos meridionales y sagitales correspondientemente. La línea OS, por supuesto, es tangente a las curvas OS_m y OS_s en el punto O, es decir en la región paraxial

El astigmatismo del sistema se corrige con ayuda de una elección especial de los elementos estructurales del sistema, es decir de los radios de las superficies, de los índices de refracción y de las distancias entre las superficies Simultáneamente con la supresión del astigmatismo generalmente se trata de eliminar también la curvatura del plano imagen, lo que es particularmente importante para la fotografía, donde se exige la obtención de una nítida imagen en la superficie fotosensible plana. Los buenos objetivos fotográficos de este tipo (objetivos anastigmáticos) poseen un considerable campo visual (más de 50°) y dan imagen plana.

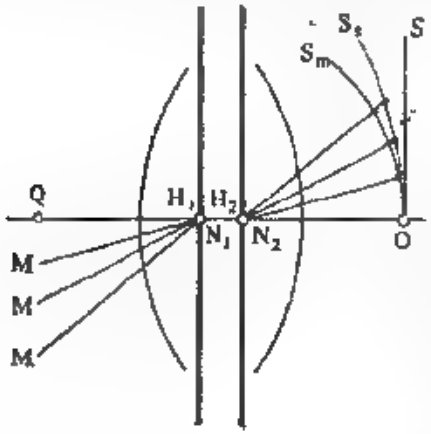


Fig. 13.6. Curvatura del plano de la imagen.

c. Distorsión de las imágenes. Cuando los rayos enviados por el objeto al sistema forman ángulos grandes con su eje óptico, la imagen dada aun por angostos haces de rayos puede revelar un tipo más de deformación. Ella se origina debido a que el aumento V de este sistema para ángulos grandes depende del ángulo entre los ejes del haz y del sistema y, por lo tanto, varía al pasar del centro de la imagen a la periferia. Este tipo de aberración lleva el nombre de *distorsión* y se manifiesta en que la imagen resulta no semejante al objeto Las formas típicas de distorsión (en corsé y en barril) están mostradas en la fig. 13.7

La distorsión generalmente no perjudica mucho la observación pero se vuelve muy peligrosa si con ayuda del sistema óptico se realizan tomas destinadas para la medición (por ejemplo, en la geodesia o, más que todo, en la aerofotogrametría). Por eso los objetivos para tales trabajos son corregidos muy cuidadosamente por la distorsión. Así, por ejemplo, el buen objetivo, calculado por M. M. Rusinov destinado para las aerofotografías cartográficas, para un cam-

po de visión de 120°, da un error en la determinación de dirección hacia el objeto no mayor que 10".

§84. Astigmatismo producido por la asimetría del sistema

Un caso práctico muy importante de astigmatismo se observa cuando la simetría del sistema con respecto al haz es violada como consecuencia de la estructura del mismo sistema. Imaginemos un haz de rayos procedente de L y recogido por la lente. En el camino del haz convergente coloquemos una *lente cilíndrica*, es decir, una lente, uno de los cortes de la cual (por ejemplo, el vertical) es rectangular, y el segundo, circular. De esta manera la lente cilíndrica tiene solamente dos planos de simetría, el vertical y el horizontal, pero está

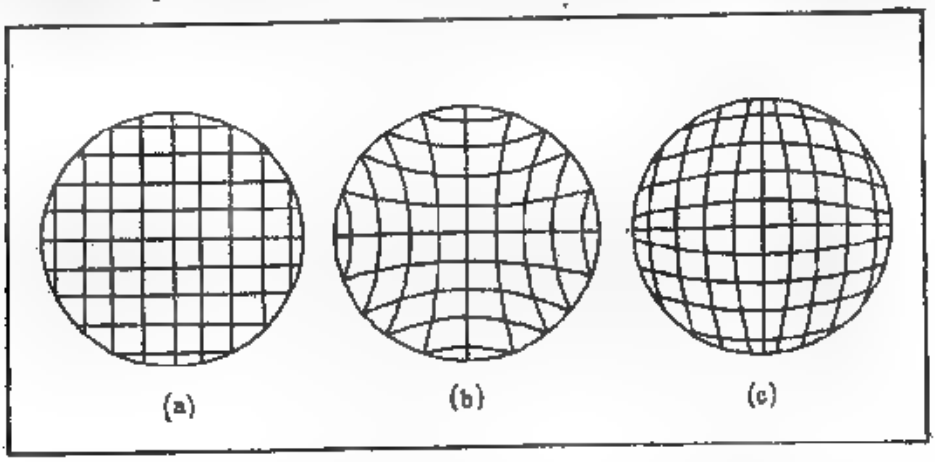


Fig. 13.7. Distorsión de la imagen.
a es la imagen no deformada, b, la distorsión en corsé; c, la distorsión en barril.

privada de algún eje de simetría, el cual lo posee el haz luminoso incidente. Al pasar a través de este sistema, la simetría axial del haz refractado también será violada, y nosotros obtendremos una imagen astigmática.

El carácter del haz astigmático se ve de la fig. 13.8. El haz astigmático al intersecar los planos perpendiculares al eje, dará un conjunto de secciones rectangulares. En los puntos P_s y P_m estos rectángulos se convierten en rectas (líneas focales), paralelas a los planos de simetría del sistema.

Un astigmatismo de esta naturaleza con frecuencia lo posee el ojo humano, lo que se manifiesta en su incapacidad de ver con igual nitidez un sistema de franjas mutuamente perpendiculares en las tablas de prueba. Para la corrección de este defecto se utilizan las gafas cilíndricas que compensan el astigmatismo natural del ojo.

De manera bastante evidente se manifiesta el astigmatismo en la refracción de un haz divergente incidente sobre un límite plano de separación (véase ejercicio 108). El astigmatismo se manifiesta también, cuando en el camino de los rayos se introduce un prisma que también es un sistema óptico y que no posee simetría axial. De esta manera, el prisma puede violar la homocentricidad del haz. Esta circunstancia tiene un gran significado en la construcción de los aparatos espectrales. La teoría muestra que el prisma no introduce astigmatismo si ella está dispuesta en un haz paralelo de rayos; con esta disposición desaparece también el coma que se introduce por el prisma, si sobre él inciden rayos convergentes o divergentes. Cuando los rayos incidentes sobre el prisma no son paralelos el astigmatismo se puede reducir al mínimo colocando el prisma en la posición de mínima desviación, aunque en este caso el coma no se elimina.

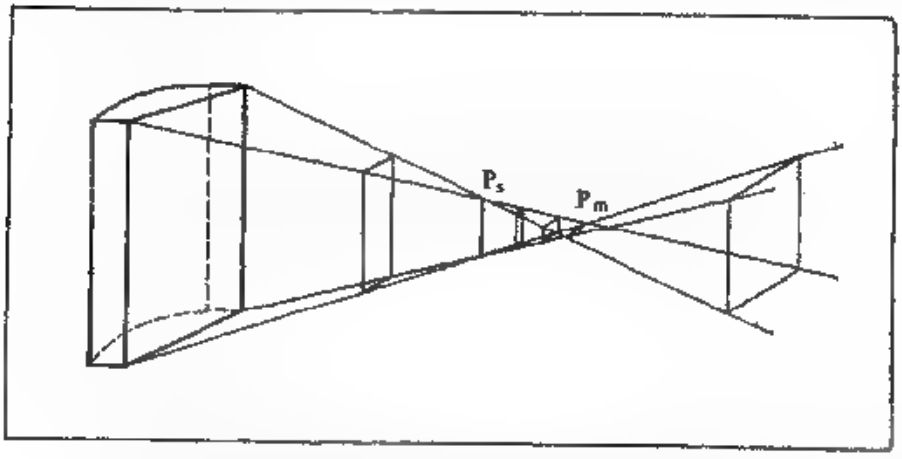


Fig. 13.8. Astigmatismo de una lente cilíndrica.
P_s es la línea focal sagital; P_m la línea focal meridional. Si a la lente cilíndrica se le añade un diafragma con sección circular, entonces las secciones rectangulares del haz se sustituirán por las correspondientes secciones elípticas.

§ 85. Aplanatismo. Condición de los senos

Sea que para algún punto S en el eje óptico (fig. 13.9) ha sido eliminada la aberración esférica, de manera que S forma su imagen nítida en S', a pesar de que se utilizan anchos haces. De aquí todavía no se deduce que un pequeño sector de superficie σ que pasa a través de S y que es perpendicular al eje tendrá una imagen nítida y sin deformaciones. Para obtener esta imagen correcta es necesario que las diferentes zonas del sistema den un mismo *aumento*. En caso contrario los puntos del sector, que no se encuentran en el eje, formarán

su imagen con distintas partes de nuestro ancho haz a diferentes distancias del eje, es decir para estos puntos de dicho elemento fuera del eje no se conservará el caracter estigmático de la imagen. Abbe encontró que el requisito de la constancia del aumento realizado por las diferentes zonas del sistema se cumple si se satisface la siguiente condición:

$$\frac{n_1 \operatorname{sen} u_1}{n_2 \operatorname{sen} u_2} = \frac{y_2}{y_1} = V, \qquad (85.1)$$

donde n_1 y n_2 son los índices de refracción del medio en el lado del objeto y de la imagen, $V = y_2/y_1$ es el aumento, que debe, por lo tanto, mantenerse constante para cualquier par de rayos conjugados procedentes del punto en el eje y limitados por los ángulos u_1 y u_2 que forman con el eje del sistema.

En la fig. 13.10 se muestra que la condición de los senos de Abbe es consecuencia del requisito físico, según el cual para la obtención de la imagen nítida las ondas que van desde el objeto hasta la imagen deberán pasar a través de diferentes zonas del sistema sin diferencia en fase. Para simplificar los razonamientos escojamos en calidad de objeto un pequeño orificio de un diafragma de radio $S_1A_1 = y_1$, que está iluminado desde la izquierda por haces paralelos. En la fig. 13.10 se muestran dos rayos que dan la imagen del diafragma a través de dos diferentes zonas del sistema óptico: a través de su parte central (haz I, líneas grusas) y a través de su región periférica (haz II, líneas punteadas). Si los haces I y II forman la imagen de A_1B_1 con igual aumento, entonces la imagen de A_2B_2 será nítida; por lo tanto, A_2 y B_2 constituyen los puntos, adonde las ondas luminosas llegan a través de diferentes zonas del sistema en una misma fase. Los puntos A_1 y B_1, así como A_2 y B_2 están correspondientemente en la superficie de la onda que se propaga en la dirección I, es decir las oscilaciones en ellos se encuentran en una misma fase. El camino de la onda II desde B_1 hasta B_2 tiene en comparación con el camino desde A_1 hasta A_2 una diferencia óptica de recorrido igual a

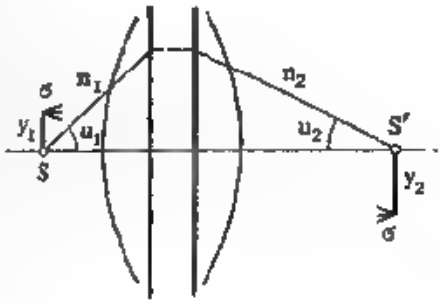


Fig. 13.9. Puntos aplanáticos del sistema.

$$(B_1C_1) - (C_2A_2) = 2y_1 \operatorname{sen} u_1 \cdot n_1 - 2y_2 \operatorname{sen} u_2 \cdot n_2.$$

Para que en el haz *II* las oscilaciones en los puntos A_2 y B_2 también se encuentren en fase, es necesario el cumplimiento de la condición

$$(B_1C_1) - (C_2A_2) = 0,$$

es decir

$$2y_1 \operatorname{sen} u_1 \cdot n_1 = 2y_2 \operatorname{sen} u_2 \cdot n_2,$$

o bien

$$\frac{n_1 \operatorname{sen} u_1}{n_2 \operatorname{sen} u_2} = \frac{y_2}{y_1} = V$$

(condición de los senos).

De lo expuesto está claro que si se cumple la condición de los senos los puntos que se encuentran cerca del eje formarán nítida-

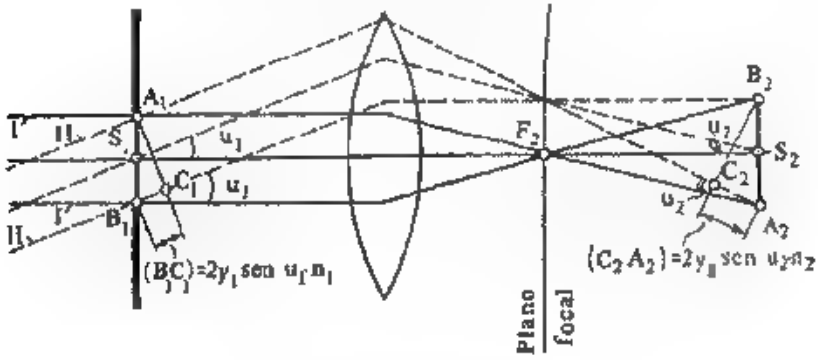


Fig. 13.10. *Deducción de la condición de los senos*

mente su imagen con haces anchos, es decir en el sistema ha sido eliminada la aberración de coma (§ 82). Al mismo tiempo es necesario subrayar que el ángulo u_1 puede tomar valores grandes, es decir la abertura del haz no está limitada, pero se supone que la magnitud y_1 debe ser pequeña.

Si el medio es el mismo a ambos lados del sistema, por ejemplo aire, entonces $n_1 = n_2$ y la condición de los senos tomará la forma

$$\frac{\operatorname{sen} u_1}{\operatorname{sen} u_2} = \frac{y_2}{y_1}. \qquad (85.2)$$

Los dos puntos S y S' para los cuales ha sido eliminada la aberración esférica y se cumple la condición de los senos, se llaman puntos *aplanáticos*.

En el eje del sistema son posibles no más de tres pares de puntos

aplanáticos.*) Por eso el cumplimiento de la condición de aplanatismo tiene un significado especial para los sistemas donde el objeto se coloca siempre cerca aproximadamente de un punto determinado. Un sistema de este tipo es el objetivo del microscopio. En efecto, en el microscopio el objeto examinado de pequeña dimensión siempre se coloca cerca del plano focal del objetivo y envía al objetivo haces muy anchos. La condición de los senos fue formulada por Abbe cuando éste investigaba los métodos para mejorar los objetivos de los microscopios.

Abbe indicó también un método sencillo que permite aclarar en qué medida se cumple la condición de los senos. Con este fin la figura de prueba (objeto experimental) representada en la fig. 13.11 es observada a través del sistema con el ojo (o es proyectada sobre una pantalla) dispuesto en uno de los puntos aplanáticos A_2 del sistema. Si se cumple la condición de los senos, entonces se logrará encontrar tal posición del objeto experimental detrás del segundo punto aplanático A_1, para el cual el observador verá su imagen en forma de una red rectangular.

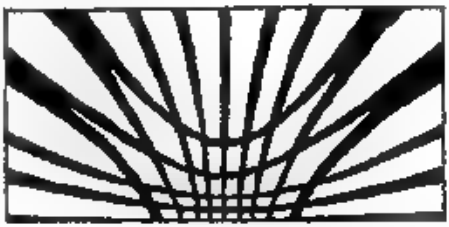


Fig. 13.11. Objeto de prueba para verificar el cumplimiento de la condición de los senos.

Poniendo a prueba muchos microobjetivos hechos «al azar» por los antiguos fabricantes, Abbe descubrió que en todos los buenos objetivos se cumple la condición de los senos. Para pequeños ángulos u cuando se puede poner sen $u = u$, la condición de Abbe coincide con el teorema de Lagrange—Helmholtz (véase § 74) y, por lo tanto, siempre se realiza. En el caso de haces anchos para que se cumpla la condición de los senos es necesaria una ejecución especial del sistema óptico, además esta condición se cumplirá sólo para determinados pares de puntos.

§ 86. Aberraciones originadas por la variación del índice de refracción en función de la longitud de onda (aberraciones cromáticas)

a. *Dependencia del índice de refracción del color de la luz.* En todas las construcciones precedentes de la óptica de rayos nosotros consideramos que el índice de refracción es una magnitud constante, mientras que en realidad él depende del color, es decir, de la longitud de onda de la luz.

*) Son excepción solamente algunos sistemas con aumento angular igual a 1 (por ejemplo, el espejo plano), para los cuales todos los puntos son aplanáticos.

Las primeras investigaciones experimentales de esta dependencia pertenecen a Newton, el cual realizó (año 1672) el famoso experimento con la descomposición de la luz blanca en colores (espectro) al ser refractada ésta en el prisma. La observación de la refracción en el prisma hasta ahora es uno de los métodos más cómodos para la determinación del índice de refracción de la sustancia del prisma y para el estudio de la dependencia del índice de refracción con respecto al color (dispersión).

1. *Refracción en el prisma.* Sea el ángulo refringente del prisma igual a ε (fig. 13.12); el ángulo de desviación del $\angle KBC = D$. Del triángulo MBN se tiene

$$D = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2);$$

del triángulo MNP hallamos

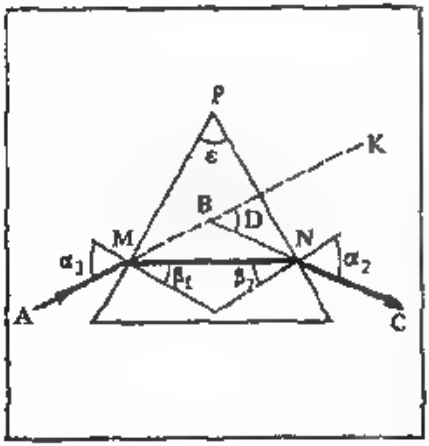


Fig. 13.19. Refracción en el prisma. El ángulo de desviación $D = \alpha_1 + \alpha_2 - \varepsilon$.

$$\varepsilon = \beta_1 + \beta_2.$$

Por esto

$$D = \alpha_1 + \alpha_2 - \varepsilon.$$

En el caso de recorrido simétrico de los rayos ($\alpha_1 = \alpha_2$) el ángulo D alcanza su valor mínimo (véase ejercicio 112). En este caso

$$n = \frac{\operatorname{sen} {}^1/_2 (D_{\min} + \varepsilon)}{\operatorname{sen} {}^1/_2 \varepsilon}. \qquad (86.1)$$

La última relación generalmente se utiliza para determinar n según los ángulos ε y $D_{\min}$ medidos con ayuda del goniómetro.

Hemos examinado el recorrido de los rayos, el plano de incidencia de los cuales es perpendicular a las aristas del prisma; este plano lleva el nombre de *sección principal* del prisma. Si los rayos inciden bajo un ángulo con respecto a la sección principal, entonces ellos se refractarán tanto más fuertemente, cuanto mayor sea el ángulo que forma el plano de incidencia con la sección principal.

2. *Dependencia de n de λ (dispersión).* En los medios transparentes el índice de refracción n crece al disminuir la longitud de onda λ. Para los cuerpos transparentes la dependencia (en la parte visible del espectro) tiene la forma

$$n_\lambda = a + b/\lambda^2 + c/\lambda^4 + \ldots \qquad (86.2)$$

Para muchos cuerpos podemos limitarnos con la relación

$$n_\lambda = a + b/\lambda^2 \qquad (86.3)$$

(fórmula de Cauchy): a, b, c, ... son constantes que caracterizan a la sustancia. Para los cuerpos coloreados la fórmula de Cauchy no es válida, se viola incluso la forma de la dependencia de n con respecto a λ (véase cap. XXVIII).

Como medida de dispersión sirve la diferencia de los índices de refracción ($n_{\lambda_1} - n_{\lambda_2}$) para diferentes valores de λ_1 y λ_2. La refracción generalmente se caracteriza por el valor del índice de refracción para $\lambda = 589{,}3$ nm (valor medio entre las longitudes de onda de las dos líneas próximas amarillas del sodio), el cual es simbolizado como n_D. Como medida de dispersión sirve la *dispersión media* definida como la diferencia

$$n_F - n_C,$$

donde n_F se refiere a $\lambda = 486{,}1$ nm (línea azul del hidrógeno, F) y n_C a $\lambda = 656{,}3$ nm (línea roja del hidrógeno, C).

Comúnmente la sustancia refringente se caracteriza por la magnitud de la *dispersión relativa*, por la cual se comprende la relación

$$\frac{n_F - n_C}{n_D - 1},$$

donde n_D se refiere a $\lambda = 589{,}3$ nm. En los catálogos prácticos generalmente figura la magnitud inversa a la dispersión relativa, es decir

$$\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$$

que es el llamado *coeficiente de dispersión* o *número de Abbe*. Las sustancias con poca dispersión se caracterizan por un valor grande de ν (por ejemplo, para la fluorita $\nu = 95$); las sustancias con gran dispersión tienen un pequeño ν (para las variedades pesadas de vidrio $\nu = 20$). Generalmente (*pero no siempre*) la dispersión crece junto con el aumento del valor medio del índice de refracción.

Para los vidrios el crecimiento de la dispersión generalmente es paralelo al crecimiento del peso específico del vidrio. Las variedades pesadas del vidrio (flint) se caracterizan por una alta dispersión, las ligeras (crown), por una pequeña dispersión. En la actualidad se tiene muchas variedades de vidrios (véase ejercicio 114).

b. *Prismas acromáticos y prismas de visión directa*. Gracias a la diferencia en la dispersión se puede compensar el cromatismo sin aniquilar la refracción (prismas acromáticos), y disminuir o compensar completamente la desviación para uno de los rayos sin excluir la dispersión (prismas complejos y prismas de visión directa). El dispositivo de tales prismas es mostrado en las figs. 13.13—13.15.

En el prisma acromático la dispersión es compensada y la desviación $\varphi_2 - \varphi_1$, aunque ha sido disminuida, no desaparece (véase fig. 13.13). En el prisma espectral complejo, mostrado en la fig. 13.14, la dispersión se mantiene muy considerable gracias al ángulo re-

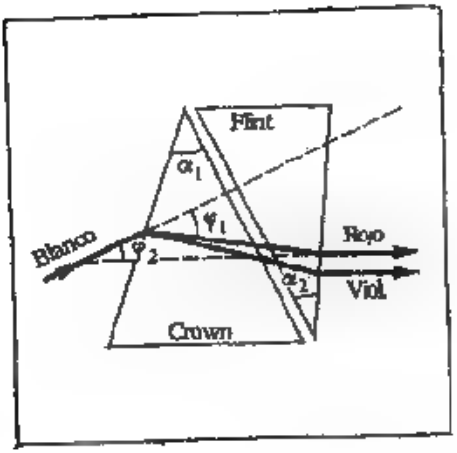


Fig. 13.13. Par acromático de prismas.

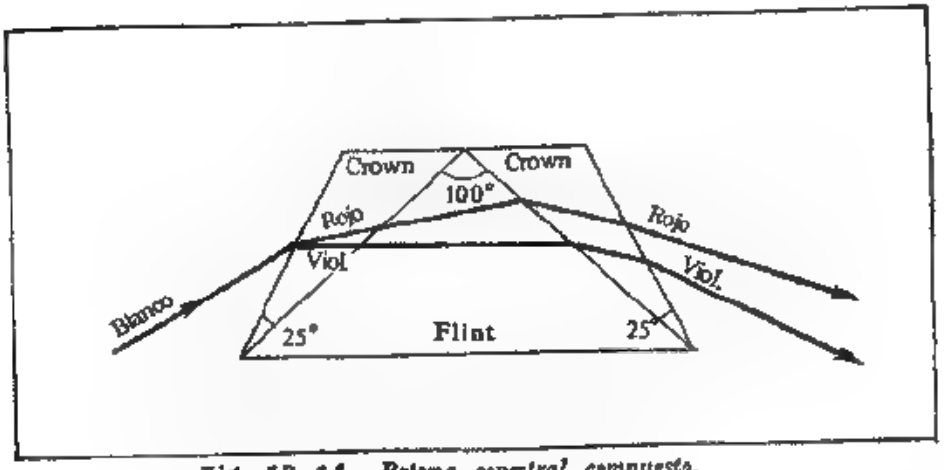


Fig. 13. 14. Prisma espectral compuesto.

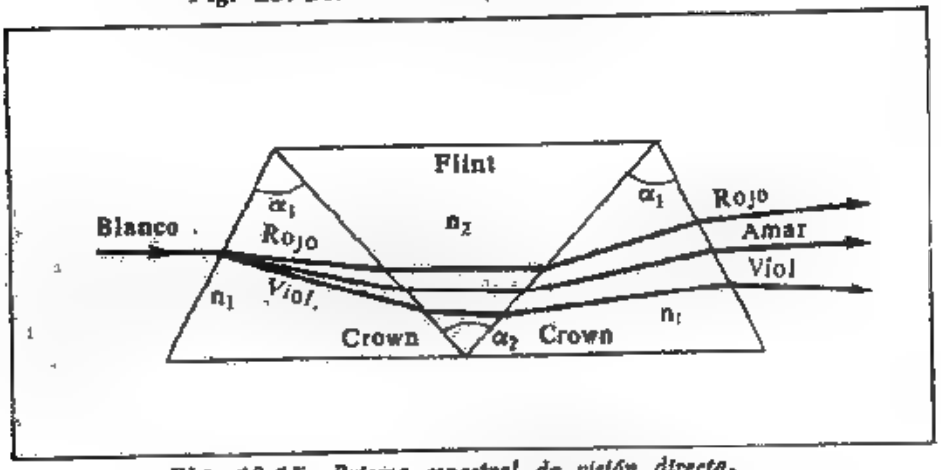


Fig. 13.15. Prisma espectral de visión directa.

fringente grande del prisma interno hecho de flint; la desviación como consecuencia del ángulo relativamente pequeño entre las caras externas ha sido disminuida en comparación con los prismas comunes triangulares. La presencia de partes de crown permite aumentar el ángulo refringente del prisma interior, el cual está limitado por el fenómeno de reflexión interna total.

El prisma de visión directa está mostrado en la fig. 13.15. Escogiendo debidamente los ángulos α_1 y α_2 y los índices de refracción n_1 y n_2 se puede lograr que algún rayo, correspondiente a determinada longitud de onda, pase sin refractarse (véase ejercicio 113) y que la dispersión se mantenga considerable.

c. *Aberración cromática y acromatización de las lentes.* La distancia focal de las lentes se define por la relación

$$\frac{1}{f}=(N-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right), \qquad (86.4)$$

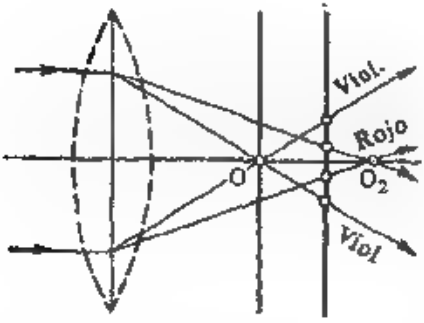


Fig. 13.16. Aberración cromática de una lente ordinaria.

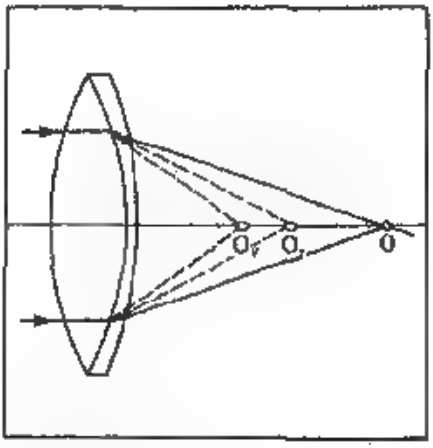


Fig. 13.17. Lente acromática

donde N es el índice relativo de difracción.

De esta manera, f para determinada lente (es decir para determinados R_1 y R_2) será menor cuanto mayor sea N; de ahí aparece la aberración cromática de la posición, o *aberración cromática axial* es decir la deformación en virtud de la cual incluso para rayos paraxiales el haz no monocromático tiene un conjunto entero de focos a lo largo del segmento del eje O_1O_2 (la fig. 13.16 está muy exagerada). De acuerdo con esto el punto en el eje tendrá como imagen círculos coloreados, cuyas dimensiones relativas dependen de la situación de la pantalla. Cuanto menor sea la dispersión del vidrio, menor será la aberración cromática axial O_1O_2.

Newton a base de sus experimentos consideraba equivocamente que la magnitud de la dispersión relativa, que interviene en el cálculo

del sistema acromatizado, no depende del material de la lente, y de ahí llegó a la conclusión acerca de la imposibilidad de la construcción de lentes acromáticas. De acuerdo con esto Newton consideraba que para la práctica astronómica un gran significado deberán tener los reflectores, es decir los telescopios con óptica reflectora. Sin embargo, Euler basándose en la ausencia de una aberración cromática notable para el ojo*) enunció la idea acerca de la existencia de la necesaria variedad de medios refringentes y calculó de qué manera se podría corregir la aberración cromática de la lente. Dollond construyó (año 175*) el primer anteojo acromático. En la actualidad se tienen docenas de variedades de vidrios con diferentes índices de refracción y diferente dispersión, lo que da grandes posibilidades al cálculo de sistemas acromáticos. Más difícil es el problema relacionado con la acromatización de los sistemas destinados para la luz ultravioleta, debido a que la variedad de sustancias transparentes al ultravioleta es limitada. De todas maneras se logra construir lentes acromáticas, al combinar el cuarzo y la fluorita o el cuarzo y la sal gema.

La estructura ordinaria de una simple lente acromática está mostrada en la fig. 13.17. A la lente biconvexa de crown se le adhiere (pega) una lente divergente de flint calculada de manera correspondiente (véase ejercicio 114). La lente adicional alarga las distancias focales de la primera. En este caso más aumenta la distancia focal de los rayos más fuertemente refractados (corta longitud de onda), de manera que el foco O_v se desplazará más que el foco O_r. Escogiendo de manera correspondiente los parámetros nosotros haremos *coincidir* los focos de dos (o incluso de tres) longitudes de onda. Sin embargo para las variedades modernas de vidrio no se logra hacer coincidir los focos para todos los rayos visibles, como resultado de lo cual aparece un cromatismo residual llamado *espectro secundario*. En las lentes delgadas la coincidencia de la posición del foco para diferentes longitudes de onda significa también la igualación de las distancias focales, es decir una *completa* acromatización. En cambio para las lentes gruesas (sistemas) la coincidencia de los focos todavía no significa una coincidencia de las distancias focales, ya que estas últimas se miden a partir de los planos principales, cuyas posiciones para diferentes longitudes de onda pueden ser diferentes. La distinción en la magnitud de las distancias focales significa la diferencia en el aumento para diversas longitudes de onda, a consecuencia de lo cual los objetos de dimensiones finitas dan imágenes *con* una orla de colores. Este segundo error cromático lleva el nombre de *diferencia cromática de los aumentos*, y para su eliminación es necesario un cálculo especial. Los sistemas, en los cuales han sido eliminados ambos errores cromáticos para cualquier distancia del objeto, llevan el nombre de sistemas *establemente acromatizados*.

*) Entre otras cosas, la aberración cromática del ojo no es tan pequeña (compárese § 91).

La acromatización para las observaciones visuales (anteojos) se realiza de tal manera que coinciden los focos de los rayos rojo y azul ($\lambda_C = 656{,}3$ nm, y $\lambda_F = 486{,}1$ nm); la acromatización de los sistemas destinados para la toma de fotografías (objetivos fotográficos) se realiza calculando la unión de los focos para las longitudes de onda $\lambda G' = 434{,}1$ nm y $\lambda_D = 589{,}3$ nm que actúan fuertemente en la placa fotográfica sensibilizada.

Abbe (año 1886) introdujo para la microscopía los objetivos *apocromáticos*, es decir los objetivos donde están unidos los focos para tres variedades de rayos y al mismo tiempo ha sido eliminada la aberración esférica para los diferentes colores (ha sido liquidada la *diferencia cromática de aberración esférica*, comúnmente llamada *aberración esferocromática*). Los objetivos apocromáticos de Abbe tienen una gran ventaja ante los objetivos acromáticos en los cuales han sido corregidos dos variedades de rayos. La diferencia cromática de aumentos que queda en los objetivos apocromáticos se elimina en el microscopio con la utilización de oculares especiales (oculares de compensación).

De lo expuesto queda claro que la eliminación de las numerosas aberraciones es posible sólo mediante la construcción de complicados sistemas ópticos calculados especialmente. Sin embargo, la corrección simultánea de todos los defectos puede resultar una tarea extremadamente complicada e incluso irresoluble. Por eso frecuentemente se hace de tal manera que se calcula la óptica destinada para un fin determinado. En este caso se eliminan aquellos defectos que son especialmente peligrosos para la tarea planteada, y se conforman con la incompleta eliminación de los demás.

Así, por ejemplo, para los objetivos de los anteojos astronómicos, cuando de fuente sirven los puntos dispuestos cerca del eje, es importante el cumplimiento de la condición de los senos y la eliminación de las aberraciones esférica y cromática para los puntos en el centro del campo; para los microobjetivos y fotoobjetivos destinados para la toma de fotografías de un ancho campo de visión es necesario, además del cumplimiento de la condición de los senos, la eliminación de las aberraciones que deforman el campo (distorsión, curvatura del campo, etc.) y también de la aberración cromática. Los objetivos destinados para la observación de objetos de poco brillo deben tener en lo posible un orificio relativamente grande, y esto nos obliga a conformarnos con algunas aberraciones imposibles de evitar cuando se trabaja con haces muy anchos. La corrección del cromatismo en los aparatos destinados para las observaciones visuales y para la fotografía se hace para distintas regiones espectrales considerando que el máximo de sensibilidad del ojo se encuentra en la parte amarillo-verde del espectro, y la sensibilidad de la placa fotográfica generalmente está desplazada en la región de ondas más cortas. El objetivo del colimador del aparato espectral debe estar muy bien corregido

de la aberración cromática, mientras que el objetivo de la cámara puede estar no acromatizada, pero en él son muy dañinos el astigmatismo de los rayos oblicuos y el coma; además, generalmente la óptica del espectrógrafo se calcula en forma conjunta de manera que la insuficiencia de una de sus partes en cierto grado se compensa a cuenta de otra.

14. INSTRUMENTOS OPTICOS

§ 87. El rol del diafragma

Los sistemas ópticos reales dan una imagen satisfactoria sólo con una cierta limitación del ancho de los haces de rayos que actúan. Pero incluso también para los sistemas ideales, los cuales podrían dar una imagen correcta de un objeto plano para cualquier ángulo de abertura de los haces, la limitación de éstos tiene un significado esencial.

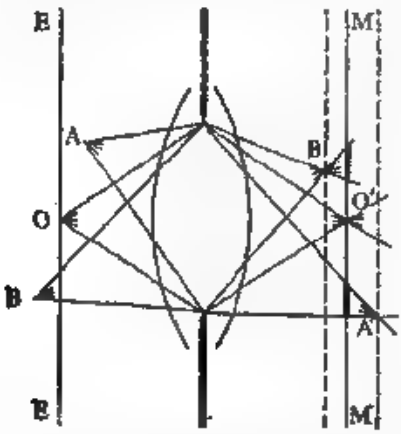


Fig. 14.1 Influencia del diafragma sobre la profundidad de la imagen nítida.

Cualquier sistema óptico, el ojo sólo o dotado de algún aparato ópt.co, el aparato fotográfico, el aparato de proyección, a fin de cuentas dibuja la imagen prácticamente en un plano (la pantalla, placa fotográfica, la retina del ojo); en cambio los objetos en la mayoría de los casos son tridimensionales. Sin embargo, incluso un sistema ideal a pesar de no ser limitado no podría dar imágenes de un objeto tridimensional en un plano. En efecto, los distintos puntos del objeto tridimensional se encuentran a diferentes distancias del sistema óptico, y a ellos les corresponden *distintos* planos conjugados. El punto luminoso O (fig. 14.1) da la nítida imagen O' en el plano MM que es conjugado del EE. Pero los puntos A y B darán imágenes nítidas en A' y B', y en el plano MM serán proyectados como pequeños círculos luminosos, cuyas dimensiones dependen de *la limitación* del ancho de los haces. Si el sistema no estuviera limitado por nada, entonces los haces provenientes de A y B iluminarían uniformemente el plano MM, es decir, no se obtendría ninguna imagen del objeto.

sino solamente la imagen de los diferentes puntos de él, que se encuentran en el plano *EE*.

Cuanto más angostos sean los haces, más precisa será la imagen del objeto espacial en el plano. Más exactamente, en el plano no se formará la imagen del mismo objeto tridimensional, sino aquel *cuadro plano* que constituye la proyección del objeto sobre cierto plano *EE* (plano de instalación) conjugado respecto al sistema del plano imagen *MM*. Como centro de proyección sirve uno de los puntos del sistema (centro de la pupila de entrada del instrumento óptico).

§88. Diafragma de apertura, pupila de entrada y de salida

De esta manera, la presencia de diafragmas limitadores, el rol de los cuales puede jugar el borde (la montura) de la lente es esencial

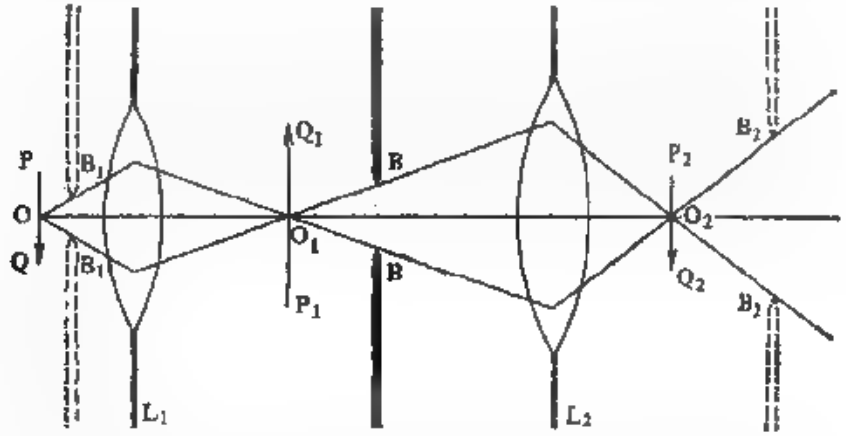


Fig. 14.2. BB es la apertura del diafragma, B_2B_1, la pupila de entrada y B_2B_1, la pupila de salida del sistema.

para cualquier instrumento óptico: de las dimensiones y de la posición de los diafragmas dependen la nitidez de la imagen, la regularidad de la figura y la luminosidad del instrumento.

Hablando en forma general, la limitación de los haces en los sistemas ópticos es distinta para los rayos procedentes de diferentes puntos del objeto. Para comenzar, examinemos la limitación de haces procedentes de los puntos axiales del objeto. El diafragma que limita este haz se llama *diafragma de apertura*. Como se había señalado, su rol lo puede cumplir la montura de alguna lente o el diafragma especial *BB*, si este último limita más fuertemente los haces de luz que la montura de las lentes. El diafragma de apertura *BB* comúnmente se coloca entre las diferentes componentes (lentes) del

sistema óptico complejo (fig. 14.2), pero puede ser colocado también delante o detrás de éste.

Si BB es un diafragma real de apertura (véase fig. 14.2), y B_1B_1 y B_2B_2 sus imágenes en la parte anterior y posterior del sistema, entonces todos los rayos que pasan a través de BB pasarán a través de B_1B_1 y B_2B_2 y al revés, es decir, cualquiera de los diafragmas BB, B_1B_1, B_2B_2 limitará los haces activos. En efecto, el rayo que ha pasado a través del borde B_1 necesariamente pasará a través del correspondiente borde B ya que estos puntos son conjugados.

Se llama *pupila de entrada* aquel de los orificios reales o aquella de sus imágenes que limita más el haz entrante, es decir, que es visto

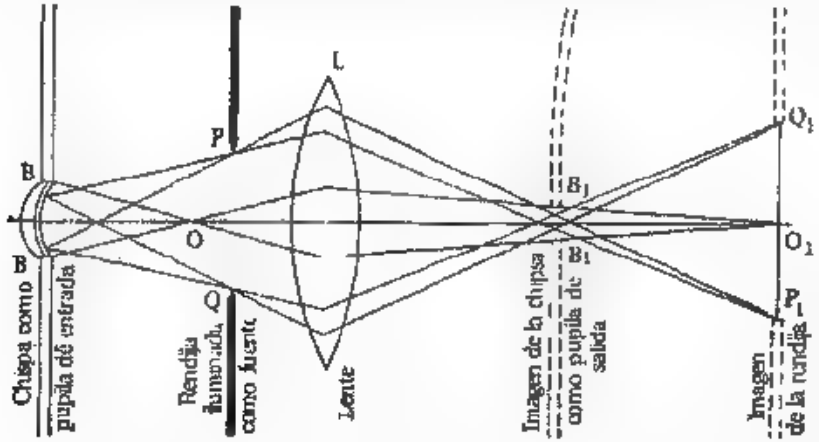


***Fig. 14.3.** El límite de la fuente de luz desempeña el papel de pupila de entrada del sistema.*

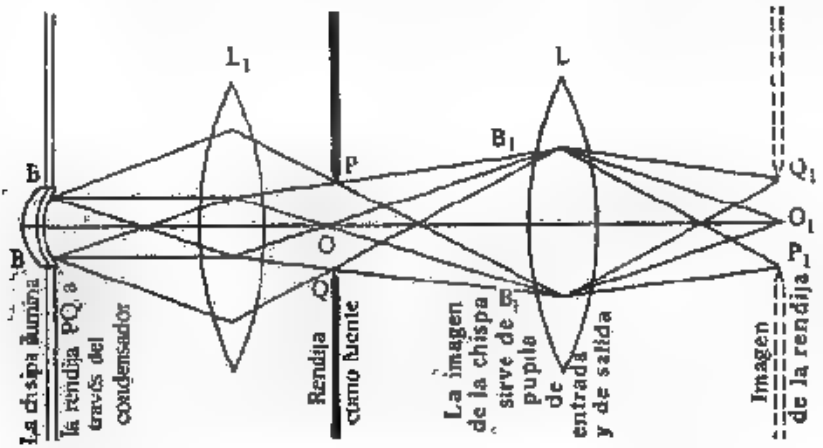


***Fig. 14.4.** El límite de la imagen de la fuente de luz desempeña el papel de pupila de entrada y de salida del sistema.*

bajo el menor ángulo desde el punto de intersección del eje óptico con el plano del objeto. Se llama *pupila de salida* el orificio o su imagen que limita el haz que sale del sistema. Evidentemente, la pupila de entrada y la de salida son conjugadas con respecto a todo el sistema.

El papel de pupila de entrada lo puede jugar cualquier orificio (la montura de la óptica, un diafragma especial) o su imagen (virtual o real). En algunos casos importantes el objeto reflejado es el orificio iluminado (por ejemplo, la rendija del espectrógrafo), además la iluminación se verifica directamente por una fuente de luz dispuesta no lejos del orificio, o con ayuda de un condensador auxiliar. En este caso, en dependencia del dispositivo el rol de pupila de entrada lo puede jugar el límite de la fuente (fig. 14.3) o de su imagen (fig. 14.4), o el límite del condensador (fig. 14.5), etc.

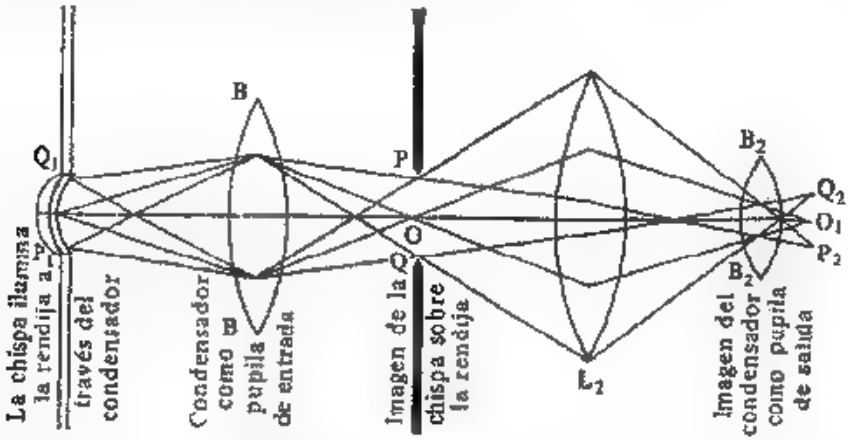


Fig. 14.5. El límite de la lente condensadora desempeña el papel de pupila de entrada del sistema.

Si el diafragma de apertura está delante del sistema, entonces coincide con la pupila de entrada, y la pupila de salida será su imagen en este sistema (fig. 14.5). Si el diafragma está detrás del sistema, entonces coincidirá con la pupila de salida, y la pupila de entrada será su imagen en el sistema. Si el diafragma de apertura BB está dentro del sistema (véase fig. 14.2), entonces su imagen B_1B_1 en la parte delantera del sistema servirá de pupila de entrada, y la imagen B_2B_2 en la parte posterior del sistema como la de salida. El ángulo, bajo el cual se ve el radio de la pupila de entrada desde el punto de intersección del eje con el plano objeto, se llama *«ángulo de apertura»*, y el ángulo bajo el cual se ve el radio de la pupila de salida desde el punto de intersección del eje con el plano imagen, es el ángulo *de proyección* o *ángulo de apertura de salida*.

§ 89. Diafragma del campo visual. Escotillas

El diafragma de apertura, y por lo tanto, las pupilas de entrada y de salida regulan el ancho (orificio) de los haces activos, es decir, influyen sobre la nitidez de la imagen y la luminosidad del instrumento. Sin embargo, *no de cualquier punto* del objeto los rayos que pasaron a través de la pupila de entrada, pasarán a través del sistema óptico y, por lo tanto, pueden no formar su imagen. En efecto, el haz proveniente del punto M (fig. 14.6) no toca completamente la lente anterior del sistema, y el punto M no formará imagen. El haz proveniente del punto N pasará parcialmente a través del sistema y dará imagen, pero la iluminación de ésta será disminuida, ya que parte del haz ha sido retenida por la montura L_1 de la lente (*viñetado*). En cambio, del punto Q a través del sistema pasará un haz del mismo ancho que del punto axial O.

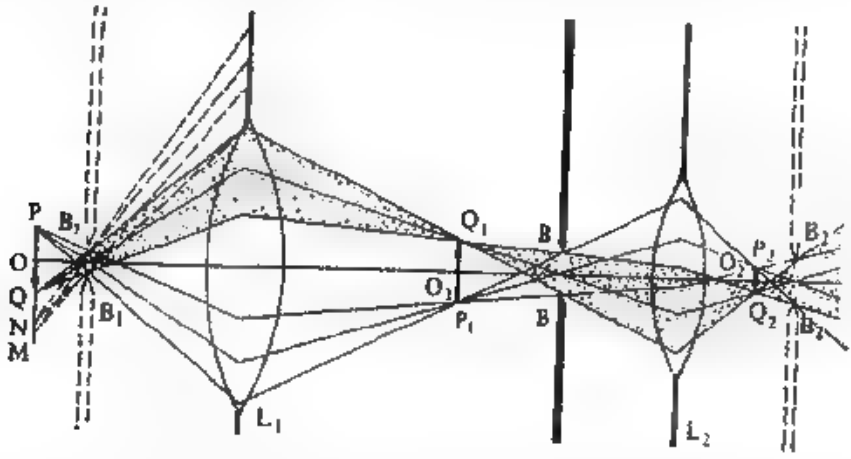


Fig. 14.6. Limitación de los haces de rayos procedentes de puntos que se encuentran fuera del eje del sistema.

En el caso examinado el campo visual del sistema estaba limitado por la montura L_1 de la lente anterior; en otros casos la limitación del campo visual es creada por otras partes del sistema o por un *diafragma* especial *del campo visual*. El campo visual es limitado por el contorno de la lente anterior o por el contorno de la imagen de alguno de los diafragmas en dependencia de cuál de ellos es visto desde el centro de la pupila de entrada bajo el menor ángulo. Este contorno, real o en forma de imagen, se llama *orificio de entrada* o *escotilla* (S_1S_1, en la fig. 14.7), y el diafragma, cuya imagen es este orificio servirá justamente como diafragma del campo visual (SS en la fig. 14.7).

La imagen de la escotilla de entrada en el sistema óptico se llama *escotilla de salida* (S_2S_2 en la fig. 14.7).

Los rayos que pasan a través del centro del diafragma de apertura llevan el nombre de *rayos principales*. El rayo principal pasa también a través de los centros de las pupilas de entrada y de salida, ya que estos puntos son conjugados del centro del diafragma de apertura.

El rayo principal es el eje del cono de los rayos, el cual se apoya en la pupila de entrada y tiene el vértice en el punto del objeto (región sombreada en la fig. 14.6). Si el rayo principal desde un punto (fuera del eje) del objeto roza el borde de la escotilla de entrada, entonces a través del sistema pasará aproximadamente la mitad de los rayos en comparación con el haz proveniente de un punto del eje. De la fig. 14.7. se ve que la escotilla de entrada S_1S_1 retiene todos los rayos provenientes del punto P, que en su ausencia pasarían a través de la mitad superior de la pupila de entrada B_1B_1.

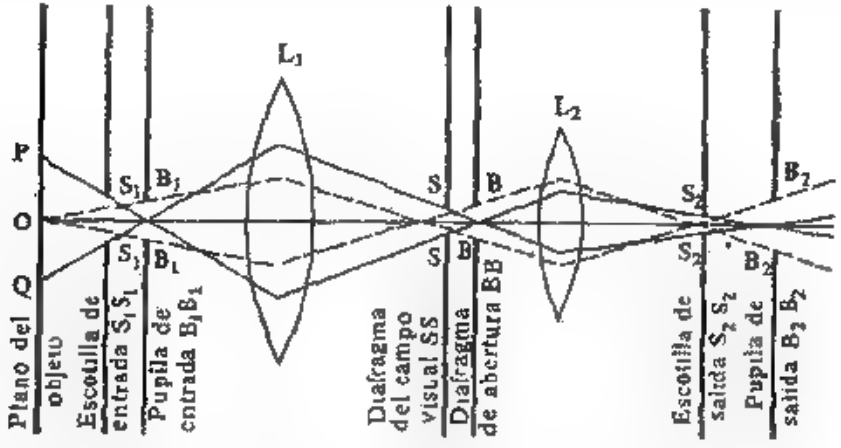


Fig. 14.7. Diafragma SS del campo de visión, escotilla de entrada S_1S_1 y de salida S_2S_2 del sistema.

Por eso la iluminación de la imagen del punto P será aproximadamente dos veces menor que la iluminación cerca de la imagen del punto axial. Por lo tanto, los rayos principales que tocan los bordes de la escotilla de entrada (en la fig. 14.7 ellos están representados con líneas gruesas) definen la magnitud del campo visual (PQ en la fig. 14.7).

Para una ostensible limitación del campo es necesario que S_1S_1 coincida con el plano objeto, es decir, que SS esté en el plano conjugado del objeto con respecto a L_1; en particular, para los anteojos destinados para la observación de objetos lejanos, SS debe estar en el plano focal principal del objetivo L_1.

Pasemos ahora al estudio de los instrumentos ópticos más im-

portantes. Se llama *instrumento óptico* la combinación de lentes, espejos, diafragmas y otras partes auxiliares, destinada para la solución de determinada tarea.

§ 90. Aparato fotográfico

El objetivo fotográfico y la cámara del aparato se construyen de tal manera, que se pueda obtener una imagen nítida de los objetos que se encuentran a una u otra distancia del objetivo, en el plano de la placa fotosensible o de la película. Para el enfoque se utilizan diferentes procedimientos (desplazamiento del objetivo o de sus diversas partes, desplazamiento de la película). La disminución del diafragma de apertura permite mejorar la «profundidad» del enfoque, es decir, obtener sobre un plano imágenes nítidas de las partes del objeto diferentemente alejadas (véase § 87). La variación del diafragma de apertura sirve al mismo tiempo para cambiar la cantidad de luz que entra en el aparato (luminosidad). Generalmente en el aparato fotográfico se obtiene una imagen disminuida del objeto; en los aparatos modernos se trata de obtener una buena nitidez para tener la posibilidad de aumentar posteriormente la fotografía.

Los objetivos se perfeccionan constantemente con el fin de asegurar buena calidad de la imagen y a la vez una suficiente luminosidad, es decir, la mayor *iluminación* posible de la imagen. Esta última es igual al flujo luminoso dividido entre el área de la imagen, es decir, para los objetos alejados es proporcional *al área* del diafragma de apertura dividida entre *el cuadrado* de la distancia focal del objetivo. Esta relación se llama *luminosidad* del objetivo. Con frecuencia llaman luminosidad a la relación del *diámetro* del diafragma máximo entre la distancia focal y se considera que la iluminación es proporcional al cuadrado de la luminosidad. Más correcto es llamar a esta relación como *apertura relativa*. De esta manera, la luminosidad se mide como el valor del cuadrado de la apertura relativa

§ 91. El ojo como sistema óptico

El ojo, según su estructura (fig. 14.8), es en cierto grado análogo al aparato fotográfico. El rol del objetivo lo juega un conjunto de medios refringentes compuestos del humor acuoso *A*, del cristalino *L*, y del humor vítreo *Q*.

El enfoque hacia los objetos diferentemente alejados o, simplemente, *acomodación* se logra gracias al esfuerzo muscular que cambia la curvatura del cristalino. Los límites de las distancias, hacia los cuales es posible la acomodación, llevan el nombre punto *alejado* y punto *próximo*. Para un ojo normal el punto alejado fijado sin esfuerzo está situado en el infinito y el próximo, a una distancia depen-

diente de la edad (desde 10 cm para las personas de 20 años y hasta 22 cm para las de 40 años). Para edades más avanzadas los límites de acomodación se reducen aún más (presbicia senil). Con frecuencia, se puede encontrar ojos con límites anormales de acomodación incluso en la juventud: miopía, para la que el punto alejado está a una distancia finita, a veces muy pequeña, y presbicia, con una distancia aumentada del punto próximo. Estos defectos pueden ser corregidos con ayuda de lentes adicionales divergentes o convergentes (gafas).

En la fig. 14.9 los lugares sombreados muestran cómo están dispuestas las regiones claramente diferenciadas por el ojo: en los límites de acomodación accesible a él, es decir, las regiones desde el punto próximo A_p hasta el punto alejado A_r. El ojo normal está en condiciones de acomodar la región desde $A_p = 10—22$ cm hasta el infinito. Para el ojo miope la región de acomodación es más cercana

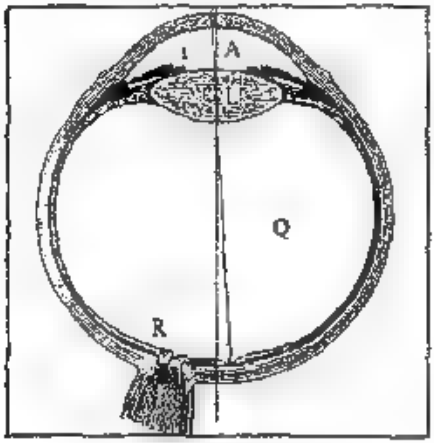


Fig. 14.8. Corte esquemático del ojo.

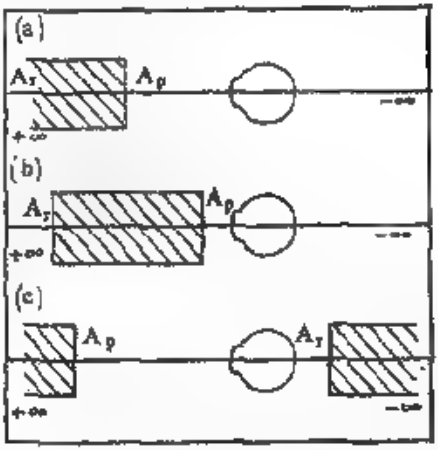


Fig. 14.9. Puntos próximos (A_p) y alejados (A_r) de acomodación para un ojo normal (a), para un ojo miope (b) y para un ojo présbita (c).

y está limitada en su límite lejano. Para el ojo présbita el comienzo de la región de acomodación está más alejado y el punto lejano se encuentra a una *distancia negativa*, es decir, detrás del ojo. Esto significa, que el ojo présbita es capaz de observar *puntos virtuales*, es decir, llevar a la retina no sólo haces paralelos sino también convergentes. De esta manera, la potencia del ojo miope es mayor y la del présbita menor que la del normal.

El diafragma de apertura es efectuado en el ojo por *el iris* i (véase fig. 14.8) que define «el color del ojo» y que posee orificio de magnitud variable (la pupila del ojo). La imagen de la pupila en la parte óptica anterior del ojo (cámara con humor acuoso) sirve de la pupila

de entrada, ella casi coincide con la pupila real. La variación del diámetro de la pupila juega el mismo rol que la variación del diafragma de apertura en el objetivo fotográfico regula el acceso de la luz al ojo y varía la profundidad del enfoque A la placa fotográfica del aparato le corresponde *la retina R* del ojo, cuya compleja estructura, al igual que sus funciones, será descrita más adelante (véase § 193).

Para muchos problemas puramente ópticos el sistema refringente del ojo puede ser sustituido *por el ojo reducido*, constituido por una sustancia transparente homogénea que tiene las siguientes constantes (según Gullstrand):

Poder refractor en dioptrías	58,48
Longitud del ojo	22 mm
Radio de curvatura de la superficie refringente	5,7 mm
Indice de refracción del medio	1,33
Radio de curvatura de la retina	9,7 mm

Debido a que la imagen en el ojo se obtiene dentro de un medio distinto del aire, las distancias focales anterior y posterior del ojo no son iguales entre sí (17,1 y 22,8 mm) y, por lo tanto, los puntos nodales del ojo no coinciden con los principales. Pero debido a la cercanía de todos estos puntos ellos pueden ser unidos prácticamente en *el centro óptico* del ojo.

Un ojo normal, en general, puede ser considerado como un sistema centrado de superficies de revolución. Hablando rigurosamente, esto no es un sistema perfecto, ya que en él se expresan claramente la aberración esférica, el astigmatismo de los haces oblicuos y una considerable aberración cromática. Sin embargo, todos estos defectos se perciben muy débilmente gracias a las particularidades del ojo. Así, por ejemplo, la aberración esférica no es muy notable, porque la distribución de la iluminación en las manchas de dispersión no es uniforme, y la parte de la mancha más clara y más importante para la sensación visual es muy pequeña; en el caso de una fuerte iluminación, cuando las partes laterales del pequeño círculo de dispersión podrían manifestarse, el diámetro de la pupila disminuye fuertemente, lo que mejora la situación. El astigmatismo de los haces oblicuos casi no es notable, ya que la capacidad de la retina hacia un buen discernimiento disminuye rápidamente del centro a los bordes; por eso la imagen de cada punto que se fija es llevado inconscientemente al eje del ojo, el cual pasa a través de la parte más útil de la retina (epequeño hoyo central», véase § 193). La insuficiencia del campo de visión de esta pequeña parte activa se compensa excelentemente por la movilidad del ojo La aberración cromática prácticamente no se nota, porque el ojo es sensible sólo a una parte relativamente angosta del espectro

La combinación de los factores indicados lleva a que el ojo normal permite juzgar bien acerca de la forma externa de los objetos. Sin

embargo, a consecuencia del carácter de la estructura de la retina compuesta por elementos, el ojo percibe dos puntos del objeto como algo único, si ellos están tan cerca que ambos forman su imagen en un mismo elemento de la retina (*cono*). De esta manera, el sector del objeto cuya imagen está dentro de los límites correspondientes a un elemento estructural de la retina es percibido como un punto (el llamado punto *fisiológico*), y no es posible ninguna clase de discernimiento de los detalles en los límites de este sector. El tamaño de este sector depende, por supuesto, de la distancia entre objeto y el ojo y puede ser definido con *el ángulo visual* que condiciona la correspondiente dimensión de la imagen (fig. 14.10), ya que el diámetro de la imagen $ab = \varphi h$, donde φ es el ángulo visual, h, la profundidad del ojo (desde el centro óptico O hasta la retina) que es igual a 15 mm para el ojo medio. El ángulo mínimo de visión nece-

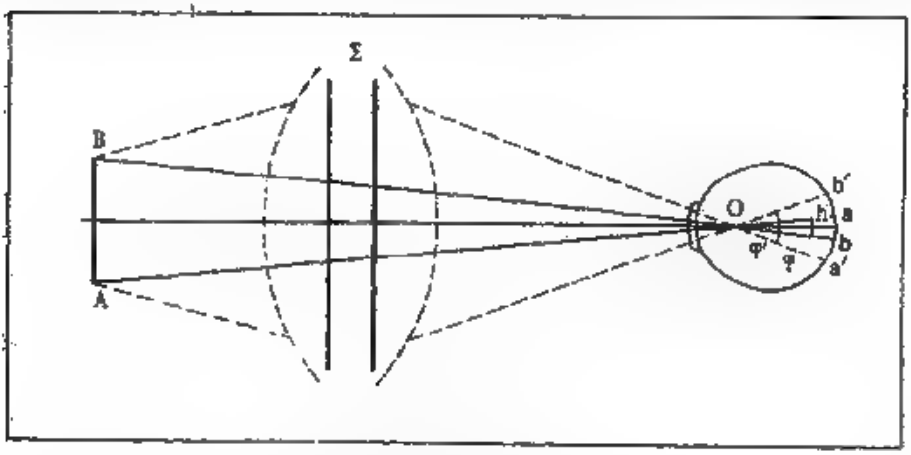


***Fig. 14.10.** Acción del sistema óptico sobre la dimensión angular aparente de la imagen.*

O es el centro óptico del ojo, h, la profundidad del ojo; AB, el objeto; ab, su imagen en el ojo; φ, el ángulo de visión del ojo; a'b', la imagen del objeto en el ojo dotado del sistema óptico Σ; φ' es el ángulo de visión del ojo dotado del sistema óptico.

sario para la diferenciación de los detalles se llama *ángulo fisiológico límite* y para el ojo descubierto es aproximadamente *igual a un minuto*. Sin embargo, tal valor del ángulo de separación de detalles a simple vista tiene lugar bajo la condición de que el objeto observado esté bien iluminado.

Generalmente la prueba del poder separador del ojo se realiza con ayuda de un objeto-test que posee la forma mostrada en la fig. 14.11, *a* (círculo de Landolt). Como ángulo de separación se considera aquel ángulo, bajo el cual la persona sometida a prueba ve la ruptura todavía claramente. Como unidad se toma la agudeza visual, a la que le corresponde un ángulo de separación de 1'. La

agudeza visual es igual a 1/2 si el mínimo ángulo discernible es igual a 2', etc. La dependencia del ángulo de separación de la iluminación del objeto-test para el ojo normal está citada en la tabla mostrada más abajo. De ella se ve que para una buena iluminación (más de 100 lx) la agudeza visual del ojo normal es un poco mayor que la unidad.

De esta manera, para iluminaciones débiles el poder separador del ojo puede ser inferior a 1' y puede alcanzar hasta 1°.

Acercando el objeto al ojo, disminuimos aquella parte del objeto que es cortada por el ángulo fisiológico límite, y por lo tanto, obtenemos la posibilidad de diferenciar detalles más pequeños. Sin em-

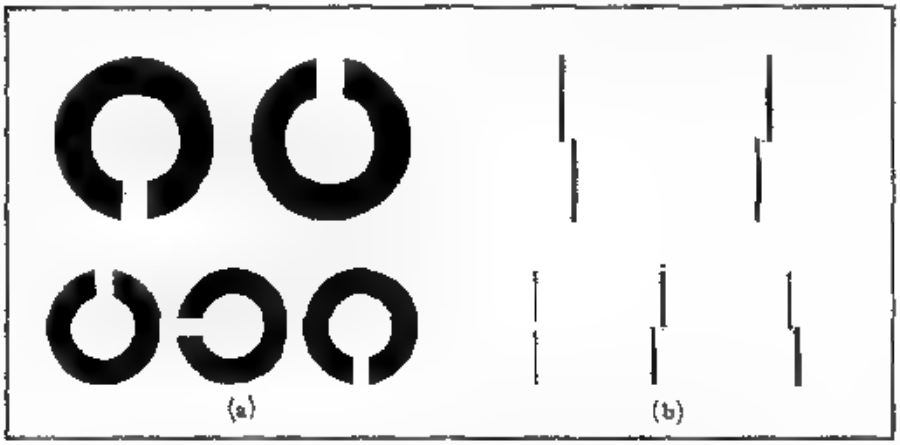


Fig. 14.11. Objetos-tests para investigar la agudeza de la visión.
a es el círculo de Landolt; b es un objeto para probar un elevado poder separador del ojo.

bargo, el acercamiento del objeto está limitado por la capacidad de acomodamiento, y para el ojo normal la distancia más cómoda resulta ser de 25 cm (*distancia de visión perfecta*) Haciendo esfuerzo un ojo normal de una persona joven puede observar un objeto también a a una distancia de hasta 10 cm. Un ojo miope admite la disminución de esta distancia y por eso puede diferenciar detalles más pequeños. El ojo présbita, en particular, de la gente de edad avanzada, tiene dificultades para diferenciar los detalles (por ejemplo, la lectura).

Un mejoramiento en el discernimiento de los detalles es posible alcanzar con ayuda de aparatos ópticos que dan conjuntamente con el ojo la imagen en la retina. La relación de las longitudes de esta imagen en la retina, en el caso del ojo con el instrumento óptico y a simple vista, se llama *aumento* aparente del instrumento óptico. De acuerdo con la fig. 14.10, aquél es igual a la razón $\operatorname{tg}\varphi'/\operatorname{tg}\varphi$, donde φ' y φ son respectivamente los ángulos de visión, bajo los cuales es visto el objeto a través del instrumento y sin él.

Tabla. Dependencia del ángulo de separación respecto a la iluminación para un ojo normal

Iluminación del fondo, lx	Ángulo de separación, ′	Iluminación del fondo, lx	Ángulo de separación, ′
0,0001	50	0,5	2
0,0005	30	1	1,5
0,001	17	5	1,2
0,005	11	10	0,9
0,01	9	100	0,8
0,05	4	500	0,7
0,1	3	1000	0,7

§ 92. Instrumentos ópticos que mejoran la visión

a. *La lupa* es un sistema óptico simple (una o varias lentes) con una pequeña distancia focal (aproximadamente desde 100 hasta 10 mm), dispuesto entre el objeto que se observa y el ojo. La imagen virtual aumentada se obtiene a la distancia de visión perfecta (250 mm para el ojo normal) o en el infinito, es decir, se observa por el ojo sin esfuerzo de acomodación. Para ambos métodos de utilización de lupa el aumento aparente producido por ella es prácticamente el mismo e igual a

$$\mathscr{M} = \operatorname{tg}\varphi'/\operatorname{tg}\varphi = D/f \qquad (92\,1)$$

(véase ejercicio 115), donde D es la distancia de visión perfecta y f, la distancia focal de la lupa. Debido a que $D = 250$ mm, generalmente se emplean lupas que dan un aumento desde 2,5 hasta 25 veces. Para el ojo miope D es menor y, por lo tanto, la lupa ofrecerá menos ayuda en el discernimiento de los detalles.

b. *Microscopio*. Para la obtención de grandes aumentos se utiliza el microscopio que en principio constituye una combinación de dos sistemas ópticos, el objetivo y el ocular, separados por una distancia considerable. Si las distancias focales del objetivo y del ocular son, respectivamente, f_1 y f_2, entonces la distancia focal de todo el sistema es $f = f_1 f_2/\Delta$, donde Δ es la distancia entre los focos de ambos sistemas (véase ejercicio 107). El aumento dado por el microscopio

$$\mathscr{M} = D/f = D\Delta/f_1 f_2, \qquad (92\,2)$$

puede ser muy considerable. Así, por ejemplo, para $f_1 = 2$ mm, $f_2 = 15$ mm, $\Delta = 160$ mm tenemos $f = 0{,}19$ mm y $\mathscr{M} = 1330$. Pero el aumento útil dado por el microscopio le imponen límite los fenó-

menos de difracción (véase cap. XV) y por eso el cálculo realizado tiene sólo un valor de orientación.

El esquema del sistema óptico del microscopio es mostrado en la fig 14.12. El pequeño objeto AB es colocado cerca del foco principal F_1 del objetivo S_1 que da su imagen real aumentada $A'B'$ la cual se observa a través del ocular S_2 de tal manera que la imagen virtual aumentada $A''B''$ se obtenga a la distancia de visión perfecta del ojo o en el infinito (observación con el ojo descansado). Ambos métodos de observación son igualmente útiles.

Desde el objeto la luz llega al objetivo en forma de *anchos* haces, lo que es importante para la utilización de grandes flujos luminosos y para el mejoramiento del poder separador del microscopio (véase cap. XV). Debido a que generalmente en el microscopio son observados objetos no autoluminosos, para la obtención de anchos haces

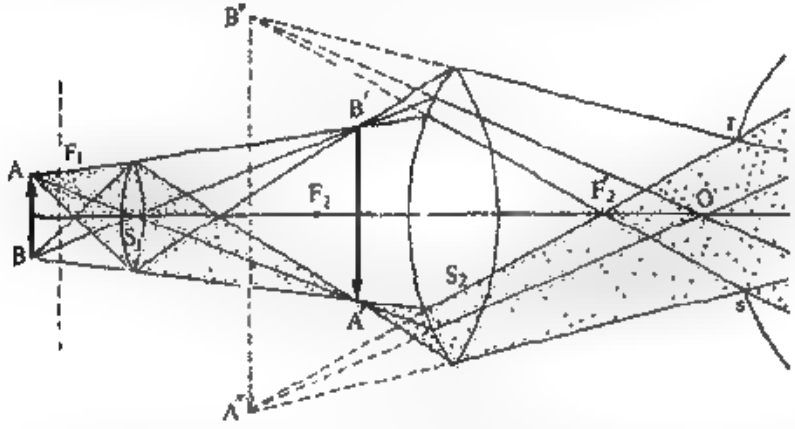


Fig. 14.12. Representación esquemática del recorrido de los rayos en el microscopio. S_1 es el objetivo; S_2, el ocular, AB, el objeto, $A''B'$, la imagen real dada por el objetivo; A_2B_2, la imagen virtual vista en el ocular.

es importante tener un mecanismo especial de iluminación (condensador). El objetivo del microscopio que opera con haces anchos debe satisfacer la condición de aplanatismo para un punto cercano al foco; se exige también una alta acromatización (objetivos acromáticos y apocromáticos). Un buen objetivo consta de muchas lentes (a veces más de 10).

En la fig. 14.13 se muestra el corte del condensador y el de un objetivo relativamente simple de un microscopio. La luz procedente de la preparación alcanza el objetivo pasando a través del cubreobjetos. Gracias al fenómeno de reflexión total interna, hasta el objetivo pueden llegar solamente aquellos rayos que forman dentro del

vidrio un cono con una apertura próxima a 42°. Este ángulo puede ser aumentado y, por lo tanto, también será aumentado el flujo luminoso que incide sobre el objetivo, si en lugar de objetivos secos se utilizan objetivos *de inmersión*, en los cuales el espacio entre el cubreobjetos y el objetivo es llenado de líquido, agua o aceite. Para los sistemas secos la presencia del cubreobjetos tiene un significado esencial también en el otro sentido, ya que el espesor del vidrio influye sobre la magnitud de la aberración esférica. Por eso todos los cálculos de los objetivos son hechos bajo la suposición de que el espesor del cubreobjetos es igual a 0,17 mm (0,15—0,20 mm). En todos los objetivos secos potentes, en la actualidad, se utiliza *la montura de corrección* que permite variar algo la distancia entre la lente superior e inferior del objetivo, lo que hace posible aniquilar la aberración esférica que aparece en el caso de un cubreobjetos de espesor no adecuado. En el caso de inmersión *homogénea*, cuando el cubreobjetos, el líquido de inmersión y la lente frontal del objetivo tienen igual índice de refracción, el espesor del cubreobjetos no tiene ninguna importancia, debido a que puede ser compensada con la variación del espesor de la capa de inmersión entre el cubreobjetos y el objetivo. Los sistemas de inmersión también tienen una gran importancia para el aumento del poder separador del microscopio (véase § 97).

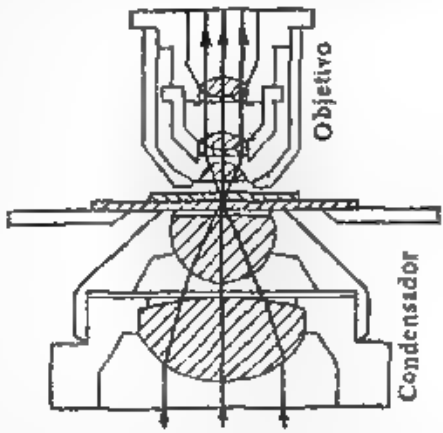


Fig. 14.13. Corte del condensador y de un simple objetivo del microscopio.

El ocular opera con haces estrechos, pero al mismo tiempo obligado a trabajar también con haces oblicuos. Por eso en el ocular tratan de corregir el astigmatismo, la curvatura del campo y la aberración cromática (véase § 86). El objetivo y el ocular del microscopio se hacen recambiables, de manera que se pueda utilizar sus diferentes combinaciones en dependencia de la tarea planteada. El soporte macizo y los dispositivos hechos cuidadosamente para el desplazamiento de las partes movibles del microscopio constituyen la parte esencial de los aparatos buenos.

c. *Anteojos.* Los anteojos (telescopios) ayudan al ojo en la observación de los detalles de un objeto lejano. Ellos también están compuestos (fig. 14.14) del objetivo L_1 y del ocular L_2; la imagen real (disminuida e invertida) del objeto lejano, dada por el objetivo, se observa en el ocular como en la lupa. En dependencia de la distancia entre el objeto y el objetivo, la imagen se obtendrá en el plano fo-

cal posterior del objetivo o un poco más adelante. De acuerdo con esto, será necesario desplazar el ocular (enfoque).

En la fig. 14.14, φ es el ángulo visual, bajo el cual se ve el objeto lejano; φ' es el ángulo visual bajo el cual se ve la imagen. Efectivamente, sobre el ojo inciden haces paralelos, y los ejes de los haces que van desde los bordes de la imagen forman el ángulo $\varphi' = bO'a$, ya que a y b están en el plano focal del ocular.

El aumento del sistema, como se ve de la fig. 14.14, es

$$\mathscr{M} = \operatorname{tg} 1/2\varphi'/\operatorname{tg} 1/2\varphi = f_1/f_2, \qquad (92.3)$$

es decir, es igual a la relación de las distancias focales del objetivo y del ocular.

El ojo normal en estado de reposo percibe los rayos paralelos (divisa un punto infinitamente alejado); por eso el plano focal ante-

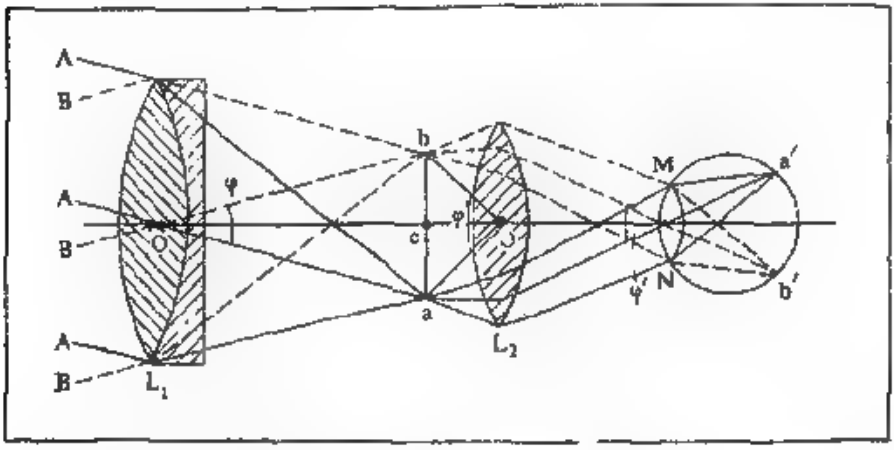


Fig. 14.14. Representación esquemática del recorrido de los rayos en el anteojo. La línea continua representa los rayos procedentes del borde superior (punto A) del objeto alejado; la línea punteada, los rayos del borde inferior (punto B). $Oa = f_1$ es la distancia focal del objetivo L_1, $cO' = f_2$ es la distancia focal del ocular L_2. MN es la pupila del ojo acomodado al infinito.

rior del ocular deberá coincidir con la imagen del objeto. En particular, si el objeto está infinitamente alejado, el foco posterior del objetivo se le hace coincidir con el foco del ocular (sistema telescópico) (fig. 14.15). La figura muestra que el aumento del sistema telescópico también se puede expresar como la relación de los diámetros de las secciones de los haces que entran en el objetivo y que salen del ocular, es decir, como la relación de los diámetros de las pupilas de entrada y de salida del sistema D_1/D_2 (véase también el ejercicio 110).

La imagen dada por el objetivo es invertida. El ocular, en algunos casos, deja invertida la imagen (anteojo astronómico), en otros, la

invierte otra vez, dando a fin de cuentas una imagen derecha. La obtención de una imagen derecha, importante para las observaciones en la Tierra, se logra con diferentes métodos (mecanismo del ocular, prismas complementariamente invertidores, o sea gemelos prismáticos). Para cada anteojo real es importante establecer la disposición de los diafragmas y monturas que definen el diafragma de apertura (pupilas de entrada y de salida) y el diafragma del campo visual.

Debido a que los anteojos de cualquier tipo están destinados, antes que todo, a ayudar al ojo, la pupila de salida de éstos no debe sobrepasar las dimensiones de la pupila del ojo. En caso contrario, parte del flujo luminoso que sale del anteojo será retenida por el iris y no participará en la construcción de la imagen. Esto significa que las zonas externas del objetivo dejarán de funcionar, además como diafragma activo de apertura servirá la pupila del ojo del observador. De esta manera, para un empleo correcto de toda la superficie del objetivo es necesario concordar el ocular escogido para él, y por lo tanto, también el aumento del anteojo, de tal manera que la pupila de salida tenga las dimensiones necesarias. En las observaciones nocturnas la pupila del ojo no sobrepasa 6—8 mm; en una buena iluminación diurna ella es igual aproximadamente a 2—3 mm.

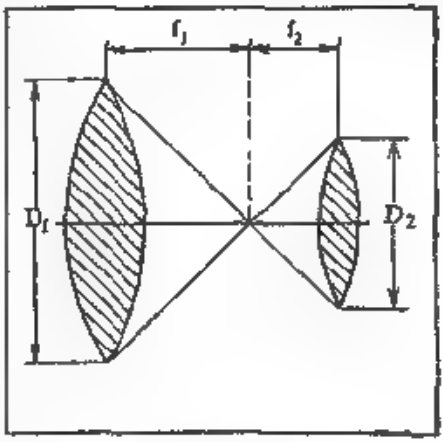


Fig. 14.15. Recorrido de los rayos en el sistema telescópico.

El aumento del sistema $\mathscr{M} = \varphi'/\varphi = f_1/f_2 = D_1/D_2$.

Debido a que el aumento es igual a $\mathscr{M} = D_1/D_2$, el aumento *mínimo* que es racional utilizar para el empleo completo del diámetro del anteojo, se define en dependencia de la destinación de los anteojos (observación diurna o nocturna) y de las dimensiones del objetivo. Así, por ejemplo, para los anteojos con un objetivo $D = 50$ mm el aumento en las observaciones nocturnas debe ser no menor de 7—8 veces ($\mathscr{M} = 50/7$), y para las diurnas, no menor de 20 veces ($\mathscr{M} = 50/2{,}5$). Para un telescopio grande ($D = 500$ mm) el aumento mínimo debe estar en los límites desde 75 (observaciones estelares) hasta 200 (observaciones solares). También resulta dañino el empleo de aumentos muy grandes, ya que cuando la pupila de salida del instrumento se torna menor que la pupila del ojo, disminuye de un modo considerable iluminación de la imagen sobre la retina. El discernimiento de los detalles no mejorará, por cuanto con el aumento de las dimensiones de la imagen en la retina crece también la anchura

de la distribución de difracción en la imagen de cada punto del objeto (compare con § 96).

Como límite inferior del diámetro de la pupila de salida puede considerarse el valor próximo a 1 mm. De acuerdo con esto el aumento útil *máximo* del anteojo con un objetivo de 50 mm será próximo a 50, y para el anteojo con un objetivo de medio metro será alrededor de 500. De esta manera, para cada diámetro del objetivo de anteojo se puede indicar un diapasón relativamente limitado de aumentos racionales que deben ser obtenidos con la elección adecuada de los oculares.

Los anteojos están ampliamente difundidos y son confeccionados en variantes muy diversas, desde los gemelos de diversos tipos hasta los telescopios astronómicos. Principal atención en la corrección de los objetivos de estos instrumentos está concentrada en corregir las aberraciones cromática y esférica y en cumplir con la condición de los senos, lo que se puede lograr utilizando sistemas de dos lentes (véase § 62). Entre otras cosas, los anteojos modernos frecuentemente se hacen con objetivos más complejos que permiten ver claramente vastos sectores del horizonte. Los oculares de anteojos deben poseer un considerable ángulo visual (desde 40° hasta 70°) y, por lo tanto, en ellos se tienen que eliminar el astigmatismo de los haces oblicuos, la curvatura del campo y el cromatismo. Por eso los oculares siempre se confeccionan compuestos, por lo menos de dos lentes.

Los anteojos destinados para las observaciones astronómicas (telescopios) deben cumplir una serie de requisitos mucho más altos. Para asegurar el aumento máximo con una dimensión admisible de la pupila de salida y, por lo tanto, para un buen discernimiento de los detalles, es necesario, como veremos, utilizar telescopios con diámetro de objetivo lo más grande posible (compare con § 96). El mismo requisito se plantea también en el caso de observación de estrellas muy débiles (véase § 95). Los anteojos más potentes en la actualidad son *los reflectores*, es decir, telescopios con objetivo de reflexión. El primer telescopio de reflexión fue construido por Newton (año 1672), el cual recurrió a los espejos al suponer que los objetivos de lentes inevitablemente experimentan aberración cromática. Se sabe que la conclusión de Newton era errónea (véase § 86) y es posible la construcción de objetivos acromáticos. En la actualidad se dispone de *refractores* de la más alta calidad; sin embargo, desde el punto de vista técnico, es más fácil confeccionar un espejo de gran diámetro que un disco homogéneo de vidrio que sea útil para la confección de un objetivo grande de lentes. Por eso, a pesar de que el requisito de exactitud en la confección de la superficie reflectora es casi cuatro veces mayor que para la refringente, la producción de objetivos especulares muy grandes resulta una tarea mucho más fácil. Así, por ejemplo, en la actualidad existe un reflector con un diámetro del espejo próximo a 5 m (observatorio de Monte Palomar) y se construyó

un reflector con diámetro de 6 m (URSS), mientras que el diámetro del objetivo del más grande de los refractores existentes alcanza solamente 1 m.

El esquema del refractor en principio es el mismo que el mostrado en la fig. 14.14.

El esquema del reflector del tipo más simple en la forma, en la cual fue propuesta por Newton, es representado en la fig. 14.16. B es el espejo reflector. El espejo plano inclinador S sirve para tener la posibilidad de instalar el ocular y la cabeza del observador fuera del haz principal y no introducir una diafragmación demasiado grande. Para los enormes reflectores modernos la colocación del observador completamente dentro del anteojo traería consigo un apantallado relativamente pequeño y completamente admisible. Sin embargo, las corrientes térmicas provenientes del cuerpo del observador en

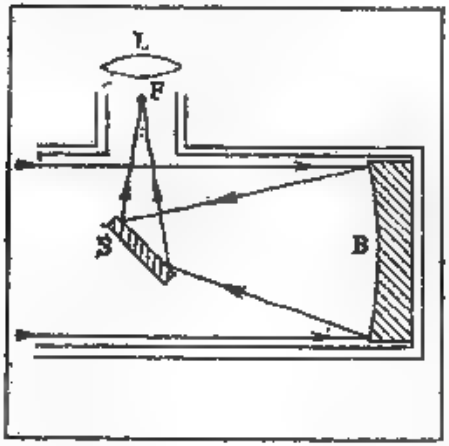


Fig. 14.16. Esquema del reflector de Newton

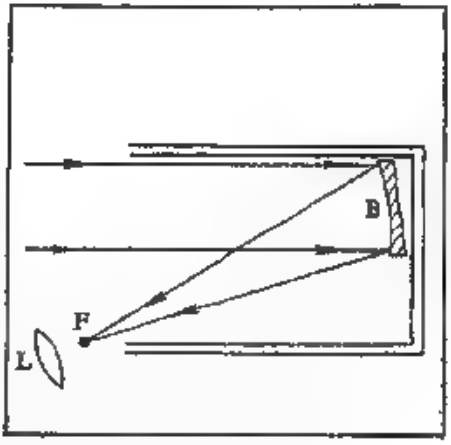


Fig. 14.17. Esquema del reflector de Lomonósov—Herschel.

la región del recorrido principal de los rayos luminosos llevarían a una fuerte disminución de la calidad de imagen. Por eso se conserva el espejo inclinador.

En la fig. 14.17 está representado el esquema del telescopio de reflexión (reflector) inventado por Lomonósov y más tarde construido también por Herschel. Una particularidad característica de este sistema consiste en la ausencia del espejo auxiliar S (lo que era esencialmente importante, debido a que en aquellos tiempos aún no sabían hacer buenos espejos) y la inclinación del espejo reflector B que permite eliminar los impedimentos del apantallado en el camino principal de los rayos. La necesidad de trabajar con haces inclinados respecto al eje lleva al empeoramiento de la calidad de las imágenes en estos reflectores.

A pesar de que los reflectores están exentos de la aberración cromática, en los espejos esféricos la aberración esférica constituye un defecto muy considerable. Por eso en los buenos reflectores se tiene que utilizar espejos asféricos, por ejemplo, en forma de paraboloide de revolución, que desde el punto de vista técnico son más difíciles de confeccionar. Generalmente se utilizan sistemas complejos formados por dos espejos no planos esféricos (principal y secundario), parecidos a los representados en la fig. 14.18 (sistema de Cassegrain). El perfeccionamiento posterior de tales reflectores puede ser obtenido gracias a la mutua compensación de las aberraciones introducidas por cada uno de los espejos.

De esta manera, utilizando espejos elípticos y hiperbólicos, se logra crear sistemas, en los cuales es corregida no sólo la aberración

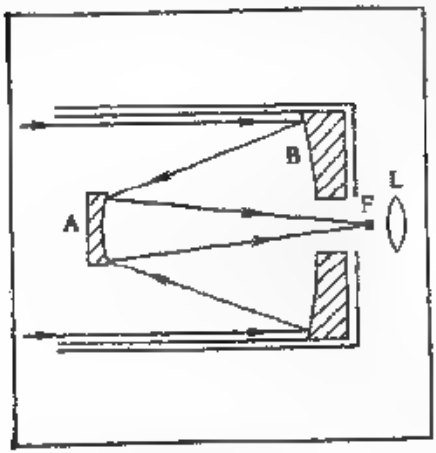


Fig. 14.18. Esquema del reflector de Cassegrain

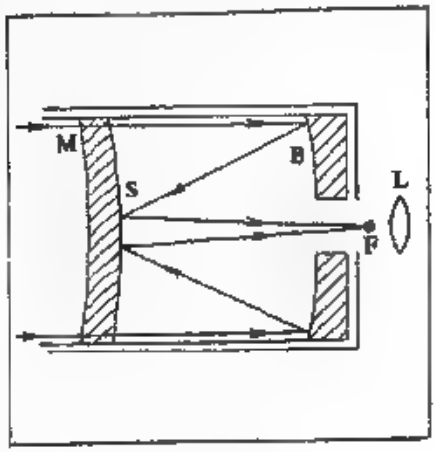


Fig. 14.19. Esquema de uno de los telescopios de menisco de D. D. Maksutov.

esférica sino también la coma. Siguiendo este camino, por lo visto, se podrá obtener los telescopios gigantes más perfectos.

Una solución bastante exitosa en la tarea de la obtención de sistemas excelentes, desde el punto de vista óptico, y relativamente no caros, son los sistemas combinados, donde la óptica especular se combina con la de lentes, produciendo una eliminación bastante completa de un conjunto de aberraciones dañinas. Los sistemas más perfeccionados de este tipo son los sistemas de meniscos de D. D. Maksutov (fig. 14.19), donde el espejo esférico reflector B se combina con el menisco M (véase § 77) que también es limitado por superficies esféricas. Utilizando un menisco debidamente calculado, de tal manera que sus aberraciones compensen las aberraciones del espejo, se logra obtener un sistema, las aberraciones principales del cual son muchas

veces menores que las correspondientes aberraciones de sistema de lentes de la misma apertura relativa. Así, por ejemplo, según los datos de D. D Maksutov, para una apertura relativa de 1 . 5 en el sistema de meniscos la aberración esférica es 11 veces menor; el coma, 11 veces; la aberración esferocromática, 124 veces, el espectro secundario, 640 veces y el cromatismo del aumento, 3,8 veces menores, que en el objetivo equivalente de lentes Estas enormes ventajas en la unión con relativa facilidad de cálculo y confección (¡superficies esféricas!) hacen que los sistemas de meniscos son un alcance notable en la optotecnia. Utilizando este principio se puede construir cualquier tipo de reflector aún más perfecto Por ejemplo, en la fig. 14.19 se ilustra la realización de un telescopio del tipo de Cassegrain según el principio de Maksutov Según este mismo principio en la actualidad se construyen tanto excelentes .nstrumentos astronómicos, como simples aparatos de uso diario (gemelos, objetivos fotográficos, etc.)

§ 93. Instrumentos de proyección

Los instrumentos ópticos, estudiados en el parágrafo anterior, están destinados a ayudar al ojo y dan imágenes *virtuales*, las cuales pueden ser observadas por un solo observador que mira a través del ocular (observación subjetiva). Otro tipo de aparatos da una imagen real enviada a la pantalla que puede ser vista simultáneamente por todo el auditorio (observación objet va). Estos últimos llevan el nombre de instrumentos *de proyección*; son ampliamente propagados en la actualidad (linterna de proyección, aparato cinematográfico)

Los sistemas de proyección están destinados para dar una imagen real aumentada del objeto luminoso o iluminado. Para esto este último se coloca cerca del plano focal principal del objetivo de proyección, el cual puede desplazarse para lograr un enfoque nítido. La más difundida es la proyección de diapositivas o de un plano, cuyas dimensiones generalmente son mayores que las dimensiones del objetivo de proyección. Este último debe ser corregido por las aberraciones cromática y esférica, por el astigmatismo y la curvatura del campo. Un buen objetivo de proyección es casi igual, según sus características, al objetivo fotográfico.

Para obtener aumentos grandes es muy importante emplear bien el flujo luminoso que llega del objeto, ya que él debe distribuirse en la superficie grande de la imagen aumentada. Debido a que las dimensiones del objeto son considerables, resulta necesaria una especial instalación de iluminación que permita enviar toda la luz que sale del objeto al objetivo de proyección relativamente pequeño. Esto se logra con ayuda del condensador C de pequeña distancia focal y de grandes dimensiones dispuesto, como se muestra en la fig. 14.20, de manera que la luz procedente de él converja en la pupila de entrada del objetivo de proyección O. Debido a que, por otro lado, la distan-

cia desde el objetivo hasta el objeto *D* debe corresponder a un enfoque nítido, el condensador y el objetivo deben concordar el uno con el otro.

Los objetivos modernos de gran luminosidad hicieron posible también la proyección cómoda de objetos no transparentes (*epiproyección*). En este caso el objeto (el plano) es intensamente iluminado lateralmente con ayuda de lámparas y espejos, y el objetivo de gran luminosidad proyecta el objeto iluminado sobre la pantalla. En muchos aparatos se combina el mecanismo para la proyección de objetos transparentes (día) y no transparentes (epi). Los aparatos de este tipo se llaman *epidiascopios*.

Para la proyección de objetos microscópicos se utiliza un microscopio, cuyo ocular ha sido reemplazado por un mecanismo especial de proyección; se puede también obtener una imagen real en la pan-

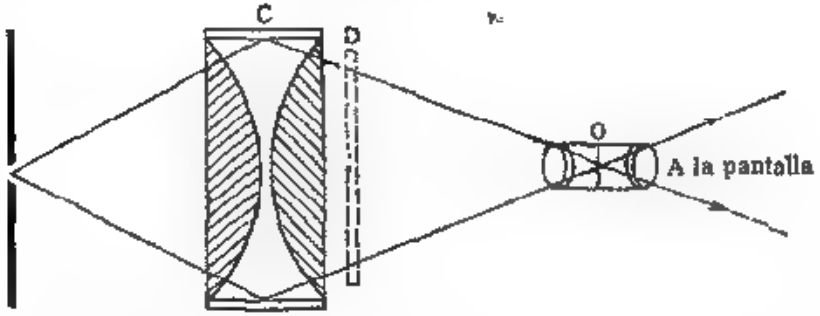


Fig. 14.20. Representación esquemática del recorrido de los rayos en un dispositivo de proyección.

El condensador C proyecta la fuente de luz en la pupila de entrada del objetivo O. El objetivo O proyecta la diapositiva Q sobre la pantalla alejada.

talla con un ocular ordinario desplazado debidamente, o sin éste.

La dificultad principal en la microproyección con aumento grande consiste en la insuficiencia de la iluminación de la imagen. A pesar de una serie de perfeccionamientos en los mecanismos de iluminación, la aplicación de la microproyección en auditorios grandes hasta el momento no tiene mucho éxito.

§ 94. Aparatos espectrales

Entre los instrumentos ópticos un lugar un tanto particular ocupan los aparatos espectrales que no son destinados para la obtención de la imagen de un objeto luminoso, sino para la investigación de la composición espectral de la luz enviada por él. De acuerdo con esto,

la parte esencial del aparato espectral es un dispositivo para la descomposición de la luz según las longitudes de onda. Este papel es realizado por el prisma hecho de un material de gran poder dispersivo, por la red de difracción o algún otro aparato de interferencia. Estos últimos sirven para un análisis detallado de la luz muy cercana a la monocromática, ya que la región de dispersión de estos aparatos es muy limitada. Por eso comúnmente son usados junto con aparatos prismáticos o aparatos espectrales de difracción que son los instrumentos más difundidos de este género.

La estructura esquemática del espectrógrafo de prisma es mostrada en la fig. 14.21. La obtención de un espectro puro es posible, si el aparato asegura la imagen de un objeto luminoso muy estrecho, de tal manera que incluso las imágenes cercanas por su longitud de

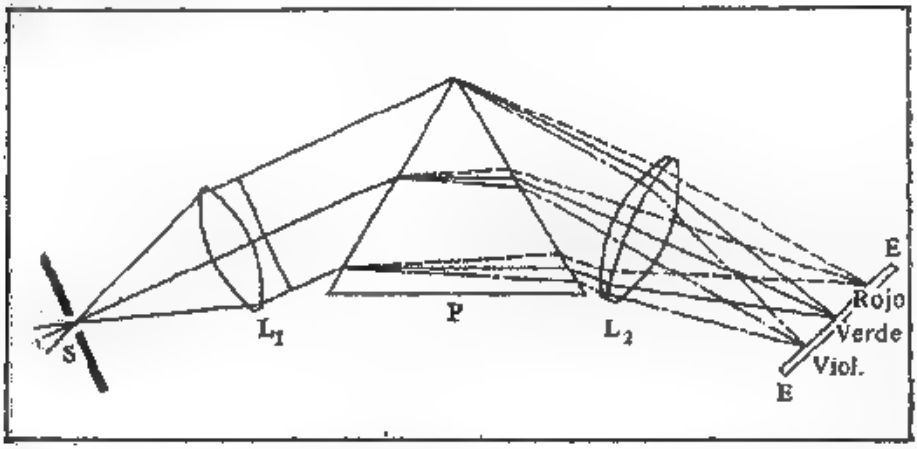


Fig. 14.21. Representación esquemática del recorrido de los rayos en el espectrógrafo.
S es la rendija; L_1, el objetivo del colimador; P, el prisma; L_2, el objetivo de la cámara, EE, la placa fotográfica

onda no se sobrepongan unas sobre otras. Por eso la parte esencial del aparato es la rendija S que consta de dos cuchillas que pueden ser acercadas y separadas con ayuda de un tornillo. El ancho efectivo de la rendija varía desde algunas milésimas hasta algunas décimas de milímetro; para fines especiales también se utilizan rendijas más anchas.

El sistema de objetivos y de prismas da nítida imagen de la rendija en el plano EE, donde se coloca la placa fotográfica. Debido a que la luz proveniente de la rendija debe pasar a través del prisma, entonces para evitar el astigmatismo se hace paralelo el haz de los rayos incidentes sobre él (véase § 84). Para este fin se utiliza el anteojo anterior (colimador), donde la rendija S es dispuesta en el plano focal

de la lente L_1. Debido a que la rendija tiene pequeñas dimensiones (algunas centésimas de milímetro de ancho y 3—4 mm de altura) y que se coloca en el eje del objetivo L_1, este último debe estar corregido sobre todo por las aberraciones esférica y cromática, para asegurar el paralelismo de los haces de diferentes longitudes de onda. Por eso generalmente el objetivo del colimador es confeccionado en forma de una lente acromática pegada.

Los haces paralelos que salen del prisma para distintas longitudes de onda tienen diferente dirección, formando algunos grados entre sí en dependencia del material de los prismas y del número de ellos. Sin embargo, inclusive para una dispersión considerable la diferencia de las direcciones no llega a sobrepasar algunos grados. Por eso el objetivo de la cámara puede tener un pequeño campo visual, en cambio en los aparatos modernos con frecuencia se exigen objetivos con aperturas relativas grandes *). Ellos deben estar corregidos por la aberración esférica y el coma. La corrección por la aberración cromática no es obligatoria, ya que los rayos de diferentes longitudes de onda dan la imagen en distintos puntos de la placa. Por eso la nitidez de la imagen para diferentes longitudes de onda se logra con la correspondiente inclinación de la placa. Sin embargo, es preferible calcular el sistema de tal modo que se obtenga el espectro situado en un solo plano. En caso contrario la placa fotográfica deberá ser curvada debidamente, lo que se logra con ayuda de un chasis de forma especial.

Las dimensiones de los objetivos se escogen de acuerdo con las del prisma, de manera que no se diafragmen los haces de diferentes direcciones que corresponden a distintas longitudes de onda. Al aumentar las dimensiones del prisma no solo aumenta la cantidad de luz que ingresa al aparato (luminosidad del aparato), sino que aumenta también su poder separador, es decir la posibilidad de discernir cercanas longitudes de onda (véase § 100).

El haz paralelo procedente del centro de la rendija que se encuentra en el eje óptico del colimador tiene como plano de incidencia la sección principal del prisma, los haces procedentes de otros puntos de la rendija inciden bajo un ángulo sobre la sección principal y allí se refractan tanto más fuertemente, cuanto más alejado del centro esté el punto correspondiente de la rendija. Por eso una rendija rectilínea tiene su imagen en forma de un arco con la parte convexa hacia el extremo rojo del espectro. Esta *curvatura* de las líneas espectrales es mas considerable cuanto más alta sea la rendija y más corto el foco del objetivo del colimador.

En los aparatos destinados para la luz visible como material de los prismas (y de las lentes) se utiliza un vidrio con gran dispersión (flint), en los aparatos para la luz ultravioleta, cuarzo o silvina (para

*) Existen espectrógrafos, el objetivo de los cuales tiene una apertura relativa de 1 : 0,7 con un diámetro próximo a 15 cm.

$\lambda > 200$ nm) y fluorita (para $\lambda < 200$ nm). La óptica de los espectrógrafos infrarrojos se hace de sal gema o de silvina, así como de cuarzo, fluorita y otros materiales especiales.

El ángulo entre la dirección de los rayos de diferentes longitudes de onda (dispersión angular $\Delta\varphi/\Delta\lambda$) se define por el número de prismas, su material y por la magnitud de los ángulos refringentes. Algunos de los prismas están descritos en el § 86. La dispersión en el prisma depende también de su posición en el haz paralelo de rayos. La dispersión aumenta fuertemente, si el ángulo de incidencia de los rayos se torna menor que el que corresponde a la posición de mínima desviación (véase § 86). Sin embargo, en esta posición el ancho del haz emergente se vuelve considerablemente menor que el ancho del incidente y el prisma se comportará como un sistema telescópico que da aumento (véase ejercicio 111). Esta circunstancia repercute en forma desventajosa sobre la luminosidad del aparato espectral. Pero, gracias al considerable aumento de la dispersión angular en esta disposición de los prismas se puede utilizar objetivos de cámaras con pequeña distancia focal y, por lo tanto, de más luminosidad. Por eso tales sistemas se utilizan a veces (V. M. Chulanovski), aunque en la mayoría de los espectrógrafos el prisma es colocado en la mínima desviación. La distancia en la placa entre las líneas de diferente longitud de onda (dispersión lineal $\Delta l/\Delta\lambda$) depende de la distancia focal f' del objetivo de la cámara:

$$\frac{\Delta l}{\Delta\lambda} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda} f'. \qquad (94.1)$$

La magnitud de la imagen de la rendija en la placa fotográfica depende de las distancias focales de los objetivos del colimador f y de la cámara f'. Sea que la rendija tiene un ancho b y una altura h, y su imagen respectivamente b' y h'. No es difícil ver que para la posición de los prismas en la mínima desviación

$b' = bf'/f$ y $h' = hf'/f$.

La relación de las áreas de la rendija S y de su imagen S' en el caso de mínima desviación y para la luz monocromática es igual a

$$S/S' = f^2/f'^2. \qquad (94.2)$$

Esta relación es importante en el cálculo de la luminosidad del espectrógrafo, la cual resulta menor cuanto mayor sea f'^2 (véase ejercicio 135).

De este modo, el crecimiento de la distancia focal del objetivo de cámara (f'), al disminuir la luminosidad del espectrógrafo, aumenta al mismo tiempo su dispersión lineal. Esta última circunstancia puede ser muy útil, ya que a consecuencia de la estructura granulosa de las emulsiones fotográficas la posición cercana de las imágenes de dos líneas en la placa fotográfica dificulta el discernimiento de ellas.

Para la mejor utilización de la luz en el aparato, frecuentemente entre la rendija y la fuente de luz colocan una lente auxiliar (conden-

sador) para que la luz *ocupe* todo el objetivo del colimador. El aumento de la dimensión del condensador, con el fin de que a apertura del haz emergente de él sobrepase la apertura del colimador, es inútil desde el punto de vista de la utilización del flujo luminoso, sin embargo, cierto sobreaumento ofrece determinadas ventajas, ya que permite obtener condiciones de iluminación que admiten más fácilmente el análisis teórico (disminución de. grado de coherancia de la iluminación, véase § 22). En el caso de grandes dimensiones lineales de la fuente de luz, dispuesta a una distancia adecuada de la rendija, el sobreaumento necesario del colimador se realiza en forma puramente geométrica, sin ayuda del condensador. Pero también en estos casos, al igual que para pequeñas dimensiones de la fuente, con frecuencia se utilizan condensadores de una estructura más compleja, para lograr separar determinada parte de la fuente de lux y asegurar la uniformidad de la iluminación de la rendija y la uniformidad de la iluminación de la imagen (eliminación del viñetado, véase § 89).

§ 95. Percepción de la luz. "Anteojo videonocturno" de M. V. Lomonósov

Veamos ahora cómo reaccionan ante la lux nuestros aparatos receptores y cuál es el rol de los instrumentos ópticos en la percepción de la luz

La percepción luminosa del ojo es ocasionada por la excitación del nervio visual que es provocada por la iluminación de la retina del ojo. Debido a que los diferentes elementos de la retina reaccionan a la excitación de manera independiente, el aumento de la superficie iluminada de la retina no intensifica la excitación luminosa de los diferentes elementos, sino que se manifiesta como aumento del campo iluminado. Por eso la sensación de la lux se definirá por la *iluminación* de la retina, es decir por la magnitud de flujo luminoso que llega a la unidad de superficie de la retina. En este sentido el ojo es semejante al aparato fotográfico, donde también el ennegrecimiento de la placa en cada lugar dado depende de su iluminación, y la amplificación de las dimensiones de la parte iluminada sólo aumenta el campo de la imagen*).

Sin embargo a diferencia del ojo la placa fotográfica *integra* el flujo luminoso con respecto al tiempo, de manera que la prolongación del tiempo de exposición lleva al aumento del ennegrecimiento en cada sector de la placa; gracias a esto la placa fotográfica puede ser

*) Pero existen observaciones que muestran que para una iluminación constante de la retina la sensación luminosa depende en ciertos límites de la dimensión de la imagen, alcanzando el máximo en el caso de una dimensión angular de la imagen aproximadamente de 5—7'. Este fenómeno aún no ha podido ser explicado y, posiblemente, está relacionado con las particularidades fisiológicas del ojo.

utilizada para la registración de flujos extremadamente débiles, si se les obliga a actuar el tiempo suficiente. Al contrario, la duración de la acción luminosa no aumenta, en general, la percepción luminosa del ojo y si la iluminación de la retina es tan pequeña, que no sentimos la luz (inferior al umbral de excitación), entonces la prolongación de la excitación no cambiará nada. Pero el factor tiempo juega cierto rol en la percepción visual en lo que se refiere a la capacidad del ojo de adaptarse a los cambios en la iluminación (adaptación) y a otros procesos fisiológicos (véase § 193).

La célula fotoeléctrica, a diferencia del ojo y de la placa fotográfica, nó reacciona a la iluminación de la superficie sensible, sino al flujo luminoso ya que la corriente fotoeléctrica, es decir, el número de electrones liberados en unidad de tiempo por la acción de la luz es proporcional a la cantidad de energía luminosa absorbida en un segundo por toda la superficie iluminada. Por eso la sensibilidad de la celula fotoeléctrica generalmente se expresa en microamperios por lumen. La célula fotoeléctrica puede trabajar también como un aparato que integra la acción luminosa con respecto al tiempo, si se mide la cantidad de cargas que han sido desprendidas (electrómetro con capacidad); pero si se mide la corriente eléctrica aparecida (galvanómetro), entonces la integración con respecto al tiempo no tiene lugar.

De acuerdo con la diferencia indicada los aparatos enumerados responden de diferente manera al acercamiento del objeto luminoso. En el caso de la célula fotoeléctrica el acercamiento de la superficie luminosa aumenta el flujo luminoso y, por lo tanto, intensifica la acción. Pero para el ojo y la cámara fotográfica sucede lo distinto, ya que al suceder esto varía no sólo el flujo, sino también la dimensión de la imagen.

Sea PQ (fig. 14 22) la superficie luminosa percibida por la cámara o el ojo, O, el centro óptico del sistema, $P'Q'$, la imagen, $r = OM \approx \approx OP \approx OQ$, la distancia hasta el objeto, $ON = h$, la distancia hasta la imagen (profundidad de la cámara o del ojo). Designemos mediante S el área de la pupila de entrada del sistema (diafragma del objetivo o pupila del ojo), mediante σ, el área PQ y σ', el área $P'Q'$. No es difícil ver que

$$\sigma' \approx \sigma \cos\varphi \frac{h^2}{r^2}.$$

Si la luminancia de la superficie luminosa es B (para simplificar, supongamos que la superficie satisface la ley de Lambert, es decir, B no depende de la dirección), entonces el flujo, que ingresa al sistema, es igual a

$$\Phi = B\sigma \cos\varphi \cdot \Omega = B\sigma \cos\varphi \frac{S}{r^2}, \qquad (95\ 1)$$

ya que el ángulo sólido del flujo enviado al sistema es

$$\Omega = S/r^2.$$

De esta manera, la iluminación de la placa fotográfica (de la retina) es igual a

$$E = \Phi/\sigma' = BS/h^2. \qquad (95.2)$$

Como vemos, para dada magnitud de S/h^2 la iluminación es proporcional a la luminancia de la fuente. Para el ojo, de esta manera, la percepción luminosa no depende de la distancia, ya que h prácticamente no varía con el cambio de r. Así, por ejemplo, al observar un conjunto de faroles a lo largo de una larga calle, nosotros según la sensación visual los calificamos de manera correcta como igualmente luminosos a pesar de la diferencia en el alejamiento de ellos (por supuesto, en el caso de una atmósfera completamente transparente) (véase ejercicio 10). Para la cámara fotográfica esto también es válido, sólo si el objeto no se acerca tanto, que se tiene que aumentar h.

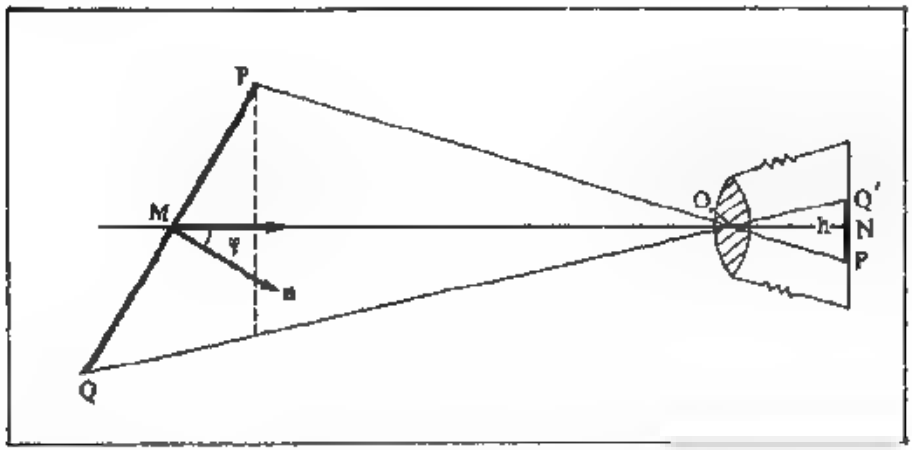


Fig. 14.22. Deducción de la dependencia de la iluminación de la imagen con respecto a la luminancia del objeto y a los parámetros del sistema óptico.

Para los objetos alejados k es prácticamente igual a la distancia focal f del objetivo. De este modo, la iluminación en la cámara fotográfica es proporcional a la luminosidad del objetivo $(D/f)^2$. La relación $E = BS/h^2$ muestra por qué en la observación (en la toma de fotografías) de objetos de poca luminancia nosotros anchamos la pupila del ojo (o aumentamos el diafragma de apertura del objetivo).

Debido a que la iluminación de la retina es proporcional a la luminosidad del objeto, la observación de objetos demasiado brillantes puede ocasionar enfermedades. La investigación muestra que el límite superior de luminancia, que puede soportar sin dolor el ojo, es próximo a $16 \cdot 10^4$ cd/m^2. Por lo tanto, la observación de la espiral de la lámpara es superior a las fuerzas del ojo. Si esta espiral está incluida

emisor-campana mate, entonces el mismo (prácticamente) flujo será enviado por una superficie mucho más grande y la luminancia disminuirá fuertemente. De esta manera, una de las tareas perseguidas por las diversas armaduras de iluminación (véase también § 7) consiste en la disminución de la luminosidad de las fuentes de luz sin un debilitamiento notable del flujo luminoso y, por lo tanto, de la iluminación de los objetos.

Cuando son observados objetos muy lejanos, la dimensión de la imagen de ellos decrece hasta el valor límite que está condicionado por el poder separador del ojo. En este caso la iluminación media ya no se definirá por la luminosidad del objeto. Debido a que la dimensión de la imagen es constante, la iluminación es proporcional al flujo que ingresa al ojo, y este último depende de la intensidad luminosa de la fuente y de su distancia hasta el ojo. Por esto, por ejemplo, las estrellas, cuyo diámetro angular es menor que un segundo, no ejercen una acción cegadora, a pesar de que su verdadera luminosidad frecuentemente es mayor que la luminosidad del Sol, la acción cegadora del cual es enorme debido a su notable diámetro angular (32′) que sobrepasa considerablemente el límite separador del ojo (cerca de 1′).

Utilizando un instrumento óptico, nosotros sustituimos el objeto por su imagen, la cual a fin de cuentas es también observada por el ojo o acciona sobre algún otro receptor. Para determinar la luminosidad de esta imagen es necesario calcular el flujo luminoso procedente de ella, el área de la imagen y la magnitud del ángulo sólido que limita el haz.

Sea que la fuente, cuya luminancia B no depende de la dirección, forma su imagen sin deformación (aplanáticamente, compare con § 85) con ayuda de algún sistema óptico (fig. 14.23). Hallaremos la luminancia B' de la imagen.

Designemos mediante y, σ y u_0 las dimensiones lineales, el área y la apertura de la fuente, y mediante y', σ' u_0', las dimensiones, el área y la apertura de la imagen; σ es proporcional a y^2, y σ', a y'^2. Para calcular el flujo total que va desde la fuente calculemos el flujo a través del ángulo sólido elemental $d\Omega$ e integrémoslo por toda la apertura. Es fácil ver (compárese § 7) que $d\Omega = \operatorname{sen} u\, du\, d\theta$, donde u es el ángulo entre el eje del haz elemental y el eje del sistema, y θ el ángulo azimutal (alrededor del eje del sistema). Debido a que u al mismo tiempo es el ángulo del haz elemental con la normal al área σ, el flujo elemental proveniente de σ es $d\Phi = B\sigma \cos u\, d\Omega = B\sigma \cos u \operatorname{sen} u\, du\, d\theta$ (compare con § 7), y el flujo total en los límites de la apertura u_0 es

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{u_0} B\sigma \cos u \operatorname{sen} u\, du = \pi B\sigma \operatorname{sen}^2 u_0$$

De manera análoga, el flujo procedente de la imagen es igual a

$\Phi' = \pi B' \sigma' \operatorname{sen}^2 u'_0$.

La condición de aplanatismo (condición de los senos) es

$ny \operatorname{sen} u_0 = n'y' \operatorname{sen} u'_0$

o bien

$n^2\sigma \operatorname{sen}^2 u_0 = n'^2\sigma' \operatorname{sen}^2 u'_0$,

donde n y n' son los índices de refracción de los medios, en los cuales se encuentran la fuente y la imagen. Despreciando las pérdidas en el sistema, tenemos

$\Phi = \Phi'$

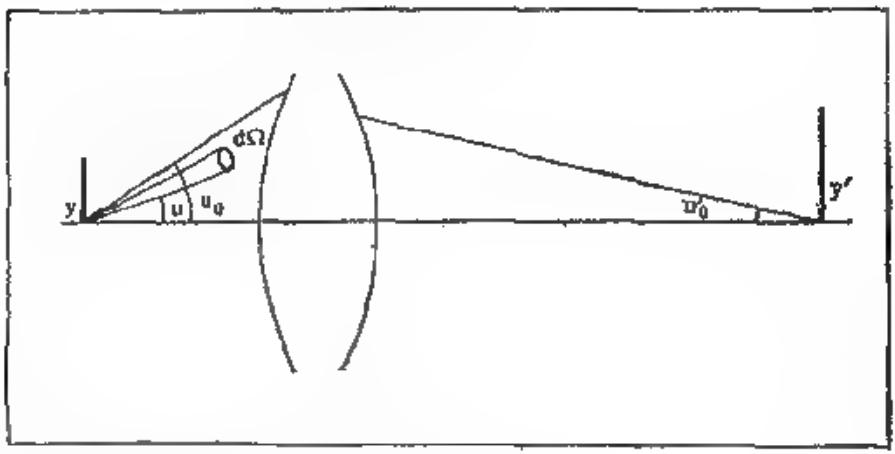


Fig. 14.23. Cálculo de la luminancia de la imagen en el sistema óptico

De esta manera, obtendremos en definitiva:

$B' = Bn'^2/n^2$.

Si $n = n'$, es decir si la fuente y la imagen se encuentran en un mismo medio, por ejemplo en el aire, entonces

$B' = B$.

De esta manera, en la formación de la imagen en cualquier sistema la luminancia de la imagen es igual a la luminancia de la fuente, si se desprecian las pérdidas en la reflexión y absorción en el sistema y si la imagen se obtiene en el mismo medio, en el cual está dispuesta la fuente.

El resultado señalado es consecuencia del hecho de que el sistema óptico, al disminuir las dimensiones de la imagen, al mismo tiempo aumenta el ángulo sólido, dentro del cual está dirigido el flujo luminoso (véase § 79). Así, al observar un objeto a través de un sistema óptico no ganamos nada en luminancia. Sin embargo, esto es válido sólo para la observación de objetos que sobrepasan por sus dimensiones el límite separador del instrumento. En caso contrario la imagen de magnitud invariable que es formada en la retina del ojo complementado con algún instrumento, obtendrá tanto más flujo luminoso cuanto mayor sea el diámetro del objetivo. De este modo, en un telescopio grande se pueden observar estrellas que son inaccesibles al ojo descubierto, ya que ellas no se ven en el fondo del firmamento. En la observación con ayuda del telescopio la luminancia del firmamento, como objeto extendido, se mantiene invariable (si despreciamos las pérdidas en el instrumento), mientras que la luminancia de la imagen de la estrella (iluminación del lugar correspondiente en la retina) crecerá tantas veces como es la relación entre el área del objetivo y la de la pupila, es decir varios miles de veces. Aunque el sistema óptico no aumenta la luminancia de la imagen él puede cambiar considerablemente su *iluminación*, concentrando el flujo que ingresa al sistema en un área mayor o menor de la imagen. De aquí se ve la importancia de los objetivos fotográficos de gran luminosidad en la toma de fotografías de objetos de poca luminancia (véase ejercicio 135).

También es necesario hacer notar que el peligro de ceguera al observar una fuente luminosa (el Sol) en el anteojo aumenta fuertemente, a pesar de que la luminancia de la imagen puede sólo disminuir. La causa yace en que, cuanto mayor sea el área de la retina, que se somete a la acción cegadora, más considerable es su destrucción, ya que el organismo no tiene tiempo para neutralizar esta acción destructiva.

De esta manera, el sistema óptico no puede aumentar la luminancia de un objeto extendido y prácticamente siempre la disminuye un poco a consecuencia de las inevitables pérdidas en la reflexión de la luz en las superficies de las lentes y en la absorción en el vidrio. Sin embargo, el sistema óptico puede resultar útil para *mejorar la visibilidad* de los objetos en el caso de una débil iluminación ya que ofrece la posibilidad de un mejor discernimiento de los detalles. Como se indicaba en el § 91 el poder separador del ojo se empeora en el caso de débiles iluminaciones. En condiciones nocturnas cuando la iluminación se reduce hasta diezmilésimas de lux, el poder separador del ojo varía aproximadamente desde la magnitud de 1′ hasta 1°, aun cuando la iluminación del objeto es unas diez veces mayor que la iluminación del fondo. En tales condiciones el aumento del ángulo de visión que es logrado por el anteojo, constituye una ventaja muy grande para la distinción del contorno y de los detalles grandes del

objeto que son prácticamente indistinguibles para el ojo solo. Justamente en este sentido los anteojos y los gemelos resultan útiles en las condiciones nocturnas, lo que por primera vez fue tomado en consideración por M. V. Lomonósov, el cual en el año 1756, construyó el primer «anteojo videonocturno».

Los anteojos destinados para las observaciones nocturnas deben poseer un aumento lo más alto posible y al mismo tiempo utilizar todo el haz luminoso que incide sobre ellos. Por eso en ellos deben ser reducidas al máximo las pérdidas en la reflexión (pequeño número de superficies reflectoras u óptica clarificada (véase § 135). Para que todo el haz luminoso ingrese al ojo la pupila de salida del anteojo no debe sobrepasar la pupila del ojo (6—8 mm). Se puede asegurar un aumento máximo con las dimensiones más grandes posibles del objetivo, cuando la pupila de salida todavía responde a la pupila del ojo (véase § 92).

15. TEORIA DE DIFRACCION DE LOS INSTRUMENTOS ÓPTICOS

La imagen dada por cualquier sistema óptico es resultado de la interferencia, ya que todas las leyes de la óptica de rayos (propagación rectilínea, refracción, reflexión) son, a fin de cuentas, leyes que se desprenden de la interferencia mutua de las diferentes partes de la onda luminosa. Nosotros utilizamos esta consideración, por ejemplo, al deducir la condición de los senos (véase § 85). Por eso la teoría completa de la imagen óptica, y por lo tanto, también la teoría de los instrumentos ópticos de cualquier tipo, deberá ser una teoría de interferencia. En particular, la difracción de onda luminosa, vinculada con la limitación del cono de rayos, que es cortado por la pupila de entrada (los bordes de las lentes, de los espejos y diafragmas, que componen el sistema óptico) lleva a la violación del carácter estigmático de las imágenes. Estos fenómenos de difracción hacen que no puede existir un estigmatismo ideal: la imagen del punto es un círculo de difracción y esta circunstancia limita la posibilidad de discernimiento de los detalles más finos de la imagen. De esta manera, el problema acerca del límite de discernimiento de los detalles de la imagen (poder separador del instrumento óptico) es un problema para la solución del cual es necesario estudiar los procesos de difracción en el sistema óptico.

§ 96. Poder separador del objetivo

Sea que sobre el objetivo del anteojo o del aparato fotográfico incide una onda plana procedente de una fuente infinitamente alejada de luz, por ejemplo de una estrella. La difracción en los bordes de la

montura circular que limita la apertura del anteojo lleva a que en el plano focal del objetivo se obtenga no una imagen estigmática simple del punto, sino una distribución más compleja de iluminación: el máximo central, la intensidad del cual decrece rápidamente se convierte en un anillo oscuro, el segundo máximo anular más débil, etc. (véase § 42, fig. 9.7, *b*). El radio del primer anillo obscuro limita un ángulo φ (con el vértice en el centro del objetivo). La magnitud de este ángulo se determina de la condición

$$D \operatorname{sen} \varphi = 1{,}22\lambda, \qquad (96.1)$$

si la luz incidente es monocromática y tiene una longitud de onda λ, y D es el diámetro del objetivo. En el caso de luz blanca el cuadro será una superposición de tales imágenes monocromáticas.

El radio r del primer anillo obscuro en el plano focal es $r = f \operatorname{tg} \varphi$, donde f es la distancia focal del objetivo. Debido a que el ángulo φ es pequeño, $r = 1{,}22f\lambda/D$, es decir, será menor cuanto mayor sea el diámetro del objetivo*).

Si el objetivo está dirigido hacia dos estrellas lejanas S_1 y S_2 separadas por una distancia angular φ, entonces cada una de ellas dará en el plano focal pequeños círculos de difracción con centros en los puntos que corresponden a las imágenes S_1 y S_2 (fig. 15.1, *a*).

Debido a que las fuentes S_1 y S_2 emiten una radiación incoherente, el cuadro visto por el observador, constituye simplemente la superposición de anillos brillantes y oscuros de ambos círculos. Si los centros de los círculos están cercanos y los radios de los círculos son considerables, entonces el sistema de anillos superpuestos puede no dar la impresión de dos imágenes separadas: el objetivo no está en condiciones de discernir (separar) dos puntos luminosos. El grado de superposición mutua, que impide el discernimiento de los detalles, depende de la sensibilidad del ojo o de la placa fotográfica a los contrastes, es decir constituye una magnitud un tanto imprecisa. Según Rayleigh para evitar esta incertidumbre se toma como límite de separación tal posición, en la cual el primer anillo obscuro de un círculo pase a través del centro brillante del segundo (véase también § 50). En este caso las ordenadas de las curvas que dan la distribución de la iluminación (fig. 15.1, *b*), en el punto de su intersección constituyen menos de 0,4 de la ordenada en los máximos, de manera que en la curva resultante la ordenada del lugar más hondo de la cavidad es el 75 % de la ordenada de los máximos**). El ojo normal o la placa fotográfica generalmente están en condiciones de descubrir la hondura, inclusive si ella se diferencia del máximo menos que en el 25 %.

*) Lo expuesto se refiere a un objetivo delgado. En caso general es necesario hablar no del objetivo, sino de su pupila de salida.

**) Si son iguales las intensidades de las fuentes S_1 y S_2 y para una montura circular del objetivo.

En la disposición que corresponde al criterio de Rayleigh, el radio angular φ del primer anillo obscuro es igual a la distancia angular ψ entre las estrellas. De esta manera, la distancia angular discernible se define de la condición

$$\operatorname{sen}\psi = \operatorname{sen}\varphi = 1{,}22\lambda/D = 0{,}61\lambda/R, \tag{96.2}$$

es decir, es menor, cuanto mayor sea el diámetro (o radio) del objetivo. Debido a que generalmente el ángulo φ (y ψ) es pequeño, se puede escribir

$$\psi = \varphi = 0{,}61\lambda/R. \tag{96.3}$$

La magnitud inversa al ángulo límite se llama *poder separador*

$$\mathcal{A} = 1/\psi = R/0{,}61\lambda. \tag{96.4}$$

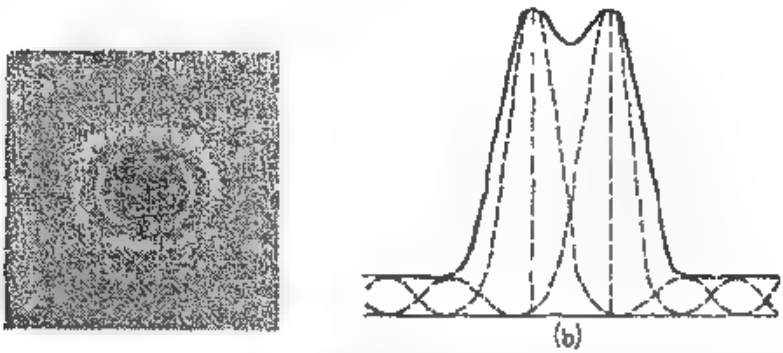


Fig. 15.1. a) Aspecto general del cuadro de difracción, cuando se observan dos estrellas lejanas que se encuentran a una pequeña distancia angular b) Límite de separación en el caso de la obtención de la imagen de dos puntos (criterio de Rayleigh).

De manera análoga, una fuente pequeña cuya dimensión angular es igual (o menor) a ψ, que es definido por la última relación, se presenta ante el observador como un punto, es decir se observa a través del anteojo un cuadro que prácticamente no depende de la forma de la fuente y que es cercano al cuadro provocado por un punto luminoso. De esta manera, el poder separador del objetivo es tanto mayor, cuanto mayor sea su diámetro.

El poder separador del ojo también es limitado por los fenómenos de difracción y está ligado a las dimensiones de la pupila. En una buena iluminación el diámetro de la pupila se hace aproximadamente igual a 2 mm, a lo que corresponde de acuerdo con (96.3) un ángulo

límite de separación próximo a 1'. Esto concuerda con aquella magnitud de separación, que está condicionada por la estructura de la retina (véase § 91). En una iluminación pobre la pupila del ojo aumenta (hasta 8 mm), sin embargo en este caso se manifiestan más agudamente los defectos del ojo como sistema óptico, de tal manera que el mejoramiento de las condiciones de discernimiento relacionado con el aumento del diámetro del sistema, no se revela. Además, como fue mencionado en el § 91, el poder separador del ojo en el caso de una iluminación débil disminuye como consecuencia de causas fisiológicas.

§ 97. Poder separador del microscopio

La difracción aparecida a consecuencia de la limitación del haz de rayos también tiene lugar en el microscopio y de igual manera produce la limitación de su poder separador. Para el microscopio generalmente su capacidad al discernimiento de los detalles se expresa no con la magnitud del ángulo, sino con las dimensiones *lineales* del detalle más pequeño discernible o con la mínima distancia entre dos puntos distinguibles con ayuda del microscopio. En el caso cuando dos de estos puntos emiten ondas no coherentes (puntos autoluminosos) la tarea es completamente análoga a la estudiada en el parágrafo anterior.

Al igual que en el caso de anteojos (telescopio) a nosotros nos interesa el cuadro de difracción en el plano imagen del objeto. Es fácil ver que para este plano siempre son aplicables las fórmulas de la difracción de Fraunhofer, si por el ángulo de difracción se comprende el ángulo, bajo el cual se ve el punto del plano imagen desde el centro del diafragma de apertura (véase § 39 y ejercicio 119). Además, es necesario tener presente que el plano $E'E'$ de la imagen del objeto (fig. 15.2) está a una distancia (cerca de 160 mm) muchísimo mayor que el diámetro del objetivo (o del diafragma de apertura) y por eso el ángulo u' puede considerarse pequeño.

La distancia mínima entre los dos puntos autoluminosos M y N (emisores de radiación no coherente), que es discernible por el microscopio, se halla de la condición, de que los centros de los dos cuadros independientes de difracción que se obtienen en el plano imagen $E'E'$ resulten separados por una distancia que satisfaga la condición de Rayleigh, es decir $\varepsilon' = M'N'$ es igual al radio del primer anillo oscuro de difracción que rodea la imagen M' o N'. Los correspondientes cuadros de difracción se obtienen como resultado de la difracción de Fraunhofer en la apertura circular del diafragma AA'. Por esto el radio *angular* φ del primer anillo oscuro se determina de la condición

$$AA' \operatorname{sen} \varphi = 1{,}22\lambda, \quad \text{ó} \quad \varphi = \frac{1{,}22\lambda}{AA'}$$

(ya que φ es pequeño), en donde AA' es el diámetro del diafragma de apertura. El radio *lineal* del primer anillo oscuro es igual a $\varphi\, BM'$, donde BM' es la distancia desde el diafragma hasta el plano EE.

De esta manera, la condición de separación tendrá la forma

$$\varepsilon' = \varphi\, BM' = 1{,}22\lambda\, BM'/AA'.$$

De la fig. 15.2 se ve que

$$\frac{AA'}{BM'} = 2u',$$

ya que el ángulo u' es pequeño. De esta manera, $\varepsilon' = 0{,}61\lambda/u'$, es decir

$$\varepsilon' u' = 0{,}61\lambda. \qquad (97.1)$$

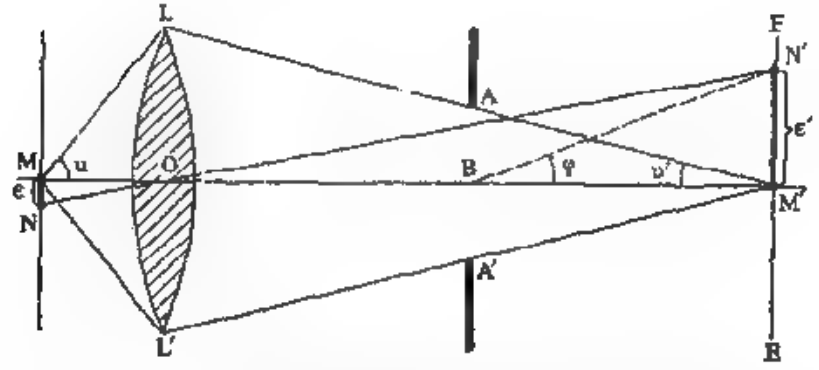


Fig. 15.2. Cálculo del poder separador del microscopio.
LL' es el objetivo; AA', su diafragma de apertura. En la figura la escala ha sido alterada: la distancia OM' es aproximadamente 100 veces mayor que LL' (o que AA').

Para hallar la relación entre ε' y ε recordemos que para la formación de una imagen correcta de un elemento con ayuda del microscopio debe cumplirse la condición de los senos (véase § 85). De esta manera

$$n \operatorname{sen} u = \varepsilon' n' \operatorname{sen} u'. \qquad (97.2)$$

El índice de refracción n' del medio en el espacio imagen es igual a la unidad, ya que la imagen está situada en el aire; n puede ser incluso mayor que la unidad, ya que el espacio entre el objeto y el objetivo frecuentemente está lleno de alguna substancia (inmersión). A pesar de que el ángulo u puede ser considerable, el ángulo u' es muy pequeño, puesto que $OM' \gg OL$, de tal manera que $u' \approx$

u son u'. De (97.1) y (97.2) tenemos:

$$\varphi = u'/n \operatorname{sen} u' = 0{,}61\lambda/n \operatorname{sen} u.$$

Por lo tanto, el poder separador del microscopio es tanto mayor cuanto mayor sea el valor $n \operatorname{sen} u$. Esta última magnitud recibió la denominación de *apertura numérica* del objetivo y generalmente se designa por A.

Nosotros hallamos la expresión para el poder separador del microscopio a partir de la suposición de que los puntos del objeto envían ondas *no coherentes* (objeto autoluminoso), de modo que los cuadros de difracción simplemente se montan uno sobre el otro. Sin embargo en el microscopio generalmente no se observan objetos autoluminosos sino *iluminados*. Esto significa que los diferentes puntos del objeto provocan la difusión de las ondas incidentes, que proceden de un mismo punto de la fuente, y por lo tanto, la luz que llega de distintos puntos del objeto resulta *coherente*. Nuestra deducción del poder separador del microscopio no es aplicable de manera inmediata a este caso mucho más difundido (véase ejercicio 120). Abbe indicó un método bastante interesante para la determinación del poder separador en el caso de objetos iluminados y halló que en ese caso dado éste también se define por la apertura numérica de objetivo. El método de observación de Abbe consiste en lo siguiente.

La luz que ilumina el objeto incide sobre la lente del microscopio, experimentando difusión (difracción) por los detalles del objeto de manera que la estructura del haz luminoso depende de este objeto. Para simplificar veamos el caso cuando la iluminación se realizada por un haz paralelo (difracción de Fraunhofer) y el objeto tiene una forma simple*), por ejemplo, constituye una red perfecta, es decir una sucesión de pequeñas franjas transparentes separadas por otras no transparentes. Precisamente el período d de la red es en este caso una característica del detalle, mientras que el poder separador del microscopio define la posibilidad de diferenciar una red más o menos menuda con ayuda del microscopio, es decir, el valor mínimo de d.

La difracción del haz paralelo en la estructura observada da en el plano focal FF del objetivo (fig. 15.3) una serie de máximos principales, las distancias angulares entre los cuales dependen del período de la red. Si los haces incidentes son normales a la superficie del objeto y están dirigidos a lo largo del eje del sistema, entonces la posición de estos máximos se obtiene de la condición $d \operatorname{sen} \varphi = m\lambda_0$, donde m es el número entero que define el orden de los máximos. En el eje del microscopio se encuentra el máximo nulo A_0 ($m = 0$), los máximos de primer orden A_1 y A_1 se encuentran en las direcciones determinadas de la relación son $\varphi_1 = \pm\lambda_0/d$, los máximos de segundo orden A_2

*) Todas las deducciones obtenidas con tales objetos simples, pueden ser trasladadas también a objetos de cualquier tipo, utilizando las consideraciones expuestas en los §§ 52, 53.

y A_2' en las direcciones determinadas de la relación son $\varphi_2 = \pm 2\lambda_0 / d$ y así sucesivamente. Debido a que todos estos máximos de difracción responden a rayos coherentes, detrás del plano focal del objetivo estos rayos al encontrarse deberán interferir entre sí dando en el plano P_2P_2, que es conjugado del plano del objeto P_1P_1 con respecto al objetivo OO, la imagen del mismo objeto. De esta manera tanto el conjunto de máximos de difracción en el plano FF, como el cuadro resultante, dado por el objetivo en el plano P_2P_2, dependen del objeto y sirven como su imagen.

Abbe le da el nombre de *imagen primaria* al cuadro en el plano focal del objetivo y de *imagen secundaria* del objeto al cuadro en el plano P_2P_2. A veces el cuadro en FF lo llaman *espectro* (por analogía con la aplicación habitual de las redes o estructuras), y el cuadro en P_2P_2, simplemente *imagen* del objeto.

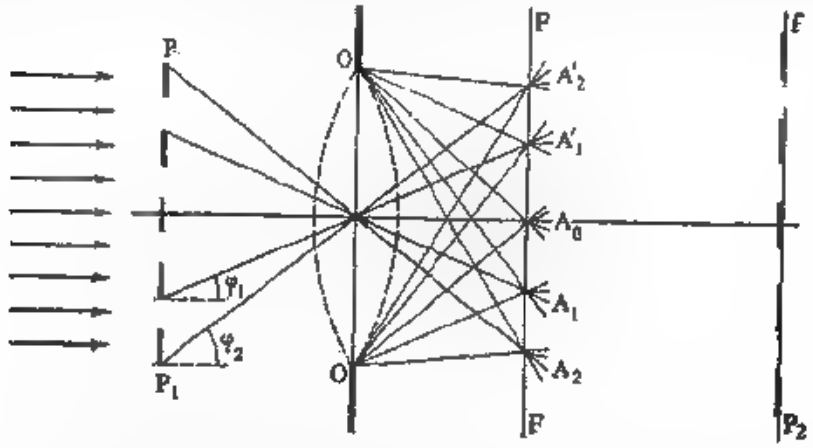


Fig. 16.3. Teoría de difracción del microscopio de Abbe.

La escala de la figura ha sido alterada: la distancia desde FF hasta P_2P_2 es considerablemente mayor que la distancia focal del objetivo.

No es difícil ver que para obtener una imagen correcta del objeto es necesario que la imagen en el plano P_2P_2 se forme como resultado de la interacción de los rayos que vienen desde *todos* los máximos A_1, A_1', A_2, A_2', etc. En efecto, supongamos que algún obstáculo retuvo todos los rayos procedentes de A_1', A_1, A_2', A_2, etc., dejando pasar solamente la luz de A_0. En este caso la imagen en la pantalla P_2P_2 debería de representar tal objeto, cuyo espectro de difracción (imagen primaria) se reduzca a un solo máximo central. Pero este caso puede tener lugar solamente si el haz paralelo no ha experimentado ninguna difracción en el objeto, es decir, si el objeto está ausente, y en el plano P_2P_2 se obtendrá una iluminación homogénea sin ninguna imagen. Si detuviésemos todos los máximos de difracción de

orden impar (por ejemplo, A_1, A'_1, A_3, A'_3, etc.), entonces la imagen secundaria correspondería a aquella primaria que constara de A_0, A_2, A_2, A_4, A'_4, etc., es decir del conjunto de máximos que sería originado por la presencia en P_1P_1 de una red con un período dos veces menor; nosotros veríamos en la pantalla P_2P_2 la imagen de una red más *tupida*, que la que se tiene en realidad.

Solo el conjunto completo de máximos de difracción dará la imagen secundaria en correspondencia con el objeto. Además, el conjunto de máximos dispuestos a un solo lado del centro (por ejemplo, los que corresponden a m positivos), es suficiente para transmitir todos los detalles, ya que los demás solamente intensifican la luminancia, sin variar los pormenores del cuadro. Un significado particular tienen los máximos de los primeros órdenes dispuestos bajo pequeños ángulos y que son originados por los detalles más grandes y generalmente más importantes de la estructura y que básicamente predeterminan la forma del objeto real. Los máximos que se encuentran bajo grandes ángulos se definen principalmente por los detalles más pequeños del objeto, los cuales pueden ser también muy característicos. Así, por ejemplo, en el caso de un objeto en forma de una red infinita los espectros de primer orden son suficientes para la formación de la imagen en forma de una estructura periódica con período regular, pero con una transición suave de los lugares brillantes a los oscuros*). Para transmitir correctamente no solo la periodicidad de la estructura, sino también la transición brusca de luz a oscuridad, que es característica para nuestra red, es necesario que en la formación de la imagen participen también los espectros de altos órdenes. Los detalles muy pequeños (elementos de la estructura menores que la longitud de onda) en general no pueden ser observados, ya que las ondas difractadas en estos detalles, no llegan hasta la pantalla P_2P_2 inclusive en el caso de la apertura máxima posible del objetivo $u = 90°$. Esta consideración puede ser utilizada para establecer el límite de separación de los detalles $d \geqslant \lambda = \lambda_0/n$, donde λ_0 es la longitud de onda en el vacío, y n, el índice de refracción del medio, en el cual está sumergido el objeto.

Colocando en el plano FF las pantallas con orificios correspondientemente dispuestos, es decir dejando pasar solo A_0 o sólo los máximos pares etc., nosotros sin dificultad alguna podemos observar en el plano P_2P_2 las deformaciones descritas de la imagen o incluso la iluminación uniforme sin imagen. Estos experimentos realizados por Abbe ayudan mucho a aclarar su modo de razonar.

*) Debido a que los espectros sólo de primer orden se obtienen en el caso de difracción en la red de Rayleigh (véanse § 51 y ejercicio 76). Cuando la observación del objeto correspondiente se realiza con el ojo podemos juzgar solamente acerca de la variación paulatina del coeficiente de transmisión, en cambio, el efecto relacionado con el cambio de fase no se logra observar de manera inmediata.

De lo expuesto está claro que para la obtención de una imagen adecuada es necesario que a través del objetivo del microscopio y más adelante pasen los haces difractados de todas las direcciones. Generalmente dentro del microscopio no existen impedimentos, de manera que peligro ofrece solamente la pupila de entrada, cuyo papel lo cumple la montura del objetivo que limita su apertura efectiva*). Cuanto menor sea el objeto o su detalle d, tanto mayor será el ángulo de difracción originado y más ancho deberá ser el orificio del objetivo. Este último se define por el ángulo $2u$ entre los rayos extremos que van desde el objeto (colocado cerca del foco) hasta los bordes del objetivo. A la mitad de este ángulo se le denomina *apertura*. Si la apertura es menor que el ángulo de difracción φ_1 correspondiente a los espectros de primer orden, es decir si $\operatorname{sen} u < \operatorname{sen} \varphi_1 = \lambda_0/d$, entonces al microscopio ingresarán sólo los rayos procedentes del máximo central y nosotros no veremos la imagen correspondiente a los detalles que se definen por la magnitud d, es decir en el caso de nuestra red tendremos una iluminación uniforme. De esta manera, $\operatorname{sen} u \geqslant \lambda_0/d$ es la condición necesaria para el discernimiento de los detalles d. En el caso límite ($\operatorname{sen} u = \lambda_0/d$) sacrificamos los máximos de altos órdenes, es decir como se mencionó, empeoramos un tanto la calidad de la imagen. Cuanto mayor sea $\operatorname{sen} u$ en comparación con λ_0/d, más espectros de alto orden participarán en la construcción de la imagen, es décir más exactamente se transmitirá el objeto observado.

Si entre el objeto y el objetivo se encuentra un medio con índice de refracción n, entonces en lugar de λ_0 tendremos $\lambda = \lambda_0/n$ y la condición de separación será

$$d \geqslant \frac{\lambda_0}{n \operatorname{sen} u} \tag{97.3}$$

Generalmente cuando se ilumina el objeto no se utilizan solamente haces que van a lo largo del eje, sino que también haces inclinados con respecto a él. Esta circunstancia mejora la condición de separación.

Si el haz iluminador va bajo un ángulo α con respecto al eje del microscopio y se difracta bajo un ángulo α_0 (*fig.* 15.4), entonces la condición de máximos (véase § 47) será

$$\operatorname{sen} \alpha_0 - \operatorname{sen} \alpha = m\lambda/d \tag{97.4}$$

La condición, bajo la cual aunque sea el primer espectro incide sobre el objetivo, tiene la forma

$$\alpha = -u, \quad \alpha_0 = u, \quad m = +1. \tag{97.5}$$

La condición de separación se escribe como

$$2 \operatorname{sen} u \geqslant \frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda_0}{nd}, \tag{97.6}$$

*) Además, en los objetivos potentes con frecuencia se utiliza un diafragma especial de apertura que define justamente la dimensión de la pupila.

o bien

$$d \geqslant \frac{\lambda_0}{2n \operatorname{sen} u} = \frac{0{,}5\lambda_0}{n \operatorname{sen} u}. \qquad (97.7)$$

De esta manera,

$$d \geqslant \frac{0{,}5\lambda_0}{n \operatorname{sen} u} = \frac{0{,}5\lambda_0}{A}, \qquad (97.8)$$

donde $A = n \operatorname{sen} u$ simboliza, al igual que antes, la apertura numérica del objetivo.

Por consiguiente, tanto para los objetos iluminados, como para los autoluminosos el poder separador del microscopio depende de la apertura numérica A.

Para aumentar el poder separador del microscopio es ventajosa la utilización de ondas más cortas (ultravioletas) y el aumento de la apertura numérica. Para este último fin sirve la aplicación de los sistemas de *inmersión*, en los cuales el espacio entre el objeto y el objetivo es llenado con un medio cuyo índice de refracción $n > 1$. Escogiendo n próximo a 1,5 (aceite cedral), nosotros no sólo aumentamos la apertura numérica, sino que también obtenemos una serie de otras ventajas (véase § 92).

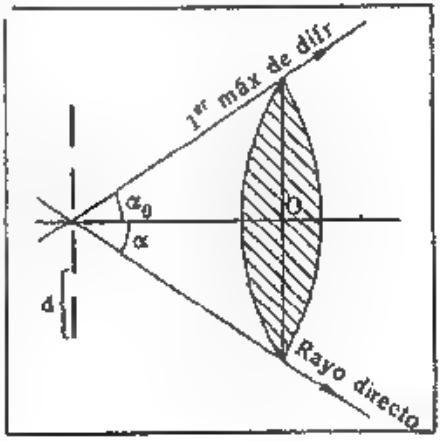


Fig. 15.4. Importancia de los haces oblicuos para aumentar el poder separador del microscopio.

En los objetivos de los microscopios modernos la apertura numérica alcanza magnitudes considerables. Para los sistemas «secos» $n = 1$ y sen u prácticamente alcanza 0,95, de manera que es posible la separación de detalles que tienen dimensiones próximas a la mitad de la longitud de onda luminosa. Con los sistemas de inmersión se logra una separación una vez y media mayor.

El método de Abbe no sólo permite hallar el valor del poder separador para los objetos iluminados, sino que muestra también que los resultados de la observación en el microscopio pueden depender fuertemente de las condiciones de observación. Las deducciones de Abbe tienen una particular importancia práctica, debido a que L. I. Mandelshtam logró demostrar que ellas conservan su validez no sólo para los objetos iluminados (coherencia) sino también para los autoluminosos. Observando la difracción en la pupila de salida

del objetivo, Mandelshtam mostró que aquellas deformaciones que a veces posee la imagen en comparación con el contorno del objeto dependen de las dimensiones y de la forma de la pupila o de la introducción de cualquier nuevo diafragma limitador exactamente de la misma manera como esto ocurre en la teoría de Abbe para los objetos iluminados. Mandelshtam estableció que para las estructuras toscas en comparación con la longitud de onda los objetos *autoluminosos* son completamente equivalentes a los objetos iluminados uniformemente por todos los lados. Los experimentos realizados por L. I. Mandelshtam con rejillas incandescentes o iluminadas en calidad de objeto, confirman estas deducciones.

La propagación de las deducciones señaladas a los objetos autoluminosos (ausencia de coherencia) es particularmente importante porque hasta en el caso de un objeto iluminado no siempre se tiene una coherencia completa. Los puntos del objeto iluminado envían una luz completamente coherente sólo en el caso, si las dimensiones angulares de la fuente son tan pequeñas, que el ángulo, bajo el cual esta se ve desde el lugar donde está situado el objeto, es pequeño en comparación con λ/d, donde λ es la longitud de la onda luminosa, y d, la distancia entre los puntos iluminados del objeto. En efecto, en este caso las ondas que llegan desde *distintos* puntos de la fuente hasta los puntos iluminados poseen una diferencia en fase pequeña en comparación con 2π (véase ejercicio 123), de manera que la interferencia de ondas difundidas por nuestros puntos dará *prácticamente* un mismo efecto independiente del punto de la fuente, del cual venga la onda iluminadora (coherencia). Al contrario, cuando las dimensiones angulares de la fuente son grandes en comparación con λ/d, entonces la luz que llega a los puntos iluminados desde *diferentes* puntos de la fuente tendrá todas las posibles diferencias de fase desde cero hasta 2π, y, por lo tanto, las ondas difundidas por nuestros puntos podrán dar los más variados cuadros de interferencia (incoherencia). Para las dimensiones intermedias de la fuente la coherencia se realizará en mayor o menor grado. En condiciones reales la iluminación del objeto en el microscopio se efectúa con anchos haces de rayos, y por lo general, no tiene lugar una coherencia completa.

Lo dicho se confirma con los cálculos efectuados en el § 22, de acuerdo con los cuales la dimensión de la región de coherencia en el plano del objeto iluminado es $2l_{coh} = \lambda/\theta$, donde θ es la dimensión angular de la fuente. Si $2l_{coh}$ es menor que el intervalo mínimo discernible d, entonces nosotros tendremos una iluminación incoherente, en el caso contrario $2l_{coh} = \lambda/\theta \geqslant d$ la distancia discernible se encuentra dentro de la región de coherencia y la iluminación puede considerarse coherente. Por lo tanto, también con este método de razonamientos llegamos a las conclusiones hechas anteriormente.

El problema acerca del rol de la coherencia parcial de la iluminación de los objetos en el microscopio fue investigado deta-

lladamente por D. S. Rozhdestvenski*), el cual dio una descripción cuantitativa de los fenómenos con ayuda del factor llamado grado de coherencia espacial γ^{12} (véase § 22) los valores extremos del cual son cero y la unidad. Al haber estudiado desde el punto de vista indicado el problema acerca de la iluminación racional en las observaciones en el microscopio, Rozhdestvenski aclaró este importante problema e incluso construyó una lámpara, que da con poca potencia de la fuente las condiciones más favorables de un campo visual fuertemente iluminado con los objetivos más potentes.

Un excelente ejemplo de la importancia de la comprensión correcta de los resultados de la observación microscópica es citado por

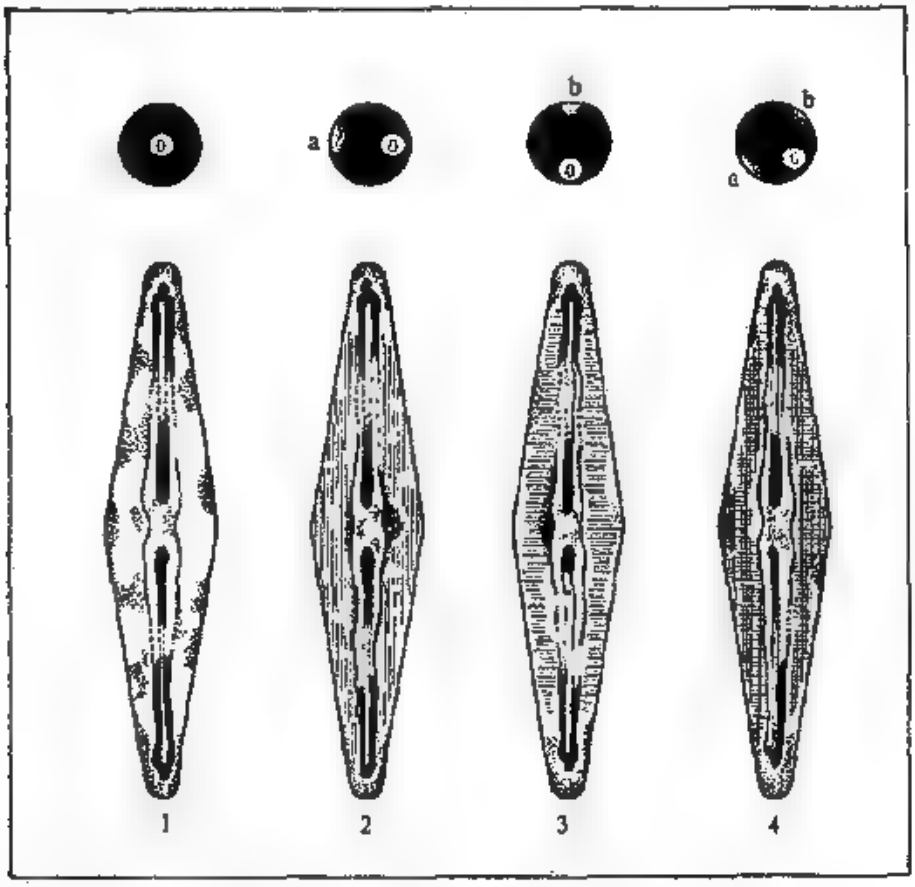


Fig. 15.5. Influencia del carácter de la iluminación sobre la imagen en el microscopio.

*) *D. S. Rozhdestvenski*, Obras escogidas, «Naúka», 1964, pág. 197 (*en ruso*).

Ya. E. Ellengorn*). En la fig. 15.5 están representados cuatro microcroquis de una misma preparación (caparazón de una diatomea) con diferentes métodos de iluminación.

En cada croquis se muestra qué forma tiene el haz luminoso que pasa a través del plano focal del objetivo: croquis *1*, pasa sólo el máximo central 0, el caparazón parece liso, sin detalles; croquis *2*, pasa el máximo de difracción central 0 y uno lateral *a*, el caparazón tiene una estructura longitudinal; croquis *3*, pasa el máximo de difracción central 0 y uno superior *b*, el caparazón tiene estructura transversal; croquis *4*, pasa el máximo central 0, un máximo *a* y uno *b*, el caparazón tiene una estructura en forma de red.

De esta manera, es evidente que la estructura del caparazón se parece a una red, pero en dependencia del método de observación puede resultar lisa o dotada de franjas longitudinales o transversales. Mientras tanto antes los botánicos suponían que se trataba de diferentes variedades de diatomeas.

§ 88. Microscopio electrónico

Debido a que la apertura numérica no puede ser aumentada considerablemente, la única manera de aumentar el poder separador del microscopio consiste en el empleo de ondas más cortas.

El uso de rayos ultravioletas, que exige la conlección de la óptica del microscopio con los materiales correspondientes (cuarzo, fluorita) o la utilización de la óptica de reflexión, está limitado por las longitudes de onda 250—200 nm, ya que la mayoría de objetos que se somete a observación absorbe fuertemente las ondas cortas ultravioletas. De esta manera, siguiendo este camino es posible aumentar el poder separador aproximadamente dos veces, lo que ha sido realizado en los modernos microscopios ultravioletas en donde, por supuesto, es necesario aplicar el método fotográfico de observación.

La utilización de la emisión ultravioleta da una ventaja importante más. Muchos objetos, especialmente los biológicos, en todas sus partes son igualmente transparentes para la luz visible, como consecuencia de lo cual la observación de éstos es dificultosa en la luz visible. Pero para la luz ultravioleta se presenta una diferencia considerable en el índice de absorción por las distintas partes del objeto, por lo cual las correspondientes microfotografías poseen un contraste suficiente. E. M. Brumberg elaboró un sistema bastante ingenioso que permite utilizar magníficamente la diferencia en la absorción de diferentes longitudes de onda. Fotografiando la preparación en tres grupos de longitudes de onda y observando las tres fotografías simultáneamente en un aparato especial provisto de tres filtros de luz que transmiten correspondientemente la diferencia en estos tres grupos de longitudes de onda, obtendremos según el método de Brum-

*) *Ya. E. Ellengorn*, Revista botánica, 1940 (en ruso).

borg una imagen muy rica en detalles con una separación correspondiente a la longitud de onda más corta que ha sido utilizada en la toma de las fotografías.

Para un aumento ulterior del poder separador del microscopio se debería pasar a los rayos Roentgen. Pero la confección de la óptica correspondiente para la obtención de una imagen en los rayos Roentgen encuentra dificultades muy grandes.

Sin embargo, el desarrollo de la física teórica moderna llevó a la idea de que la propagación de un flujo de partículas materiales cualesquiera se rige por leyes ondulatorias de la misma manera que en el caso del flujo luminoso. Esto significa que una solución rigurosa del problema acerca del movimiento de partículas bajo la acción de fuerzas puede ser obtenida solamente estudiando la propagación de las ondas correspondientes. Sin detenernos en la naturaleza de tales ondas, solamente indicaremos que la longitud de ellas está ligada con la masa m y con la velocidad v de las partículas en movimiento por la fórmula $\lambda = h/mv$ (de Broglie, año 1923), donde $h = 6{,}624 \cdot 10^{-34}$ J·s es la constante de Planck. De aquí se ve que cuanto mayor son la masa de la partícula y mayor su velocidad, menor será la longitud de onda. Pero inclusive para las partículas con la menor masa conocida, para los electrones ($m \approx 0{,}9 \cdot 10^{-27}$ g), que se mueven con velocidad moderada, la correspondiente longitud de onda es muy pequeña. Así por ejemplo, para los electrones acelerados por una diferencia de potencial de 150 V, $\lambda = 1$ Å*). Para electrones más rápidos, y también para los átomos, moléculas o para cuerpos de aun mayor masa la longitud de onda será muchísimo más corta. De esta manera, las leyes de propagación inclusive de las partículas más ligeras (electrones) responden a las leyes de propagación de ondas muy cortas.

En este caso la solución rigurosa del problema, basada en la teoría ondulatoria, prácticamente no se diferencia de la solución encontrada por el método de la óptica geométrica (de rayos). Habiendo establecido la dependencia del índice de refracción de las propiedades del medio, es decir, de los campos de fuerzas en los cuales se mueve el electrón, podemos calcular su movimiento según las reglas de la óptica geométrica. Por otro lado, se puede calcular el movimiento del electrón según las leyes ordinarias de la mecánica, sabiendo las fuerzas que actúan sobre el electrón. La posibilidad de analizar un problema mecánico desde el punto de vista óptico había sido señalada hace mucho. Más de 100 años atrás Hamilton (cerca del año 1830) mostró que a las ecuaciones de la mecánica se les puede dar una forma completamente análoga a las ecuaciones de la óptica geométrica. Las primeras pueden ser representadas como las relaciones que ex-

*) Para los cálculos numéricos de la longitud de onda relacionada con el electrón es cómodo dar a la fórmula de Broglie la forma $\lambda = 12{,}24/\sqrt{V}$ angstrons, donde la diferencia de potencial V está expresada en voltios.

presan el principio de mínima acción (principio de Maupertius, del cual se puede obtener las ecuaciones de la mecánica de Newton), y las segundas en la forma de las relaciones que expresan el principio del camino óptico mínimo (principio de Fermat, del cual se deducen las leyes de la óptica geométrica, véase § 69). Ambos principios tienen una expresión completamente idéntica, si *se introduce de manera conveniente el concepto* de índice de refracción. Un resultado brillante de la teoría moderna es aquella circunstancia que el índice de refracción establecido por ella está relacionado con los parámetros que caracterizan los campos de fuerzas, en los cuales se mueve la partícula, justamente *tal como* se exige para la identificación del principio de acción mínima con el principio de Fermat. Así, por ejemplo, para la partícula que se mueve en el campo de fuerzas que se caracteriza por el potencial W, el índice de refracción del medio de acuerdo con la teoría moderna tiene la forma

$$n = \sqrt{2(E-W)/mc^2},$$

donde E es la energía de la partícula en movimiento, m, la masa y c, la velocidad de la luz; justamente con esta relación la trayectoria de la partícula, según Hamilton, es idéntica al rayo luminoso.

Los métodos de cálculo de los recorridos electrónicos en los campos electromagnéticos (independientemente de si se utilizan los métodos de la mecánica o de la óptica geométrica) permiten establecer las condiciones, bajo las cuales los electrones que salen de algún punto (fuente) se reúnen de nuevo en otro punto (imagen estigmática). El conjunto de campos eléctricos o magnéticos, en los cuales debe moverse el electrón para la obtención de tal imagen, representa «las lentes electrónicas» (magnéticas o electrostáticas) que en la óptica electrónica juegan el mismo rol que las lentes ordinarias en la óptica geométrica*). En condiciones favorables (haces paraxiales o lentes electrónicas «corregidas», calculadas de manera correspondiente) la fuente de electrones puede dar una imagen lo suficientemente buena.

Esta imagen puede ser fotografiada (si los electrones inciden sobre una placa fotográfica) u observada directamente por el ojo (si los electrones inciden sobre una pantalla fluorescente, la cual se ilumina al ser golpeada por éstos). Este es el principio, en que se basan numerosos sistemas electrónico-ópticos que desempeñan un papel importante en la técnica moderna. Uno de estos sistemas es el microscopio electrónico representado esquemáticamente en la fig. 15.6. Como vemos, el microscopio electrónico consta de elementos que son completamente equivalentes a los de un microscopio óptico corriente. El objeto puede ser «autoluminoso», es decir, el mismo sirve de fuente de electrones (cátodo incandescente o un fotocátodo iluminado),

*) La influencia de los campos eléctricos y magnéticos sobre el recorrido de los electrones (acción de enfoque) se estudia en los cursos de electricidad (véase, por ejemplo, *S. G. Kalashnikov*, Electricidad, «Nauka», 1964, 208—210).

o «iluminado», constituyendo la preparación, sobre la cual incide el flujo de electrones (generalmente desde un cátodo incandescente); por supuesto, la preparación debe ser lo suficientemente fina, y los electrones, lo suficientemente rápidos, para que ellos pasen a través de la preparación y lleguen hasta el sistema «óptico». A propósito, una exigencia similar de «transparencia» nosotros planteamos también ante las preparaciones observadas en el microscopio óptico-corriente.

El cálculo del microscopio electrónico según las reglas de la óptica geométrica es completamente natural, ya que, como vimos, la longitud de onda correspondiente a los electrones es muy pequeña. Ella es del orden de algunas milésimas de nanómetro, ya que generalmente se emplean electrones con velocidades bastante altas (que responden a una diferencia de potencial de aceleración de 40—60kV). Sin embargo, como vimos en el § 97, para el análisis del problema fundamental acerca del poder separador del microscopio es necesario tomar en consideración que la longitud de onda no es infinitamente pequeña. Aplicando la fórmula $d \geqslant \lambda_0/A$, hallaremos que el poder separador del microscopio electrónico puede hacerse incomparablemente más grande que en el microscopio ordinario. En efecto, la longitud de onda en el caso del microscopio electrónico es 10 000—100 000 veces menor que en el común; por eso, a pesar de que la apertura numérica para los «objetivos» electrónicos aún no es grande ($A \approx 0{,}01$—$0{,}1$), de todas maneras el poder separador teórico del microscopio electrónico sobrepasa el poder separador del microscopio óptico miles de veces. En otras palabras, si en el microscopio óptico estamos en condiciones de discernir detalles del orden de 200—300 nm, con ayuda del microscopio electrónico podremos obtener la imagen de objetos del orden de

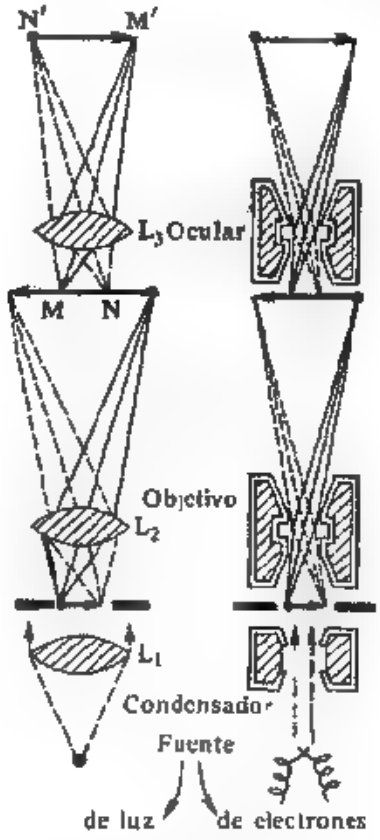


Fig. 15.6. Esquema de la estructura del microscopio electrónico.
Para comparar, al lado se representa el esquema de un microscopio óptico.

0,1 nm, es decir, ver átomos y moléculas.

Los mejores microscopios electrónicos existentes en la actualidad poseen un poder separador próximo a 0,1 nm.

En la URSS los primeros microscopios electrónicos bastante perfectos fueron construidos bajo la dirección del académico A. A. Lébedev.

Una limitación de principio en el poder separador del microscopio electrónico reside, por supuesto, al igual que en el caso del microscopio óptico ordinario, en los fenómenos de difracción originados por la naturaleza ondulatoria de los electrones. Semejante difracción de los electrones puede ser observada de manera inmediata, si se escogen las condiciones del experimento en correspondencia con lo expuesto anteriormente, es decir, de tal manera que las dimensiones lineales de las heterogeneidades espaciales del medio, a través del cual

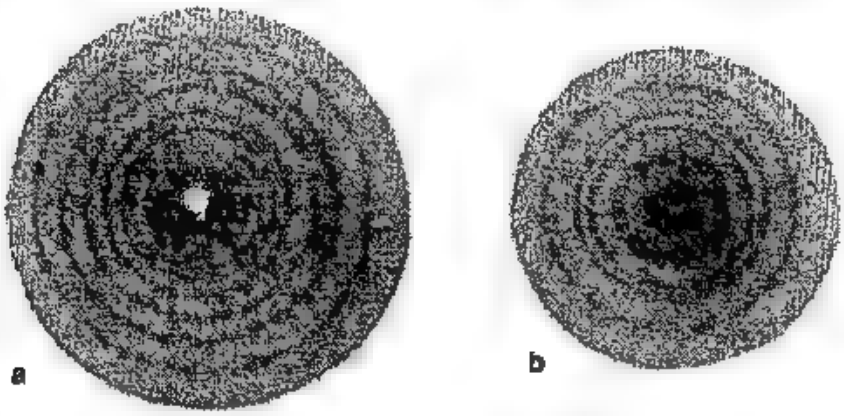


Fig. 15.7. Anillos de difracción obtenidos al pasar rayos Roentgen (a) y un haz electrónico (b) a través de una lámina de metal.

pasa el haz de electrones, sean comparables con la longitud de onda de estos electrones. Esta última es próxima a la longitud de onda de los rayos Roentgen, y por eso las condiciones de observación de la difracción de los electrones y de los rayos Roentgen son parecidas entre sí. En efecto, Davisson y Germer (año 1927) y G. P. Thomson (año 1928) realizaron experimentos de difracción de electrones completamente análogos a los experimentos de difracción de los rayos Roentgen.

En la fig. 15.7 se muestran las imágenes del cuadro de difracción que aparece al pasar los rayos Roentgen (*a*) y un haz de electrones (*b*)

a través de una fina laminilla de oro (anillos de Debye — Scherrer, véase § 118). Tales experimentos de difracción han sido realizados también con haces de moléculas y con haces de neutrones.

§ 15. Método del campo obscuro (ultramicroscopio). Método de contraste físico

La fórmula para determinar el poder separador del microscopio muestra la dimensión límite de la partícula que puede ser vista o fotografiada con ayuda del microscopio, es decir de la partícula, la imagen de la cual refleja sin deformación su contorno real. No se puede obtener imágenes correctas de partículas más pequeñas. Sin embargo, la misma existencia de tales partículas pequeñas ultramicroscópicas, la posición y el movimiento de éstas pueden ser establecidos con ayuda del microscopio con un método especial de observación. Este método está basado en el fenómeno de difusión de la luz por las partículas pequeñas.

El esquema de la disposición de los aparatos está representado en la fig. 15.8. Un intenso haz de luz se concentrado con ayuda del objetivo O_1 en la cámara, donde se sospecha la presencia de objetos ultramicroscópicos. Si en la cámara no hay tales objetos o partículas más grandes, entonces la luz procedente del objetivo O_1 pasará con dirección horizontal sin incidir en el objetivo superior*) Si en el camino de los rayos se tienen partículas, entonces la luz experimentará difusión en ellas, incidirá sobre el objetivo O_2 y dará en el microscopio vertical un cuadro de difracción que permite determinar la posición y el desplazamiento de la partícula ultramicroscópica, pero que da solamente una idea bastante vaga acerca de su forma Las partículas muy pequeñas (por ejemplo, las partículas coloidales de los metales con dimensiones alrededor de $5 \cdot 10^{-6}$ mm) se observan en forma de pequeñas estrellas brillantes sobre un fondo negro

En el ultramicroscopio se realiza el principio del campo obscuro que consiste en que se eliminan del campo visual los rayos directos y se observan solamente los difractados. Este principio se utiliza en una serie de dispositivos. En particular, en él se basa la aplicación de los condensadores especiales (fig 15 9) que crean una iluminación de la preparación en la platina del microscopio de tal manera que sobre ella incide un intenso haz de rayos dirigidos oblicuamente y que no inciden directamente sobre el objetivo. Los rayos centrales son retenidos por una pantalla especial no transparente, y los rayos laterales experimentan una reflexión interna total, se reflejan en la superficie especular y se concentran en el objeto. La dirección de ellos es tal que no inciden sobre el objetivo, solamente los rayos que experimen-

*) La difusión molecular de la luz, que tiene lugar inclusive en un medio homogéneo completamente puro y desprovisto de partículas ajenas, es tan débil que nosotros no la tomaremos en cuenta en nuestros cálculos.

tan difracción sobre el objeto (difundidas por el objeto) pueden caer sobre el objetivo. Si los objetos son bastante grandes (mayores que $^1/_2\lambda$), entonces sobre el objetivo incidirán simultáneamente los espectros de difracción de diferentes órdenes y veremos una imagen que tiene la forma del objeto. Pero si una considerable parte de los haces difractados no cae sobre el objetivo, entonces puede observarse una imagen que por su forma se diferencie notablemente del objeto, o inclusive simplemente un punto brillante sobre un fondo negro que no da ninguna idea acerca de la forma del objeto. Tales condensadores de diferentes sistemas (condensador en forma de paraboloide, condensador-cardioide) encuentran una amplia aplicación en la microscopía. Acerca del perfeccionamiento del método ultramicroscópico de observación se habló en el § 45.

Los métodos microscópicos descritos pueden ser muy útiles para

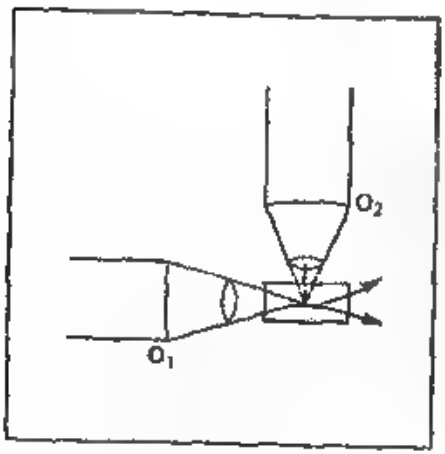


Fig. 15.8. Esquema del ultramicroscopio más simple.

Fig. 15.9. Corte de un condensador especial para la realización del método del campo obscuro

aquellos objetos que se destacan sobre el fondo de todo el campo visual, gracias a su capacidad de absorber la luz de manera diferente a como lo hace el medio circundante (estructuras absorbentes). En la práctica microscópica (por ejemplo, en la biología) es muy difundida la observación de objetos que se diferencian del medio circundante principalmente por su índice de refracción (estructuras refringentes). Este método merece un especial análisis.

Como se indicó en el § 48, las estructuras refringentes que introducen una variación no en la amplitud sino en la fase de la onda transmitida dan una difracción excelentemente pronunciada (por ejemplo, las redes fásicas de difracción). Sin embargo, tales estructuras

no pueden ser observadas o fotografiadas de manera inmediata, ya que nuestros receptores no reaccionan a la fase, sino a la amplitud (intensidad), que permanece invariable al pasar la onda a través de diferentes sectores de la estructura refringente. Puede parecer que este resultado refuta la utilidad del método de observación de Abbe: para iguales imágenes primarias (espectros) obtendremos imágenes secundarias completamente diferentes. Esta dificultad se explica simplemente. Los espectros de difracción de unas u otras estructuras pueden no diferenciarse por su amplitud, pero la fase del espectro de orden cero en el caso de estructuras refringentes difiere $^1/_2\pi$ de la fase de los espectros de los demás órdenes. Justamente esto provoca la diferencia en las imágenes secundarias, donde se lleva a cabo la sumación de todos los espectros. Sin embargo, si se varía la fase del espectro de orden cero en $^1/_2\pi$, entonces eliminamos la diferencia entre lo que dan las estructuras absorbentes y refringentes y podremos ver estas últimas. Aquellos lugares de la estructura, que dan mayor variación en la fase, pueden hacerse obscuros o brillantes en dependencia de si habrá o no una diferencia de fase en el espectro de orden cero igual a $+^1/_2\pi$ ó $-^1/_2\pi$.

Los siguientes razonamientos elementales permiten comprender la diferencia en fase entre la luz directa (máximo de orden cero) y la difundida (luz de difracción de los demás órdenes)

Imaginemos un objeto en forma de un medio transparente homogéneo, ciertos sectores del cual, siendo también transparentes, difieren un poco por el índice de refracción (estructura refringente). El objeto es iluminado con ayuda de un condensador por un haz paralelo de luz (fig. 15.10). Si no hubiera la diferencia en el índice de refracción del sector del objeto y del medio circundante, la luz pasaría a través de la preparación sin desviarse, (la onda no desviada P). Cuando existe la indicada diferencia en el índice de refracción, una parte de la luz experimenta difusión (difracción), dando la onda desviada D, y la mayor parte S pasa siguiendo la dirección inicial (espectro de orden cero), por lo cual se tiene cierto desfasaje en comparación con la onda P, por ejemplo, retraso, si el índice de refracción de este sector es mayor que el del medio circundante.

El gráfico en la fig. 15.11 muestra este pequeño desfasaje entre la onda no desviada P y la onda «retrasada» S. La diferencia de ambas ondas constituye justamente la onda difractada D. Debido a que P y S son próximas en amplitud y se diferencian un poco en fase, entonces, como se ve fácilmente del gráfico y como se obtiene de los cálculos (véase ejercicio 123), la onda D tendrá una pequeña amplitud y estará *desplazada según su fase* en $^1/_2\pi$ (en un cuarto de onda) con respecto a S (y por lo tanto también a P).

En el microscopio ordinario en la construcción de la imagen participan tanto S, como D, dando en conjunto la onda P cuya forma no es diferente de lo que dan los lugares vecinos a la estructura

(ya que se supone la ausencia de absorción) De esta manera, el microscopio ordinario no permite diferenciar los distintos sectores de la estructura refringente. Reteniendo S, obtendremos un microscopio con campo obscuro, en el cual la estructura ya puede ser observada gracias a la presencia de la onda difractada D. Cambiando la fase S en $\pm{}^1/_2\pi$, obligaremos a S y D a sumarse de tal manera que dén intensificación con respecto a P (si se igualan las fases de S y D) o debilitamiento en comparación con P (si las fases de S y D se hacen contrarias), es decir, obtendremos una *imagen de mayor contraste*, brillante u obscura en el campo circundante (fig. 15.12, *a*, *b*).

Debido a que S y D se diferencian fuertemente en su amplitud para la obtención de un mayor contraste es conveniente con ayuda de un filtro absorbedor debilitar la intensidad de S (al mismo tiempo de P) hasta la intensidad de D. Entonces el efecto de interferencia dará una intensificación notable o un debilitamiento casi completo de la imagen sobre el fondo condicionado por la intensidad dismi-

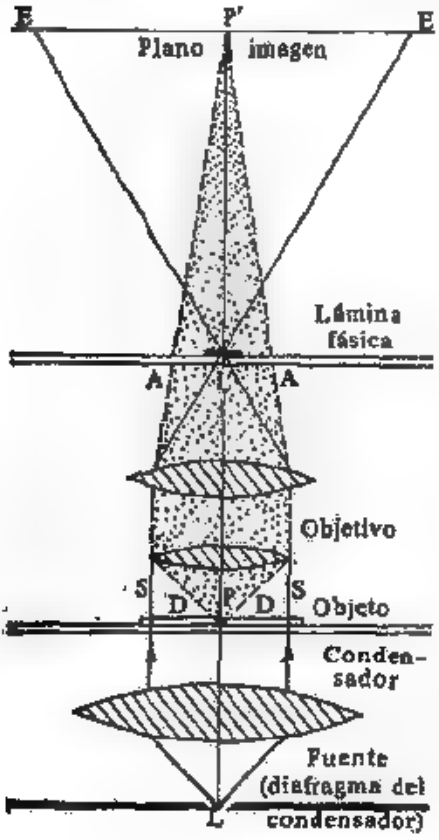
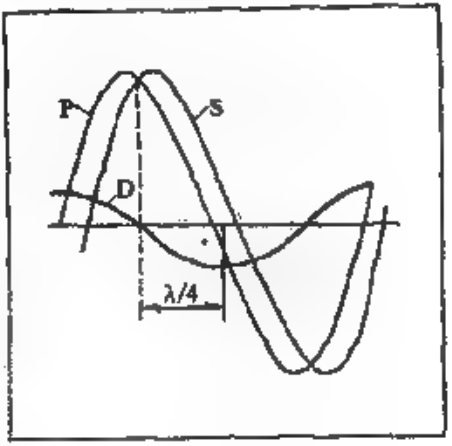


Fig. 15.10. Esquema de observación de la estructura de refracción.

Fig. 15.11. Formación de la onda difractada D al observar la estructura de refracción.



nuida de la onda P. Por eso la lámina destinada a variar la fase de S en $+\frac{1}{2}\pi$ ó $-\frac{1}{2}\pi$, en general, se utiliza simultáneamente para el debilitamiento considerable de S. Teniendo un juego de tales láminas con diferentes coeficientes de debilitamiento, se pueden escoger las condiciones prácticas más favorables de observación. El lugar de disposición de tal lámina debilitadora y variadora de fase es fácil ver de la fig. 15 10. Si la preparación es iluminada por un haz paralelo, entonces la onda no desviada (S ó P) convergerá en el plano focal del objetivo AA y más adelante divergerá por todo el plano imagen EE. La onda difractada (desviada) D da la imagen en el plano EE, que es conjugado del plano objeto con respecto al objetivo del microscopio.

Justamente en el plano focal AA del objetivo deberá estar colocada la lámina fásica que debilita S (y P) y que comunica la diferencia adicional de fase.

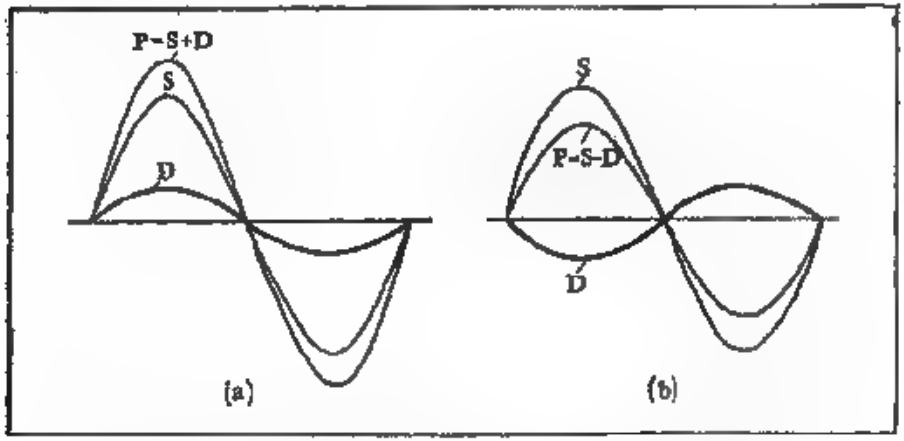


Fig. 15.12. Principio del método de contraste fásico.
a, las ondas S y D están en fase. b, las ondas S y D están en fases contrarias.

La lámina fásica constituye una lámina de un mater al transparente que tiene el correspondiente engrosamiento o adelgazamiento en el lugar del máximo de orden cero. Esta misma parte de la lámina está cubierta por una capa absorbente con determinada capacidad absorbedora.

El máximo de orden cero es la imagen de la fuente de luz formada por el condensador y por el objetivo. Generalmente se utiliza como fuente un diafragma dispuesto en el plano focal del condensador. La forma del corte de este diafragma determina la forma del máximo de orden cero, y por lo tanto, también la forma del engrosamiento (adelgazamiento) de la lámina fásica. Por una serie de consideraciones ella generalmente se hace como un pequeño anillo.

El método descrito para mejorar el contraste de la imagen de objetos transparentes recibió el nombre de método *de contraste fásico* (Zernike, año 1935). Los microscopios que utilizan el método de contraste fásico son producidos por la industria y se emplean ampliamente en las investigaciones biológicas.

§ 100. Fenómenos de difracción en los espectrógrafos (poder separador cromático)

Un gran significado poseen los fenómenos de difracción en los espectrógrafos. Si la angosta rendija del aparato es iluminada por una pequeña fuente lejana de luz (es decir, por un haz casi paralelo), entonces sobre el objetivo del colimador incidirá un haz muy angosto de luz. En este caso trabajaría una parte muy pequeña del objetivo, lo que correspondería a un poder separador bastante bajo de él y, por lo tanto, podría conducir a una imagen no ostensible de la rendija en la placa fotográfica. Sin embargo, en la rendija ocurre la difracción de la luz, la cual conduce a que el colimador se llene de luz de acuerdo con las dimensiones de la rendija.

En el caso de una rendija angosta, la apertura del objetivo colimador debe ser lo suficientemente grande para que el objetivo deje pasar tanto el máximo central del cuadro de difracción, como un número suficiente de los máximos adicionales; como consecuencia de la inevitable diafragmación de los máximos de difracción de alto orden la imagen de la rendija resultará más o menos ensanchada, y lo será más, cuanto menor sea la apertura del objetivo colimador. Sin embargo, generalmente los objetivos del espectrógrafo (tanto el colimador, como el de cámara) se fabrican de una dimensión mayor que la sección transversal del sistema de prismas. Por esto el rol principal en el ensanchamiento difractivo de la imagen de la rendija lo juega la limitación originada por el prisma. Por otra parte, el sistema de prismas, gracias a su considerable dispersión, conlleva a que el frente de la onda plana incidente no monocromática después de pasar a través del prisma gire en distintos ángulos para diferentes longitudes de onda, originando la formación del espectro prismático (Newton). La distancia angular entre dos longitudes próximas de onda, condicionada por la dispersión, permite discernirlas hasta que el ensanchamiento difractivo de la imagen de las líneas ocasione una superposición lo suficientemente total de ellas. De esta manera, también la difracción en este caso impone una limitación a la capacidad del aparato de discernir longitudes próximas de onda, es decir, limita *el poder separador cromático* del aparato.

La distribución de la intensidad en el caso de superposición de dos líneas próximas monocromáticas de igual intensidad está representada en forma esquemática en la fig. 15.13 por la línea continua.

En este cuadro la posibilidad de discernimiento de dos longitudes discretas de onda es, hasta cierto punto, convencional (compare con §§ 50, 96). De acuerdo con Rayleigh se considera que dos líneas son discernibles, si la distancia A_1A_2 entre sus máximos, expresada en medida angular mediante i, es mayor o igual a la distancia entre el máximo y el mínimo más cercano (distancia angular φ), es decir, si $i \geqslant \varphi$. Se llama poder separador del aparato a la magnitud $\mathcal{A} = \lambda/\delta\lambda$, donde $\delta\lambda$ es la diferencia en las longitudes de onda de las dos líneas cercanas, las cuales satisfacen la condición anteriormente citada.

Para simplificar los cálculos, nos limitaremos al dispositivo más difundido, cuando el prisma está en la posición de mínima desviación, es decir, el haz de luz va dentro del prisma en forma paralela a la base. En la fig. 15.14, A_0B_0 simboliza la posición del frente ondu-

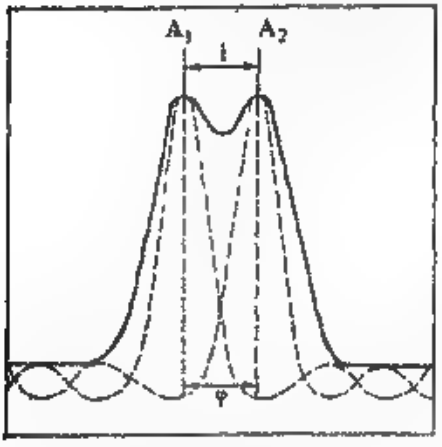


Fig. 15.13. Distribución de la intensidad cuando se superponen dos líneas espectrales cercanas.

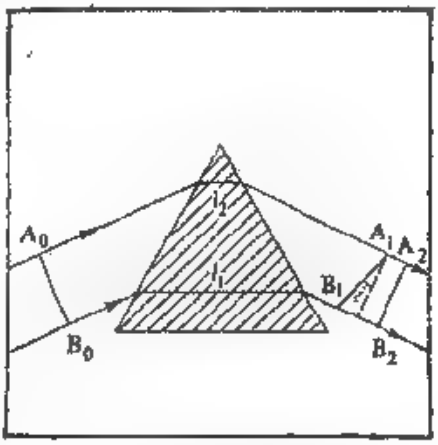


Fig. 15.14. Ilustración para el cálculo del poder separador del espectrógrafo.

latorio para ambas longitudes de onda antes de incidir sobre el prisma que se encuentra *en posición de mínima desviación* y A_1B_1, A_2B_2 son las posiciones de los frentes ondulatorios para λ_1 y λ_2 después de la refracción. El ángulo i es el ángulo entre A_1B_1 y A_2B_2.

De la fig 15.14 se deduce que

$$i \approx \operatorname{tg} i = \frac{B_2B_2 - A_1A_2}{A_2B_2},$$

pero

$$A_1A_2 = l_2 (n_1 - n_2) = l_2\delta n,$$

$$B_1B_2 = l_1 (n_1 - n_2) = l_1\delta n,$$

donde l_1 y l_2 son los recorridos en la parte superior e inferior del prisma y $\delta n = n_1 - n_2$ es la diferencia de los índices de refracción para λ_1 y λ_2, ya que el frente de onda de λ_1 ha quedado atrás del frente de λ_2 como consecuencia del retraso en el seno del prisma originado por la diferencia en los índices de refracción n_1 y n_2 y por el espesor de la capa del prisma que ha sido superada.

De esta manera, $(l_1 - l_2)\,\delta n$ es la diferencia de recorrido entre las ondas λ_1 y λ_2, aparecida como consecuencia de la dispersión en el espesor del prisma en la longitud $(l_1 - l_2)$. Designando *el ancho* del haz luminoso $A_0B_0 = A_1B_2$ mediante h, encontraremos

$$l = \frac{l_1 - l_2}{h}\,\delta n$$

El ancho h del haz define el ensanchamiento difractivo de la línea. Debido a que λ_1 y λ_2 son próximas entre sí, entonces el ensanchamiento para ambas líneas puede considerarse el mismo y determinado de la condición h sen $\varphi = \lambda$ (φ es el ángulo de difracción) o

$$\varphi = \lambda/h.$$

De esta manera, la condición de separación de dos líneas cercanas a λ, es:

$$l = \varphi$$

o bien

$$\lambda = \delta n\,(l_1 - l_2). \qquad (100.1)$$

El caso más favorable es cuando el haz de luz se apodera de *todo* el prisma. En este caso, $l_2 = 0$ y $l_1 = b$, donde b es el ancho de la base, a lo largo de la cual la luz va con mínima desviación. Para este caso,

$$\lambda = b\delta n \quad \text{y} \quad \mathcal{A} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = b\frac{\delta n}{\delta\lambda}. \qquad (100.2)$$

De esta manera, el poder separador cromático del prisma es igual al producto de la base por la dispersión relativa del índice de refracción.

En el caso de espectrógrafos con varios prismas de un mismo material ($\delta n/\delta\lambda$ es el mismo) b es igual a la suma de las bases de todos los prismas. Así, el pequeño espectrógrafo ИСП-51 de 3 prismas con bases próximas a 7 cm cada uno, en la parte violeta del espectro, donde la dispersión $\delta n/\delta\lambda = 0{,}0001$ nm^{-1}, tiene un poder separador teórico $\mathcal{A} = 20\,000$, es decir, en el aparato no pueden distinguirse dos líneas violetas que se diferencien en menos que 0,02 nm. El poder separador real es algo más bajo debido al ancho finito de la rendija, y también como consecuencia de la imperfección de la óptica del espectrógrafo y de la estructura granulosa de la emulsión fotográfica.

POLARIZACIÓN DE LA LUZ

16. LUZ NATURAL Y POLARIZADA

§ 101. Carácter transversal de las ondas luminosas

En el estudio de los fenómenos de interferencia y difracción la cuestión acerca de si las ondas luminosas son longitudinales o transversales poseía un significado de segundo orden (véase § 18)

De la teoría electromagnética de la luz se deduce de manera inmediata que las ondas luminosas son transversales. En efecto, todo el conjunto de leyes del electromagnetismo y de la inducción electromagnética, cuya breve expresión matemática se encierra en las ecuaciones de la teoría de Maxwell, lleva a la conclusión de que la variación en el tiempo de la intensidad eléctrica E va acompañada de la aparición del campo magnético variable H orientado perpendicularmente al vector E, y al revés. Tal campo electromagnético variable no se mantiene inmóvil en el espacio, sino que se propaga con la velocidad de la luz a lo largo de la línea perpendicular a los vectores E y H, formando ondas electromagnéticas, y en particular, ondas luminosas. De esta manera, los tres vectores: E, H y la velocidad de propagación del frente de onda v son mutuamente perpendiculares y forman un sistema dextrórsum; es decir, la onda electromagnética es transversal*).

Si se da la dirección de propagación y la dirección de uno de los vectores, por ejemplo E, entonces la dirección del otro (H) se determinará en forma única. Sin embargo, el cruce de los vectores E y H

*) Véase la nota en la página 38. La dirección de propagación del flujo de energía (vector Umov—Poynting) coincide con la dirección de la normal ondulatoria en los medios ópticamente isótropos. En los medios anisótropos la no coincidencia entre la normal ondulatoria y el rayo tiene en principio un significado importante. En lo que se refiere al problema del presente capítulo no haremos ninguna distinción entre la dirección de la normal ondulatoria y el rayo.

puede estar orientado *arbitrariamente* con respecto a la dirección de propagación del frente ondulatorio (o del rayo).

En cada caso concreto se tiene *una u otra* orientación de los vectores E y H con relación a la normal ondulatoria y ella (o el rayo) no constituye el eje de simetría de las ondas electromagnéticas. Una asimetría de este tipo es característica para ondas *transversales*, en cambio, las ondas longitudinales siempre son simétricas con respecto a la dirección de propagación. De esta manera, la asimetría respecto al rayo constituye justamente uno de los indicios que diferencia la onda transversal de la longitudinal. Este indicio fue utilizado para demostrar experimentalmente el carácter transversal de las ondas luminosas mucho antes de que fuese establecida la naturaleza electromagnética de ellas, la cual hace evidente este carácter transversal.

Como instrumento de investigación experimental de la asimetría, evidentemente, puede servir solo un sistema, el cual a su vez posea la propiedad de asimetría. Como tal sistema, apto para investigar las propiedades del haz luminoso, puede servir un cristal, cuyos átomos estén dispuestos como una red espacial de tal manera que las propiedades del cristal en distintas direcciones resulten diferentes (anisotropía). En efecto, la transmisión de la luz a través de cristales fue justamente el primer fenómeno que sirvió para establecer el carácter transversal de las ondas luminosas.

Todavía Huygens (año 1690), al estudiar la propiedad descubierta por Bartholinus (año 1670) del espato de Islandia de desdoblar los rayos luminosos que pasan a través de él (birrefringencia), encontró que cada uno de los rayos, obtenidos de esta manera, al pasar a través de un segundo cristal de espato de Islandia se comporta de manera diferente a como lo hacen los rayos comunes; a saber, en dependencia de la orientación mutua de los cristales, cada uno de los rayos, al desdoblarse en el segundo cristal, da dos rayos de diferente *intensidad* y en ciertas orientaciones, sólo un rayo (la intensidad del otro disminuye hasta cero). Huygens no pudo explicar el fenómeno descubierto por él. Newton (año 1704), al examinar el descubrimiento de Huygens, prestó atención a que aquí se manifiestan las propiedades fundamentales de la luz (*egenesiacas*, como las llama Newton), gracias a las cuales el rayo posee algo así como cuatro lados, de manera que la dirección que une un par de lados no tiene las mismas propiedades que la dirección perpendicular. Debido a esto, Newton veía en los corpúsculos luminosos cierta semejanza exterior con los imanes poseedores de polos, gracias a lo cual la dirección a lo largo del imán no tiene las mismas propiedades que la dirección perpendicular.

Muchos años después Malus (año 1808) que descubrió semejantes particularidades en la luz reflejada en un vidrio introdujo para la designación de éstas el término *polarización*, al parecer, bajo la influencia de la concepción de Newton.

Después del establecimiento de la naturaleza ondulatoria de la luz el fenómeno de polarización de la luz fue sometido a un estudio minucioso. Los experimentos de Fresnel y Arago de interferencia de rayos polarizados (año 1816) le sugirieron a Joung la suposición acerca del *carácter transversal de las ondas luminosas* Fresnel, independientemente de Joung, también propuso la concepción del carácter transversal de las ondas luminosas, la fundamentó multilateralmente con numerosos experimentos importantes y colocó como base de su explicación los fenómenos de polarización de la luz y de birrefringencia en los cristales

Las dificultades relacionadas con esto consistían en que, en los líquidos y en los gases no pueden tener lugar oscilaciones y ondas transversales Las oscilaciones elásticas en los sólidos aún no habían sido investigados en aquellos tiempos. La teoría de Fresnel acerca de las ondas luminosas transversales dio impulso a la investigación de las propiedades de los sólidos elásticos La aplicación de los conocimientos obtenidos a la óptica trajo consigo una serie de dificultades de principio, relacionadas con la incompatibilidad de las leyes mecánicas de las oscilaciones de un medio elástico con las leyes de los fenómenos ópticos que son observadas en el experimento Estas dificultades fueron superadas sólo con la aparición de la teoría electromagnética de la luz Sin embargo, para el problema que nos interesa acerca del carácter transversal de las ondas luminosas las teorías mecánicas de la luz dieron muchísimo, y es indiscutible que en aquel tiempo ellas fueron muy fructíferas.

§ 102. Propagación de la luz a través de la turmalina

Realicemos el siguiente experimento. Cortemos del cristal de turmalina una lámina T_1 (fig 16 1), el plano de la cual sea paralelo al *eje* (una de las direcciones fijas de la red cristalina). Después a través de la lámina enviemos la luz perpendicularmente a su superficie.

Haciendo girar el cristal alrededor de la dirección del rayo luminoso, no notaremos ningún cambio en la intensidad de la luz que pasa a través de la turmalina, aunque esta última debilitará el rayo luminoso inicial dos veces. De esta manera la onda luminosa incidente sobre la turmalina desde una fuente ordinaria de luz (por ejemplo, desde el arco eléctrico L) no tiene ninguna asimetría con relación a la dirección de su propagación. Sin embargo, al colocar en el camino del rayo una *segunda* lámina análoga de turmalina T_2, paralela a la primera (véase fig. 16.1), la cuestión se complicará.

En dependencia de cómo estén orientadas ambas láminas una con respecto a la otra, variará la intensidad de la luz que pasa a través de ellas. La intensidad resulta ser máxima, si los ejes de ambas láminas son *paralelos*; ella será igual a cero (la luz será retenida com-

pletamente), si los ejes de las láminas son perpendiculares y tendrá un valor intermedio para posiciones intermedias de las láminas. El experimento muestra que la intensidad es proporcional a $\cos^2\alpha$, donde α es el ángulo entre los ejes de ambas láminas.

Se puede dar una explicación completa a los fenómenos observados si se hacen las siguientes hipótesis. Primero, supongamos que las ondas luminosas son transversales, pero que en la luz procedente de la fuente no hay una dirección privilegiada de las oscilaciones, es decir *todas* las direcciones de las oscilaciones perpendiculares a la dirección de la onda están presentes en la luz incidente. Con esto se explica el primer experimento, a pesar de la consideración acerca del carácter transversal de las ondas luminosas. Segundo, consideremos que la turmalina deja pasar sólo las ondas, uno de los vectores transversales de las cuales, por ejemplo, el eléctrico, posee una componente paralela al eje del cristal. Por eso justamente la primera lámina de turmalina debilita en dos veces el haz luminoso inicial. Al pasar la onda luminosa a través de tal cristal se transmitirá sólo la parte de la energía luminosa que corresponde a esta componente. Cuando sobre el cristal inciden ondas luminosas electromagnéticas con todas las posibles orientaciones del vector eléctrico, a través de él pasará solamente una parte de la luz (la mitad), de manera que tras el cristal aparecerán solamente las ondas, la dirección del vector eléctrico de las cuales es paralela al eje del cristal. De esta manera, el cristal *separa* de la luz con todas las posibles orientaciones de E aquella parte que corresponde a una dirección determinada de E. En adelante llamaremos *natural* la luz con todas la posibles orientaciones del vector E (y, por lo tanto, de H) y *polarizada en el plano* o *linealmente polarizada* la luz, en la cual E (y, por lo tanto H) posee una única dirección. De esta manera la turmalina convierte la luz natural en luz linealmente polarizada deteniendo la mitad de ésta que corresponde a aquella componente del vector eléctrico que es perpendicular al eje del cristal.

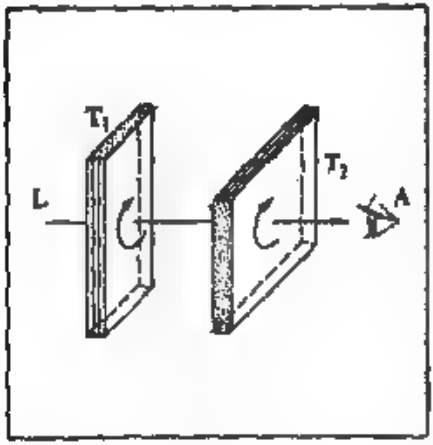


Fig. 16.1. Transmisión de la luz a través de dos láminas de turmalina.

Ahora se comprende el segundo experimento y el rol del segundo cristal de turmalina. Hasta él llega la luz ya polarizada. En dependencia de la orientación de la segunda turmalina de esta luz polarizada pasará una mayor o menor parte, justamente aquella, que

corresponde a la componente del vector eléctrico paralelo al eje del segundo cristal. Debido a que el vector eléctrico de la onda que pasó a través de la primera turmalina tiene, según supusimos, una dirección paralela al eje del primer cristal, la amplitud de la luz que ha atravesado la segunda turmalina será proporcional a $\cos \alpha$ (α es el ángulo entre los ejes de ambas láminas), y la intensidad será proporcional a $\cos^2 \alpha$, lo que se observa en el experimento.

En los marcos de estas hipótesis la luz natural es una luz linealmente polarizada, cuya dirección de las oscilaciones varía rápida y caóticamente con el transcurso del tiempo, o bien es una combinación de rayos linealmente polarizados con todas las posibles orientaciones de oscilaciones

Hasta ahora hemos hablado acerca de la dirección del vector eléctrico paralelo al eje de la turmalina sólo por tratar de algo concreto. Los razonamientos mantendrían su validez, si el vector magnético fuese paralelo al eje de la turmalina. En adelante describiremos los experimentos, con ayuda de los cuales fue establecido que en la luz transmitida a través de la turmalina precisamente el vector eléctrico es el que está orientado paralelamente al eje (véase más adelante § 104).

El plano, en el cual está situado el vector eléctrico, se llama *plano de oscilación* de la luz polarizada, y el plano, en el cual se sitúa el vector magnético, a veces se llama *plano de polarización*. Esta doble terminología, plano de oscilación y plano de polarización, se formó históricamente con el desarrollo de la teoría elástica de la luz y, a pesar de su incomodidad, hasta ahora se conserva en muchos libros. La descripción de los fenómenos se hará más clara y simple, si nos limitamos a indicar solamente *una* de las direcciones, por ejemplo, la dirección de oscilación del vector eléctrico, es decir el plano de oscilación, según la antigua terminología. En adelante, en todas partes donde no se haga ninguna indicación especial, por dirección de la oscilación siempre vamos a sobreentender la del vector *eléctrico*.

El experimento descrito con dos cristales de turmalina, en esencia, no difiere del experimento realizado por primera vez por Huygens con dos cristales de espato de Islandia. La diferencia principal de la turmalina, ventajosa para el experimento descrito, consiste en que la turmalina, siendo también un cristal birrefringente, absorbe muy fuertemente uno de los rayos refractados, de manera que la fina lámina de turmalina transmite prácticamente sólo uno de los dos rayos refractados.

De esta manera, para el observador el fenómeno parecerá más sencillo, ya que no será distraído por el segundo rayo, como ocurre en el caso del espato de Islandia.

§ 103. Polarización de la luz en el caso de reflexión y refracción en el límite de dos dieléctricos

El fenómeno de polarización de la luz, es decir la separación de las ondas luminosas con determinada orientación del vector eléctrico (y magnético), tiene lugar tanto en la reflexión como en la refracción de la luz en el límite de dos dieléctricos isótropos. Esta forma de polarización fue descubierta por Malus, el cual casualmente notó que al girar el cristal alrededor del rayo reflejado en un vidrio, la intensidad de la luz aumenta y disminuye periódicamente, es decir la reflexión en el vidrio es semejante a la transmisión a través de la turmalina. Pero aquí no ocurría un completo apagamiento de la luz para unas determinadas posiciones del cristal y se observaba solamente su intensificación y debilitamiento.

El fenómeno de polarización en la reflexión y sus leyes pueden

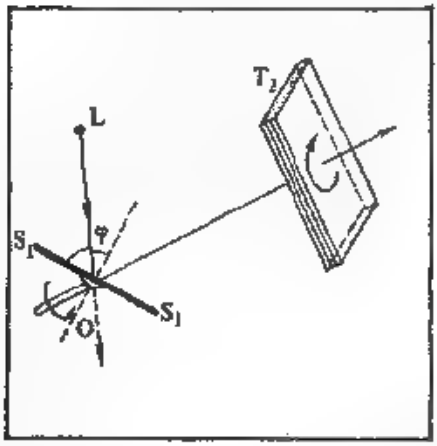


Fig. 16.2. Investigación de la polarización en la reflexión.
S_1S_1, espejo de vidrio que polariza los rayos de luz, T_2, lámina de turmalina que sirve de analizador.

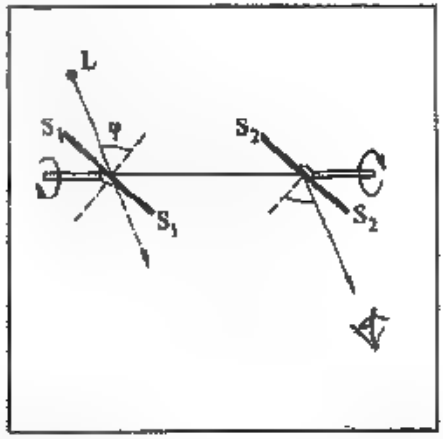


Fig. 16.3. Esquema del aparato para investigar la polarización en la reflexión, en el cual en calidad de polarizador y de analizador se utilizan los espejos de vidrio S_1S_1 y S_2S_2.

ser estudiados de la siguiente manera. Sea que un haz paralelo de luz natural (fig. 16.2) incide sobre el espejo de vidrio S_1S_1 fijado en el eje O con ayuda de una bisagra. Gracias a esta construcción para cualquier ángulo de incidencia nosotros podemos dirigir el eje O a lo largo del rayo reflejado y asegurar de esta manera al espejo la posibilidad de giro alrededor de él. La luz reflejada se investiga con ayuda de la lámina de turmalina T_2, la cual también es capaz de girar alrededor del rayo reflejado. Cuando T_2 gira, el ojo del observador ve un debilitamiento y una intensificación de la luz.

Se comprende que se puede invertir el experimento, es decir cambiar de lugares la fuente de luz y el ojo del observador y utilizar un espejo de vidrio en calidad de analizador.

Por supuesto, se puede también no utilizar turmalina sino dos espejos de vidrio, uno de los cuales, S_1S_1, sirve como polarizador, y el segundo, S_2S_2, como analizador. En la fig. 16.3 se muestra el esquema de este aparato.

El espejo está constituido simplemente por una lámina de vidrio no cubierta por ninguna capa de metal, contrariamente a los espejos de uso doméstico. La presencia de la capa metálica arruinaría el experimento, debido a que la reflexión en el metal ocurre de una manera diferente de como ha sido descrito (véase cap. XXV). En el vidrio común se observa reflexión tanto en su superficie delantera, como en la trasera, para mayor comodidad con frecuencia se utiliza un vidrio cubierto por un lado de pintura negra o un vidrio no transparente (negro). Se puede utilizar también cualquier otro *dieléctrico* pulido, por ejemplo, mármol.

En los experimentos, cuyos esquemas son mostrados en las figs. 16.2 y 16.3, la intensidad de la luz alcanza el *mínimo*, cuando el plano que pasa a través del eje del cristal de turmalina T_2 es paralelo al plano de incidencia sobre el espejo S_1S_1 o cuando los planos de incidencia sobre los espejos S_1S_1 y S_2S_2 son perpendiculares entre sí. La intensidad alcanza su *máximo*, si el viraje de T_2 o S_2S_2 es de 90°. De esta manera, la polarización de la luz que se observa en la reflexión en un dieléctrico resulta *incompleta o parcial*, es decir el rayo reflejado constituye una mezcla de luz natural con cierta parte de luz polarizada. Cambiando el ángulo de inclinación del espejo S_1S_1 con respecto al rayo, nos convencemos que la fracción de luz polarizada depende de la magnitud del ángulo de incidencia φ con la particularidad de que con el aumento del ángulo φ crece la fracción de luz polarizada y para un cierto valor de él el rayo reflejado resultará *completamente* polarizado. La magnitud de este ángulo de *completa polarización* depende del índice relativo de refracción n y se define, como estableció Brewster (año 1815), por la relación

$$\operatorname{tg} \varphi = n \qquad (103.1)$$

(*ley de Brewster*). Al seguir aumentando el ángulo de incidencia la fracción de luz polarizada de nuevo disminuirá. Es fácil mostrar que en el caso de incidencia bajo el ángulo de polarización completa el rayo reflejado y el rayo refractado forman entre sí un *ángulo recto* (véase ejercicio 141).

En lo que se refiere a la dirección de la oscilación en la luz polarizada por la reflexión, las investigaciones muestran (véase § 104) que el vector eléctrico en la luz reflejada en el caso de polarización completa oscila perpendicularmente al plano de incidencia. En el caso de polarización parcial esta dirección de las oscilaciones es

privilegiada, aunque en la luz polarizada parcialmente se encuentran también oscilaciones de otras direcciones.

Si analizamos la luz refractada, nos convenceremos de que ella también está parcialmente polarizada, además, de tal manera, que las oscilaciones se llevan a cabo preferentemente en el plano de incidencia. Uniendo la luz reflejada y la refractada, obtenemos de nuevo el haz inicial no polarizado. De esta manera, la lámina de un dieléctrico transparente *clasifica* los rayos de la luz natural, reflejando preferentemente los rayos con una dirección de oscilación y transmitiendo las oscilaciones perpendiculares. La fracción de luz polarizada en el haz refractado depende del ángulo de incidencia y del índice de refracción de la sustancia.

Si la incidencia se efectúa bajo el ángulo de Brewster la polarización de los rayos refractados es máxima pero lejos de ser completa (para el vidrio común ella alcanza apenas el 15 %). Si los rayos refractados y, por lo tanto parcialmente polarizados, son sometidos a una segunda, tercera y más refracciones entonces, por supuesto, el grado de polarización de los rayos refractados crecerá.

Si se dispone de 8—10 láminas (pila de Stoletov), entonces al incidir bajo el ángulo de Brewster tanto el haz transmitido, como el reflejado resultaran prácticamente de una polarización completa. Las intensidades de los haces reflejado y transmitido serán iguales entre sí y cada una constituirá la mitad de la intensidad del haz incidente (si se puede despreciar la absorción en el vidrio). Las direcciones de la oscilación de los vectores eléctricos en los haces reflejado y transmitido serán mutuamente perpendiculares. Este grupo de láminas, llamado *pila de cristales*, puede, por lo tanto, servir en calidad de polarizador o de analizador tanto en la luz reflejada, como en la transmitida.

La solución completa del problema acerca de la *fracción* de luz polarizada registrable en la reflexión y refracción en el límite de dos dieléctricos, en dependencia del ángulo de incidencia, es expuesta más adelante en el cap. XXIII donde se dan las llamadas fórmulas de Fresnel, de las cuales se deduce, en particular, la ley de Brewster.

§ 104. Orientación del vector eléctrico en la luz polarizada

Hasta el momento nosotros hemos hablado acerca de la dirección del vector eléctrico, aceptando sin demostración que su dirección, al ser éste polarizado por la reflexión, es perpendicular al plano de incidencia, y siendo polarizado por la turmalina, coincide con el eje de la turmalina. Wiener logró efectuar los experimentos que demuestran esta afirmación.

Anteriormente (véase § 23) fueron descritos experimentos del mismo autor, los cuales mostraron que la acción fotográfica es ejerci-

da por el vector eléctrico de la onda luminosa (por eso lo llaman vector *luminoso*). Una modificación especial del experimento con ondas estacionarias permitió resolver el problema acerca de la dirección del vector eléctrico en la luz polarizada.

Obliguemos la luz linealmente polarizada a incidir bajo un ángulo exactamente igual a 45° sobre el espejo metálico M (fig. 16.4, *a*), la superficie del cual está cubierta con la capa P de emulsión fotosensible. De esta manera, él representa una placa fotográfica con una capa intermedia especular por debajo*). Es fácil notar que debemos esperar diferentes resultados en dependencia de si está el vector luminoso (eléctrico) orientado en forma perpendicular al plano de incidencia o si se encuentra en este plano. En el primer caso (véase fig. 16.4, *b*) al ser reflejada la luz, el vector eléctrico conservará su dirección paralela a sí misma, y por lo tanto, la onda incidente

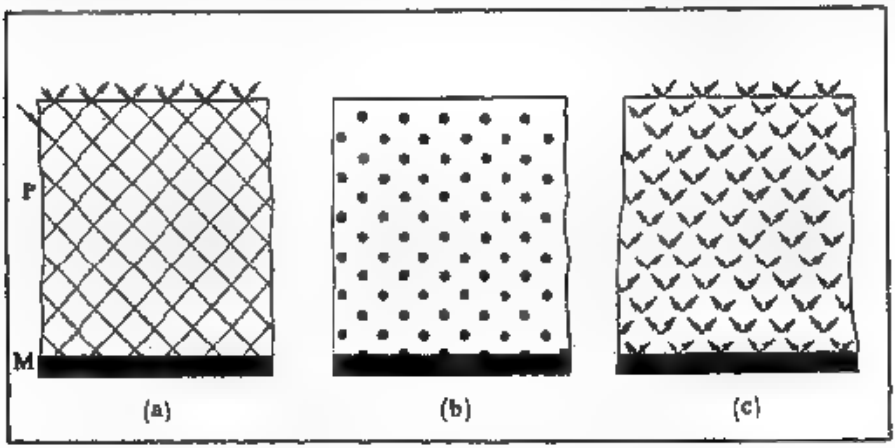


Fig. 16.4. Modificación del experimento de Wiener.

y la reflejada podrán interferir dando orígen a las ondas estacionarias con una distribución espacial de nodos y vientres y con la correspondiente distribución laminar de la plata desprendida (compare con § 23).

Pero si el vector électrico se encuentra en el plano de incidencia, entonces después de la reflexión él girará junto con el frente de onda un ángulo de 90°. De esta manera, los vectores eléctricos en la onda incidente y en la reflejada forman entre sí un ángulo recto (fig. 16.4, *c*) de manera que es imposible la interferencia entre ellas. La resultante del vector eléctrico en todo el grosor de la emulsión conserva un valor invariable y no se observe ningun desprendimiento laminar

*) En el análisis de estos experimentos se puede considerar que la reflexión en el metal no influye mucho en el carácter de la polarización de la luz. Efectos más finos en el caso de reflexión en un metal serán analizados posteriormente.

de plata. De esta manera, se puede establecer, cómo está orientado el vector eléctrico en la luz polarizada enviada al espejo M, y por lo tanto, determinar la dirección del vector eléctrico para los diferentes casos concretos de polarización. Estos experimentos mostraron que en el caso de polarización con la turmalina el vector eléctrico tiene la dirección paralela al eje de la turmalina; en el caso de polarización ocasionada por la reflexión en un dieléctrico él se encuentra en el plano perpendicular al de reflexión (incidencia) y en el caso de refracción por un dieléctrico, en el plano de refracción (incidencia), etc.

§ 105. Ley de Malus

El funcionamiento de los diferentes aparatos polarizadores o analizadores examinados anteriormente (turmalina, espejo de vidrio, pila de cristales, etc.) es típico para todos los dispositivos de este género. Las direcciones de oscilaciones de. vector eléctrico (magnético) de la luz natural siempre son «clasificadas» por estos aparatos de tal manera que en un haz es escogida preferentemente (o completamente) la emisión con una dirección de oscilaciones eléctricas, y en otro, la emisión con dirección perpendicular de las oscilaciones electricas. La unión de ambos haces da de nuevo luz natural. A veces el fenómeno se complica un tanto debido a que uno de estos haces experimenta una absorción más o menos completa (turmalina, dieléctrico no transparente). Las dos direcciones mutuamente perpend.-culares de oscilaciones en los dos haces, que se forman en la polarización, dependen de las particularidades físicas del polarizador utilizado, en el caso de la turmalina (y de otros cristales) ellas son condicionadas por la estructura del cristal, en el caso del espejo, por la dirección del plano de incidencia, etc. A estas direcciones escogidas se les puede llamar planos principales P_1 y P_2, además $P_1 \perp P_2$.

Si la luz natural pasa a través de dos aparatos polarizadores, cuyos planos correspondientes forman entre sí un ángulo φ, entonces la intensidad de la luz que ha pasado a través de este sistema será proporcional a $\cos^2 \varphi$. Esta ley fue formulada por Malus en el año 1810 y ha sido comprobada por las escrupulosas mediciones fotométricas de Arago, el cual construyó un fotómetro a base de este principio. Es interesante notar que Malus dedujo su ley basándose en las concepciones corpusculares acerca de la luz. Desde el punto de vista ondulatorio la ley de Malus constituye un corolario del teorema de la descomposición de los vectores y de la afirmación que la intensidad de la luz es proporcional al *cuadrado* de la amplitud de onda luminosa. De esta manera la ley de Malus puede ser considerada como la demostración directa experimental de esta afirmación.

La ley de Malus es la base para el cálculo de la intensidad de la luz que pasa a través del polarizador y el analizador en todos los posibles aparatos de polarización

§ 168. Luz natural

Para finalizar comparemos otra vez las definiciones de luz natural y polarizada. *Luz natural* es el conjunto de ondas luminosas con todas las direcciones posibles de oscilaciones, los cuales cambian rápida y desordenadamente unas a otras; este conjunto es estadísticamente simétrico con respecto a la normal ondulatoria, es decir se caracteriza por el carácter desordenado de las direcciones de las oscilaciones.

La luz linealmente polarizada o *polarizada en el plano* constituye ondas luminosas con única dirección de las oscilaciones (un único cruce de $\vec{E}$ y $\vec{H}$), es decir ondas con una dirección completamente ordenada de las oscilaciones. También existen tipos más complejos de oscilaciones ordenadas, a las cuales les corresponden otros tipos de polarización, por ejemplo, la polarización *circular* o *elíptica*, en las cuales el extremo del vector eléctrico (magnético) barre un círculo o una elipse con cierta excentricidad (véase más adelante el cap. XVIII).

La luz parcialmente polarizada se caracteriza por lo que una de sus direcciones resulta ser la privilegiada, pero no la única. La normal ondulatoria ya no es la recta, con relación a la cual las direcciones de las oscilaciones del vector eléctrico (magnético) desde el punto de vista estadístico son igualmente posibles en el plano que es normal a esta recta. La luz parcialmente polarizada puede ser considerada como una mezcla de luz polarizada y natural.

La mayoría de las fuentes (cuerpos incandescentes, gases luminosos) emite una luz cercana a la natural, aunque casi siempre se notan algunas huellas de polarización, lo que se explica por la emisión de las capas más profundas de la sustancia. Esta emisión pasa a través de determinada capa y experimenta una polarización parcial parecida a la que aparece al pasar a través de una capa de dieléctrico.

Existen los argumentos suficientes para suponer que la luz emitida por cualquier átomo conserve invariable el carácter de polarización en un transcurso de tiempo muy grande en comparación con el período de oscilación. En efecto, la interferencia de los haces luminosos (inclusive los emitidos por fuentes no láser) puede llevarse a cabo para una diferencia muy grande de recorrido (hasta un millón de longitudes de onda), y por consiguiente, cuando interfieran entre sí las ondas emitidas al comienzo y al final del intervalo de tiempo que contiene un millón de oscilaciones. La posibilidad de que en este caso aparezca interferencia demuestra que el estado de polarización se conserva durante un número grande de oscilaciones. De esta

manera, la emisión de *algunos* átomos en condiciones favorables (gas enrarecido) puede conservar invariable no sólo su fase inicial, sino también la orientación de las oscilaciones en el transcurso de un tiempo bastante largo ($\sim 10^{-6}$ s).

Sin embargo nosotros tenemos que observar simultáneamante la emisión de un número inmenso de átomos que emiten luz diferentemente polarizada. Además cada átomo después de algunos cientos de miles de oscilaciones empieza a emitir luz con un nuevo estado de polarización. De esta manera, generalmente se observa una multitud de todas las posibles orientaciones de E y H y un cambio rápido de estas orientaciones, lo que constituye justamente la luz natural. Hasta que la luz procedente de los átomos emisores llegue al observador, ella puede experimentar una serie de interacciones que llevan consigo cierta polarización, la que generalmente casi no notamos. Sólo en condiciones especiales de observación (luz que ha sufrido difusión en la atmósfera; luz reflejada en la superficie de agua, etc.) la fracción de luz polarizada puede crecer considerablemente.

---

17. POLARIZACION EN EL CASO DE BIRREFRINGENCIA *

§ 107. Birrefringencia y polarización de la luz al pasar ésta a través del cristal de espato de Islandia

El espato de Islandia constituye una variedad del carbonato de calcio ($CaCO_3$) cristalizable en forma de cristales del sistema hexagonal. El posee una birrefringencia muy bien expresada. Debido a que los cristales de espato de Islandia que se encuentran en la naturaleza son bastante grandes y ópticamente puros, no es sorprendente que precisamente en este objeto se observó por primera vez el fenómeno de birrefringencia y se descubrió la polarización de la luz relacionada con ella. Hasta ahora el espato de Islandia sigue siendo el mejor material para el estudio y la demostración de estos fenómenos y también para la fabricación de instrumentos ópticos que utilizan la polarización de la luz, a pesar de que en la actualidad se conoce una cantidad grande de cristales naturales y artificiales con propiedades parecidas.

El cristal de espato de Islandia puede ser fácilmente recortado en forma de romboedro, además los rombos que lo limitan tienen los

---

*) En el presente capítulo se exponen solamente conocimientos preliminares acerca del paso de la luz a través del cristal de espato de Islandia, los cuales son necesarios para la comprensión de la polarización de la luz. En el capítulo XXVI se analizará más detalladamente el problema acerca del paso de la luz a través de los cristales.

ángulos 101°52′ y 78°08′ (fig. 17.1). Si sobre este cristal incide un estrecho haz de luz, entonces al refractarse él dará dos haces con direcciones algo diferentes. Si el haz incidente es lo suficientemente estrecho, y el cristal lo suficientemente grueso, entonces de él saldrán dos haces paralelos al inicial (como en toda transmisión a través de una lámina planoparalela), separados en el espacio.

Incluso en el caso, cuando el haz primario es normal a la cara natural del cristal, es decir el ángulo de incidencia es igual a cero, el rayo refractado se divide en dos con la particularidad de que uno de ellos constituye la continuación del haz primario, y el segundo se desvía de manera que el ángulo de refracción es distinto de cero (fig. 17.2).

Este hecho, al igual que un conjunto de otras divergencias de las leyes corrientes de refracción, sobre las cuales se hablará más adelan-

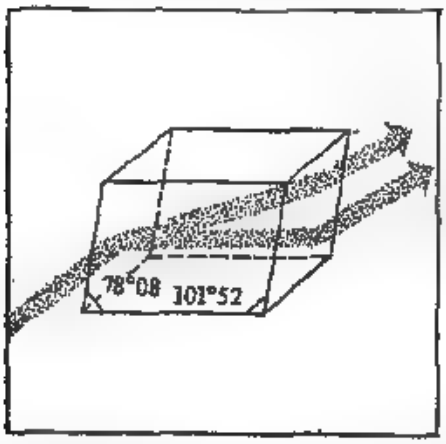


Fig. 17.1. Transmisión de la luz a través del cristal de espato de Islandia (birrefringencia).

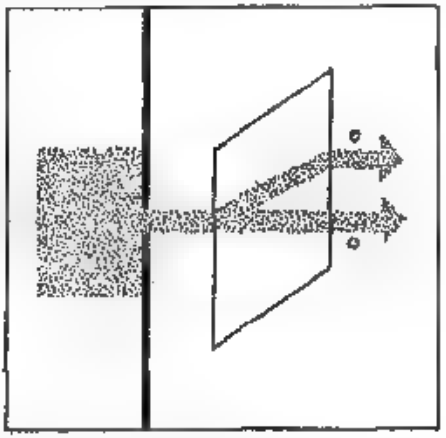


Fig. 17.2. Birrefringencia de la luz incidente en forma normal sobre la cara natural del cristal de espato de Islandia.

te, dieron motivo para denominar al segundo de estos rayos como rayo *extraordinario* (*e*), conservando para el primero la denominación de rayo *ordinario* (*o*). La diferencia en la desviación de ambos rayos muestra que en relación a ellos el cristal posee diferentes índices de refracción. Al investigar el fenómeno para distintas direcciones de los rayos refractados dentro del cristal, se puede descubrir que en el cristal de espato de Islandia para uno de los rayos (el ordinario) el índice de refracción tiene un mismo valor para todas las direcciones, mientras que el índice de refracción del otro rayo (extraordinario) depende de la dirección.

En el cristal de espato de Islandia existe una dirección determinada, a lo largo de la cual ambos rayos refractados se propagan sin desdoblarse y con una misma velocidad, como en un medio isótropo

ordinario Esta dirección forma determinados ángulos con las aristas del cristal natural; en el caso de un pedazo de cristal que tiene la forma de un romboedro ella es paralela a la diagonal que une a los ángulos obtusos del romboedro. A esta dirección se acostumbra llamar *eje óptico* del cristal. La existencia del eje óptico en el espato de Islandia se demuestra fácilmente en un pedazo de cristal, en el cual a ambos lados han sido cortados y rectificados dos planos perpendiculares a la diagonal señalada (fig. 17.3, *a* y *b*). El haz de luz dirigido en forma perpendicular a los planos pulidos pasará a través del cristal sin desdoblarse. Si estos planos son lo suficientemente grandes, entonces podremos convencernos de que la dirección perpendicular a ellos en *cualquier lugar* posee la propiedad del eje óptico. En otras palabras, cualquier recta paralela a la dirección encontrada servirá de eje óptico del cristal.

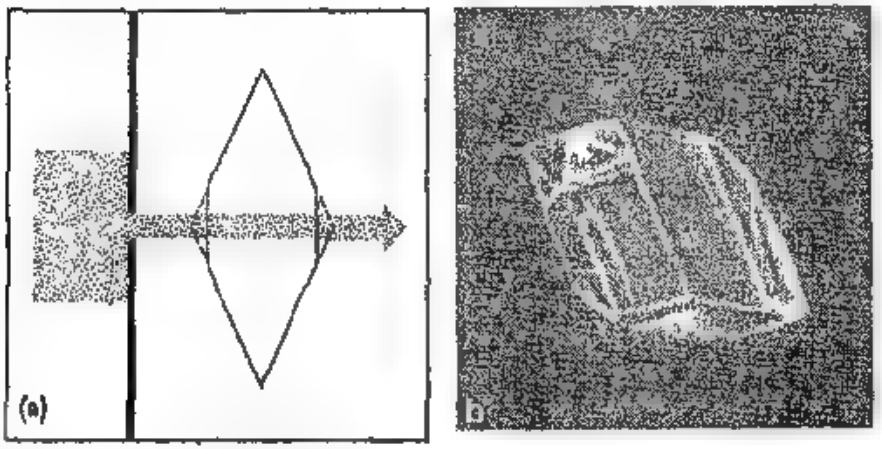


Fig. 17.3. a) No se observa birrefringencia cuando la luz es transmitida a lo largo del eje óptico del espato de Islandia. b) Cristal natural de espato de Islandia, en el cual han sido cortadas por rectificación dos áreas perpendiculares al eje óptico.

De esta manera, el eje óptico del cristal constituye una *dirección* determinada en el cristal, y no una línea cualquiera escogida, lo que es completamente comprensible, ya que los sectores del cristal deberán poseer propiedades idénticas. Así, el eje óptico puede ser trazado a través de cualquier punto del espato de Islandia El plano que pasa a través del eje óptico y la normal ondulatoria de las ondas en propagación lleva el nombre de *plano de la sección principal* o, más abreviadamente, *plano principal.*

Examinemos un poco más detalladamente el experimento, en el cual un haz luminoso incide normalmente sobre la cara natural del

cristal. Tracemos el plano principal a través del rayo incidente (a través de la normal al cristal). El experimento muestra que dentro del cristal van dos rayos, uno de los cuales (ordinario) es la continuación del incidente, y el segundo (extraordinario) está desviado y junto con el primero se encuentra en el plano principal. Del cristal salen dos rayos dispuestos en el plano principal y paralelos al incidente, pero desplazados uno con respecto al otro. Al hacer girar el cristal alrededor de la dirección del rayo incidente uno de los rayos refractados se mantendrá inmóvil y el segundo girará alrededor del primero.

Si se investiga ambos haces que salen, con ayuda de la turmalina o de un espejo de vidrio, se descubrirá que ambos están completamente polarizados, y además en planos mutuamente perpendiculares. Las oscilaciones del vector D de la onda ordinaria se llevan a cabo perpendicularmente al plano principal, y de la extraordinaria, en el plano principal. Las propiedades de ambos rayos a la salida del cristal, a excepción de la dirección de polarización, por supuesto, no se diferencian en nada, por lo cual la denominación extraordinarios tiene sentido sólo dentro del cristal. La intensidad de ambos rayos es igual*), si sobre el cristal incide luz natural.

Si se obliga a uno de los haces a la salida del primer cristal a incidir normalmente sobre la cara del segundo cristal, entonces obtendremos nuevamente dos haces, los cuales se encuentran en el plano principal del *segundo* cristal y son polarizados de la misma manera, como antes, con relación al plano principal del segundo cristal. De este modo, la dirección de polarización depende solamente de la orientación del cristal y no depende de si está polarizada la luz incidente sobre él o es natural. Sin embargo, la intensidad de ambos haces en el caso de un rayo incidente polarizado dependerá del ángulo α entre la dirección de oscilaciones en el rayo incidente polarizado y el plano principal del segundo cristal. En efecto, en el segundo cristal la dirección de oscilaciones en el rayo extraordinario, las cuales se encuentran en el plano principal del segundo cristal, formará el ángulo α con la dirección de oscilaciones en la luz incidente polarizada, y la dirección de oscilaciones en el rayo ordinario formará con ella el ángulo $\pi/2 - \alpha$. Si la amplitud de la onda incidente sobre el segundo cristal es igual a A, entonces las amplitudes de ambas ondas que salen del cristal serán correspondientemente igua-

*) Hacemos recordar que nosotros describimos los fenómenos que ocurren en el cristal de espato de Islandia. Ellos son típicos para un grupo grande de cristales que poseen un *eje óptico* y que llevan el nombre de cristales *uniáxicos*. La cuestión se complica en los llamados cristales *biáxicos*, donde ninguno de los rayos puede ser llamado ordinario. En muchos cristales uniáxicos y biáxicos la absorción de las dos ondas que se propagan en el cristal es diferente. Un ejemplar típico de este cristal es la turmalina, en la cual el rayo ordinario es absorbido prácticamente por completo ya para un espesor alrededor de 1 mm (véase § 106).

les a

$a = A \operatorname{sen} \alpha$ (para la onda ordinaria),
$b = A \cos \alpha$ (para la onda extraordinaria),
y las intensidades de ellas se relacionarán como

$$\frac{I_a}{I_e} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha. \qquad (107.1)$$

El experimento corrobora completamente estos cálculos. Por ejemplo, si colocamos dos cristales uno tras otro y, reteniendo uno de los rayos, observamos sobre la pantalla las huellas de los dos haces I_a e I_e, en los cuales se dividirá el segundo, entonces sus intensidades relativas dependerán de la orientación mutua de los cristales. Haciendo girar el cristal alrededor del rayo ordinario un ángulo de 360°, haremos girar alrededor de él la pequeña mancha producida por el rayo extraordinario, además la relación de sus intensidades variará en correspondencia con la formula $I_a/I_e = \operatorname{tg}^2 \alpha$ (véase ejercicio 146).

§ 108. Dispositivos de polarización

En el parágrafo anterior mencionamos que los índices de refracción de los cristales para el rayo ordinario y para el extraordinario no son iguales. Así, para el espato de Islandia $n_a = 1{,}658$, y n_e en dependencia de la dirección del rayo puede tomar valores entre 1,486 y 1,658. Los cristales, para los cuales, al igual como para el espato de Islandia, $n_e \leqslant n_a$, se denominan cristales *negativos*. Los cristales, para los cuales $n_e \geqslant n_a$ (por ejemplo, el cuarzo) llevan el nombre de *positivos*.

La utilización del espato de Islandia para la separación de rayos polarizados en direcciones mutuamente perpendiculares está basada en la gran diferencia de n_a y n_e. Con este fin se puede utilizar un cristal de espato de Islandia, colocando delante de su cara un diafragma pequeño (véase fig. 17.2). Reteniendo uno de los rayos obtendremos un haz polarizado en cierta dirección.

Sin embargo, es muchísimo más cómodo utilizar no simples cristales, sino sus correspondientes combinaciones, que llevan el nombre de *prismas de polarización*. Se utilizan prismas de dos tipos: prismas, de los cuales sale un haz polarizado en algún plano (prismas de polarización), y prismas que dan dos haces polarizados en planos mutuamente perpendiculares (prismas birrefringentes). Los primeros generalmente se construyen a base de la reflexión interna total de uno de los rayos en algún límite de separación, mientras que el otro rayo, con otro índice de refracción, pasa a través del límite (Nicol, año 1828). En segundo lugar, se utiliza la diferencia en los índices de refracción del rayo ordinario y del extraordinario, lo que permite

apartarlos lo más lejos posible uno del otro. Los más usados son los siguientes tipos de prismas.

a. *Prismas de polarización.* El prisma de Nicol está constituido por un prisma de espato de Islandia cortado como se indica en la fig. 17.4. El prisma se corta por la línea AA' y se pega con bálsamo del Canadá, el índice de refracción del cual $n = 1{,}550$ se encuentra entre los valores n_0 y n_e para el rayo ordinario y el extraordinario.

El eje óptico forma un ángulo de 48° con la cara de entrada. Para un ángulo conveniente de incidencia sobre la cara del prisma el rayo ordinario experimenta una reflexión interna total en la capa de bálsamo del Canadá y es *absorbido* por la cara inferior ennegrecida (en los prismas grandes para evitar el calentamiento de éstos el rayo es *sacado* del cristal con ayuda de un pequeño prisma que ha sido pegado al cristal y que es mostrado en la fig. 17.4 con la línea punteada). El rayo extraordinario sale del cristal en forma paralela a la cara $A'C$. La apertura más grande del haz luminoso, con la cual todavía se obtiene la polarización lineal de la luz que sale del prisma, es igual a 29°.

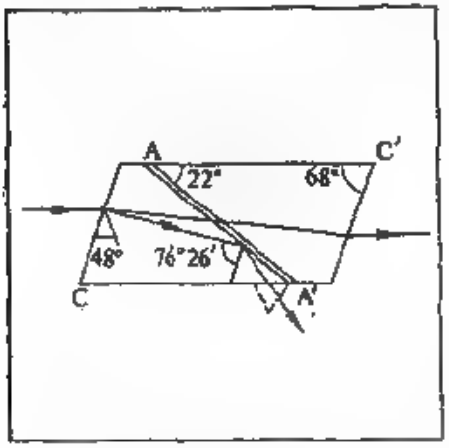


Fig. 17.4. Prisma de polarización de Nicol.

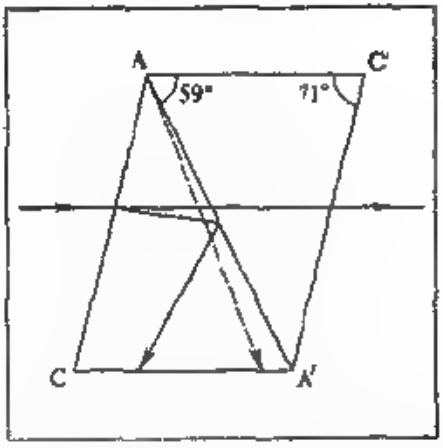


Fig. 17.5. Prisma acortado de polarización con una capa intermedia de aire.

Otros tipos de prismas de polarización mostrados en las figs. 17.5 y 17.6 también se confeccionan de espato de Islandia. La línea punteada en la fig. 17.5 indica la dirección del eje óptico. Ambas mitades están unidas con la capa intermedia de aire AA'; la relación de las aristas $AC'/AC = 0{,}9$. Para un ángulo conveniente de incidencia de la luz sobre el prisma el rayo ordinario experimenta reflexión interna total en la capa intermedia de aire y el rayo extraordinario pasa a través de ella. La apertura del haz luminoso incidente, con la cual la luz que pasa a través del prisma se polariza todavía

completamente, forma apenas 8°, lo que es considerablemente menos ventajoso que en el caso del prisma de Nicol; en cambio este prisma es mucho más corto y, por lo tanto más barato (para determinada sección transversal). Además, él puede utilizarse para la emisión ultravioleta, debido a que no tiene el encolamiento de bálsamo del Canadá que absorbe la luz ultravioleta.

En el prisma representado en la fig. 17.6 las caras de entrada y de salida han sido cortadas perpendicularmente a las aristas, lo que asegura comodidades más grandes en su utilización. El eje óptico es paralelo a AB. El encolamiento se realiza con bálsamo del Canadá o con glicerina. Existen muchísimos prismas parecidos de diferente estructura

En el caso de encolamiento con glicerina ($n = 1{,}474$), la cual es transparente para la emisión próxima ultravioleta, las características

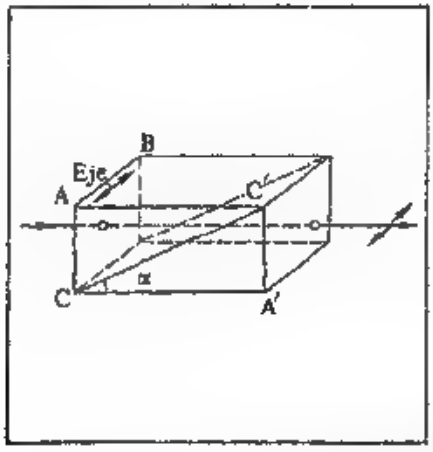


Fig. 17.6. Prisma de polarización con la cara frontal perpendicular a las aristas.

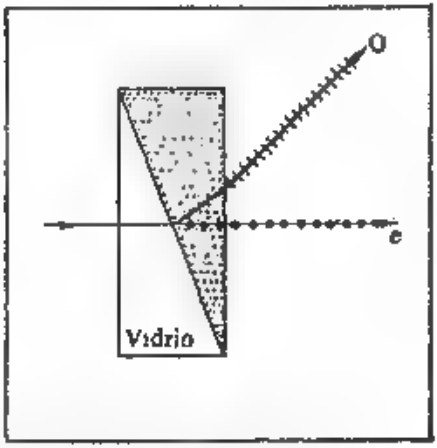


Fig. 17.7. Prisma birrefringente hecho de espato de Islandia y de vidrio.

del prisma son las siguientes:

$\alpha = 17°20'$, $AC'/AC = 3{,}2$, apertura $32°6'$.

El prisma del tipo indicado se hace también con capa intermedia de aire (Glan); sus características: $\alpha = 50°$, $AC'/AC = 0{,}85$, apertura $8°6'$; él es apto para la emisión ultravioleta.

b. *Prismas birrefringentes.* 1 *Prisma de espato de Islandia y vidrio* (fig. 17.7). El eje óptico es perpendicular al plano del dibujo, $n_o = 1{,}66$, $n_{vidrio} = 1{,}49$, $n_e = 1{,}486$. El rayo ordinario se refracta en el espato y en el vidrio dos veces y se desvía fuertemente. El rayo extraordinario sale casi sin desviación, debido a que el índice de refracción del vidrio ha sido escogido próximo a n_e.

2. *Prismas de dos pedazos de espato de Islandia con diferente dirección de los ejes ópticos.*

La estructura y el funcionamiento de ellos se comprenden de la fig. 17.8. La diferencia en la orientación de los ejes ópticos influye sobre el ángulo de divergencia entre los rayos. La apertura admisible del haz incidente en todos estos prismas no es grande. A veces los prismas birrefringentes se hacen de cuarzo; entonces, por supuesto, debido a la menor diferencia entre n_o y n_e los ángulos de divergencia de los haces luminosos o y e se obtienen considerablemente menores.

c. *Láminas dicroicas.* En otro principio se basan los dispositivos de polarización, el representante más simple de los cuales es la turmalina. La turmalina constituye un cristal birrefringente, en el cual uno de los rayos (el ordinario) es absorbido mucho más intensamente que el otro. Por eso ambos rayos, polarizados en planos mu-

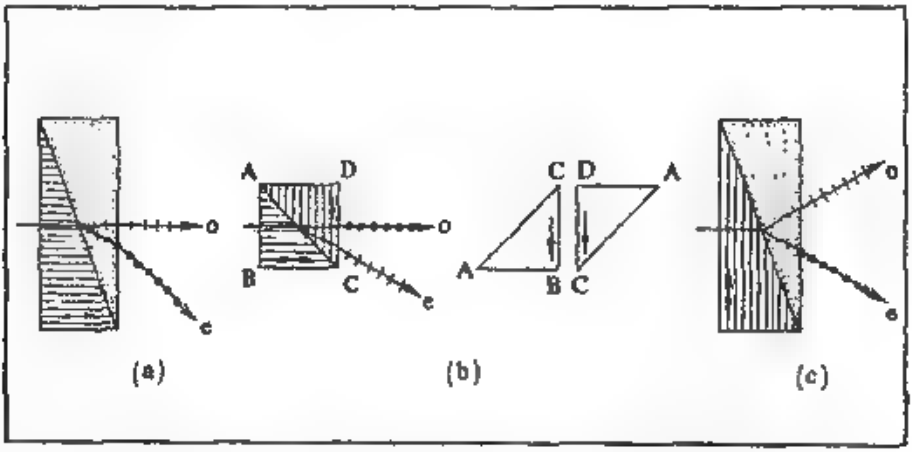


Fig. 17.8. Diferentes prismas birrefringentes de espato de Islandia.

a, el prisma de Rochon; el ángulo entre los rayos o y e depende del ángulo refringente del prisma; el rayo o es acromático. b, el prisma de Sénarmont; el ángulo ACB es próximo a 45°, lo que permite utilizar económicamente el cristal inicial, al cortarlo a lo largo del eje CB y pegándolo a lo largo de la vena natural AC; c, el prisma de Wollaston. El asegura un desdoblamiento simétrico de los rayos; el ángulo entre o y e es aproximadamente dos veces mayor que en el prisma de Rochon, pero ambos rayos manifiestan cromatismo.

tuamente perpendiculares, salen de la lámina de turmalina con intensidades bastante diferentes y la luz que ha pasado a través de ella resulta parcialmente polarizada. Si se toma una lámina de turmalina lo suficientemente gruesa (cerca de 1 mm), entonces en el caso de luz visible el rayo ordinario será absorbido prácticamente por completo y la luz emergente será polarizada en el plano.

Para ciertos sectores del espectro visible el rayo extraordinario también experimenta una notable absorción y por eso la turmalina con el grosor escogido resulta coloreada; la turmalina no sólo es un polarizador, sino también un filtro luminoso que transmite prácticamente la región verde-amarilla del espectro visible. Esta circunstan-

cia es, por supuesto, una gran desventaja de la turmalina como dispositivo polarizador, pero, por otro lado, la apertura permisible del haz de rayos incidentes sobre ella es bastante grande, lo que a veces juega un importante papel.

La diferencia en la absorción de los rayos de distinta polarización trae consigo la diferencia en la absorción de la luz natural en dependencia de la *dirección* de su propagación, ya que de esta última depende la orientación del vector eléctrico de la onda con respecto a las direcciones cristalográficas. Tal diferencia en la absorción que además depende de la longitud de onda lleva a que el cristal resulte coloreado de distintas maneras según las diferentes direcciones. Este fenómeno se llama *dicroismo* (o, mejor, *pleocroismo*, es decir multicoloración) y en mayor o menor grado caracteriza, al parecer, a todos los cristales birrefringentes. El fue descubierto por Cordier (año 1809) en el mineral llamado cordierita. El dicroismo de la turmalina fue descubierto por Biot y Seebeck (año 1816).

En los últimos tiempos una particular importancia adquirieron las sustancias dicroicas gracias al invento de los *polaroides*. El polaroide es una película de un cristal muy fuertemente dicroico, la herapatita (yodosulfato de quinina) obtenida por Herapath en el año 1852. La escama de herapatita con un grosor próximo a 0,1 mm absorbe prácticamente por completo uno de los rayos, siendo en tan fina capa un polarizador lineal perfecto.

Han sido propuestos varios métodos para la obtención de superficies suficientemente grandes cubiertas por los pequeños cristales igualmente orientados de herapatita y que constituyen, de esta manera, dispositivos de polarización con gran superficie. Las hojas de celuloide elaboradas según este método fueron puestas a la venta en el año 1935 con el nombre de *polaroides*. En la actualidad existen algunas variedades de láminas dicroicas que son fabricadas como polaroides, con utilización tanto de la herapatita como de otros compuestos, así como en forma de grandes (con dimensiones lineales de hasta 60 mm) láminas cristalinas de herapatita, etc. El defecto de las láminas dicroicas es la menor transparencia en comparación con los prismas de espato de Islandia y su cierta selectividad, es decir la dependencia de la absorción de longitud de onda, de manera que los polaroides modernos transmiten la región violeta, y también la roja, del espectro, polarizándolas sólo parcialmente. Estas insuficiencias, sin embargo, para muchos fines prácticos se redimen por la posibilidad de utilizar en calidad de polaroides un dispositivo barato de polarización no sólo con una apertura cercana a 180°, sino también con una gran superficie (de unos cuantos decímetros cuadrados). Una de las aplicaciones han encontrado los polaroides en el automovilismo para la defensa de los choferes de la acción cegadora de los faros de los carros que vienen al encuentro (véase ejercicio 150).

18. INTERFERENCIA DE RAYOS POLARIZADOS

§ 108. Experimentos de Fresnel y Arago y su importancia para la teoría elástica de la luz

Como ya se mencionó en el § 18, la interferencia de dos ondas coherentes se realiza de manera más efectiva en el caso, cuando las direcciones de oscilaciones en los haces interferentes *coinciden*. Nosotros también vimos que el método de Fresnel para la obtención de dos haces coherentes asegura en los experimentos comunes de interferencia la conservación del estado de polarización de las ondas interferentes.

La posibilidad de obtener ondas luminosas polarizadas en cualquier plano permite plantear el problema acerca de la interacción de las ondas, cuyas oscilaciones son mutuamente perpendiculares. Los experimentos fundamentales en esta dirección fueron realizados por Arago y Fresnel (año 1816). Ellos mostraron que si en un experimento común de interferencia en el camino de los dos haces interferentes se interponen dispositivos de polarización que aseguren la polarización mutuamente perpendicular de ellos, entonces no habrá interferencia. Pero si hacemos girar uno de estos dispositivos de polarización un ángulo de 90°, como resultado de lo cual las direcciones de las oscilaciones en ambos haces coincidirán, entonces el cuadro de interferencia se manifestará muy bien y observaremos una distribución común de máximos y mínimos. Las franjas de interferencia se verán también para orientaciones intermedias de los polarizadores, pero con menor visibilidad.

Un experimento análogo al hecho por Arago y Fresnel puede ser efectuado de la siguiente manera. En los haces interferentes igualmente polarizados introduzcamos los polaroides complementarios N_1 y N_2*). Si N_1 y N_2 están orientados de tal manera que las direcciones separadas de las oscilaciones en ambos haces coinciden, entonces se observará un cuadro corriente de interferencia. Pero si giramos uno de los polaroides un ángulo de 90°, entonces el campo visual se volverá homogéneo y no habrá ninguna huella de la alternación de las intensidades. El cuadro de interferencia se restaurará, si también hacemos girar el segundo polaroide un ángulo de 90° (casos más complejos véase en § 148).

*) Nosotros suponemos que los polaroides son lo suficientemente idénticos para no comunicar a los rayos interferentes una diferencia adicional de recorrido. En caso contrario, sería necesario introducir en el recorrido de los rayos unas láminas compensadoras. Fresnel y Arago utilizaron en calidad de polarizadores unas pilas compuestas de 15 hojillas de mica, también son útiles algunos ejemplares de ágata, que poseen una estructura laminar muy expresada con una suficiente transparencia.

Es muy grande el significado histórico de los experimentos de este tipo. Ellos mostraron que en la superposición de dos ondas coherentes polarizadas en direcciones mutuamente perpendiculares la intensidad resultante es igual a la suma de las intensidades de las ondas superpuestas. Pero en la adición de oscilaciones esto ocurre, sólo si las oscilaciones son rigurosamente perpendiculares. En efecto, sólo entonces $A^2 = a^2 + b^2$ (A es la amplitud resultante, y a y b, las amplitudes de las oscilaciones que se suman). De esta manera, de los experimentos de Fresnel y Arago se deduce que en el caso de las ondas luminosas polarizadas en direcciones mutuamente perpendiculares las oscilaciones luminosas son *rigurosamente* perpendiculares entre sí. Esto significa que en la onda luminosa está completamente ausente la componente *longitudinal*. Tal deducción, natural en los marcos de la teoría electromagnética de la luz, fue hecha en su tiempo por Young y Fresnel aún en los marcos de la teoría elástica de la luz, pero entonces condujo a dificultades muy serias. La suposición acerca de la existencia de un medio material, en el cual sea posible la propagación de oscilaciones rigurosamente transversales e imposible la propagación de oscilaciones longitudinales era incompatible con la concepción acerca de un medio elástico común (inclusive sólido), lo que obligaba, para la comprensión de las leyes de reflexión y refracción de la luz, a hacer consideraciones con relación a las condiciones límites que son incompatibles con la mecánica de los medios comunes.

A pesar de la dificultad señalada, estos experimentos y las numerosas consecuencias corroboradas experimentalmente, que de ellos sacó Fresnel, obligaron a reconocer el carácter transversal de las ondas luminosas.

§ 110. Polarización elíptica y circular de la luz

La ausencia de la alternación interferencial de las intensidades en los experimentos análogos a los de Fresnel y Arago, no significa, sin embargo, que la interacción de dos oscilaciones luminosas mutuamente perpendiculares no puede conducir a variaciones en el haz luminoso accesibles a la observación en el experimento.

Examinemos el resultado de la sumación de dos ondas luminosas coherentes polarizadas en dos direcciones *mutuamente perpendiculares* que tienen diferente amplitud y poseen cierta *diferencia de fases*. Nosotros podemos fácilmente realizar en el experimento este caso de la siguiente manera. La luz de determinada longitud de onda*) que ha pasado a través del polarizador N, es decir, que se ha vuelto linealmente polarizada, es transmitida a través de la lámina de

*) Es decir, perteneciente a un limitado intervalo espectral. En el caso de una no monocromaticidad considerable es necesario tomar en cuenta la indicación hecha al final del presente parágrafo.

cristal K de grosor d, la cual ha sido cortada de un cristal uniáxico paralelamente a su eje óptico (fig. 18.1); además supongamos que la dirección del haz es perpendicular a la superficie lateral K. A través de la lámina se propagarán en *una* dirección, pero con *diferente* velocidad dos ondas polarizadas en dos direcciones mutuamente perpendiculares que generalmente son denominadas como *direcciones principales* de la lámina de cristal. En una de las ondas las oscilaciones eléctricas están dirigidas a lo largo del eje óptico del cristal, por ejemplo, de CC (el rayo extraordinario, índice de refracción n_e); en la otra, en forma perpendicular al eje, es decir, según BB (rayo ordinario, índice de refracción n_0).

Si la dirección de las oscilaciones del vector eléctrico en la luz incidente polarizada forma un ángulo α con una de las direcciones principales de la lámina, entonces las amplitudes de oscilaciones en

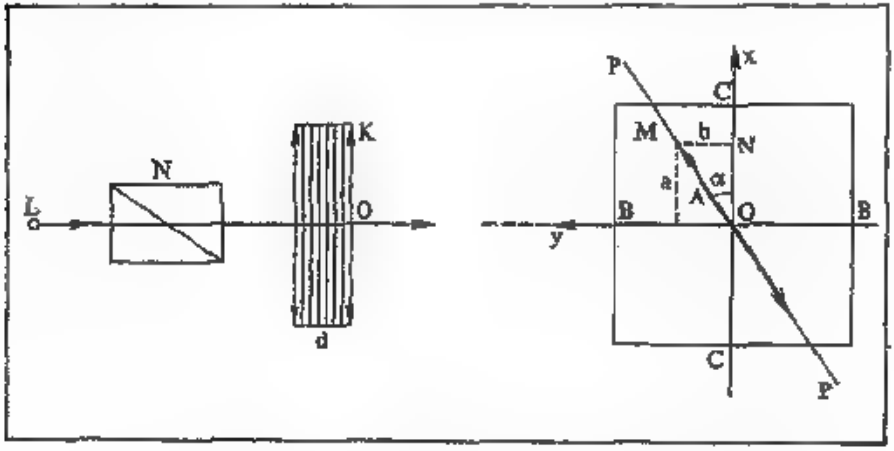


Fig. 18.1. Esquema de obtención de luz elípticamente polarizada.
L, fuente de luz; K, lámina cristalina, a la derecha se muestra la descomposición del vector luminoso por las direcciones principales de la lámina.

la onda extraordinaria y en la ordinaria serán respectivamente iguales a

$$a = A \cos \alpha, \quad b = A \operatorname{sen} \alpha,$$

donde $A = OM$ es la amplitud de la onda incidente. Al pasar a través del grosor d de la lámina, estas dos ondas adquirirán una *diferencia de recorrido* igual a $(n_0 - n_e)\, d$. Por lo tanto, la onda ordinaria se retrasará en fase con respecto a la extraordinaria en la magnitud

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_0 - n_e)\, d. \qquad (110.1)$$

La sumación de dos oscilaciones mutuamente perpendiculares con diferentes amplitudes y con diferencia de fase producirá la

formación de una oscilación *elíptica*, es decir una oscilación, en donde el extremo del vector resultante describe una elipse en el plano del frente ondulatorio con la misma frecuencia angular ω, con la cual se realizan las oscilaciones iniciales.

En efecto, las oscilaciones en las ondas que han pasado la lámina, se describen por las relaciones

$$\left.\begin{aligned} x &= A\cos\alpha\cos\omega t = a\cos\omega t, \\ y &= A\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos(\omega t-\varphi) = b\cos(\omega t-\varphi). \end{aligned}\right\} \qquad (110.2)$$

Para obtener la trayectoria de la oscilación resultante es necesario eliminar el tiempo de estas ecuaciones. Tenemos

$$\cos\omega t = x/a,\quad y = b\,(\cos\omega t\cos\varphi+\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathrm{sen}\,\varphi),$$

o

$$\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathrm{sen}\,\varphi = \frac{y}{b} - \frac{x}{a}\cos\varphi.$$

Elevando esta expresión al cuadrado y sumándola con

$$(\cos\omega t\,\mathrm{sen}\,\varphi)^2 = \frac{x^2}{a^2}\,\mathrm{sen}^2\varphi,$$

obtendremos

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\varphi = \mathrm{sen}^2\varphi. \qquad (110.3)$$

es decir la ecuación de una elipse. La forma de la elipse y su orientación respecto a los ejes x e y dependen de los valores α y φ.

De este modo, después de pasar la luz linealmente polarizada a través de la lámina de cristal obtenemos, en forma general, una onda luminosa, los extremos de los vectores E y H de la cual describen elipses. Esta luz se llama *elípticamente polarizada*.

Examinemos algunos casos particulares.

a) El grosor de la lámina es tal que la diferencia de recorrido de dos ondas es de un cuarto de longitud de onda (*lámina de 1/4 de onda*):

$$(n_0-n_e)\,d = {}^1/_4\,\lambda$$

o

$$(n_0-n_e)\,d = \left(m+\frac{1}{4}\right)\lambda,\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (110.4)$$

En este caso $\varphi = \pi/2$ y la ecuación de la elipse tendrá la forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

es decir obtendremos una elipse orientada respecto a los ejes principales de la lámina. La relación de las longitudes a y b de sus semiejes depende de la magnitud del ángulo α.

En particular, para $\alpha = 45°$ hallamos $a = b$, de manera que la elipse se reduce al círculo descrito por la ecuación

$$x^2 + y^2 = a^2. \qquad (110.5)$$

Por consiguiente, en el caso dado tenemos una luz *polarizada en círculo* (polarización *circular*). Así, para obtener luz polarizada en círculo, es necesario sumar dos ondas coherentes con iguales amplitudes, polarizadas en dos planos mutuamente perpendiculares y que posean una diferencia en fase de $\pi/2$. Esto se puede alcanzar, en particular, si se hace pasar la luz linealmente polarizada a través de la lámina de cuarto de onda, de tal manera que el plano de polarización de la onda inicial forme un ángulo de 45° con las direcciones principales en la lámina.

Para lograr una diferencia de recorrido de un cuarto de onda, se puede utilizar una lámina de mica *) de grosor de 0,027 *mm* = = 27 μm (para la luz amarilla emitida por la llama del sodio).

A pesar de que la fabricación de tales láminas no representa ninguna dificultad, con mayor preferencia se utilizan láminas más gruesas que dan una diferencia de recorrido igual a $(m + 1/4)\,\lambda$, donde m es cierto número entero (véase ejercicio 153).

En dependencia de la orientación de las láminas de un cuarto de onda, la diferencia de fases adquirida es igual a $+\pi/2$ ó $-\pi/2$, es decir la componente a lo largo del eje Ox adelanta o atrasa en fase $\pi/2$ a la componente a lo largo del eje Oy. En correspondencia con esto el vector resultante gira *en contra* del sentido de las agujas del reloj (a la izquierda) o según las agujas del reloj (a la derecha). Por eso se acostumbra diferenciar la polarización elíptica o circular *dextrógira* y *levógira*.

b) La lámina es tal que la diferencia de recorrido de los dos rayos forma la mitad de la longitud de onda (*lámina de 1/2 onda*):

$$(n_0 - n_e)\,d = {}^1/_2\lambda$$

o bien

$$(n_0 - n_e)\,d = (m + 1/2)\,\lambda, \qquad (110.6)$$

es decir

$$\varphi = \pi \text{ ó } \varphi = 2\pi m.$$

En este caso la elipse se degenera a una recta

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \qquad (110.7)$$

*) La mica representa un cristal biáxico (véase § 145), en el cual el concepto de rayo ordinario pierde sentido. Pero debido a que el fenómeno de birrefringencia tiene lugar en la mica, entonces con ayuda de la lámina de mica también se puede crear cierta diferencia de recorrido para las dos componentes mutuamente perpendiculares.

es decir la luz queda linealmente polarizada, pero la dirección de las oscilaciones pasará, por ejemplo, de los cuadrantes 1—3 a los cuadrantes 2—4, haciendo un giro de $180°-2\alpha$ (fig. 18.2).

c) Lámina de una longitud entera de onda luminosa (*lámina de* 1λ):

$$(n_0 - n_e)d = \lambda \text{ ó } m\lambda,$$

es decir

$$\varphi = 2\pi \text{ ó } \varphi = 2\pi m. \qquad (110\,8)$$

La elipse se transforma en la recta

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0. \qquad (110.9)$$

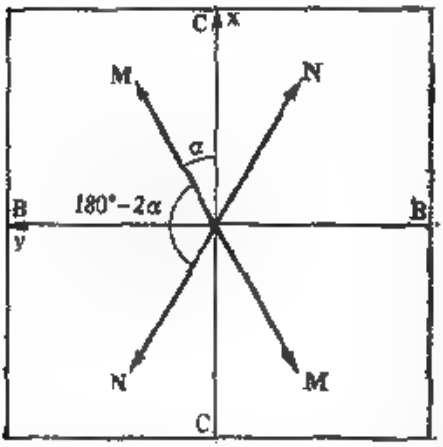


Fig. 18.2. Acción de la lámina de 1/8 onda.

Después de pasar a través de la lámina la dirección MM de las oscilaciones pasa de los cuadrantes 1—3 a los cuadrantes 2—4 (NN), girando a un ángulo de $180°-2\alpha$.

es decir el rayo se mantiene polarizado linealmente sin variación de la dirección de las oscilaciones.

Todos los razonamientos anteriores se referían a la luz de determinada longitud de onda, es decir a un pequeño intervalo espectral En el caso de una variedad considerable en las longitudes de onda es necesario tomar en consideración que los índices de refracción para ambas ondas dependen de la longitud de onda (dispersión) con la particularidad de que la diferencia de éstos también cambia con la longitud de onda. Gracias a esta circunstancia se puede utilizar el paso de la luz polarizada a través de un cristal para separar dos longitudes cercanas de onda (monocromador de polarización de Wood) (véase ejercicio 166).

§ 111. Estructura interna de la luz natural

En todos los razonamientos del parágrafo anterior se suponía que la luz incidente sobre la lámina cristalina era *linealmente polarizada*. Si la luz incidente fuese natural (es decir si se le podría representar como un conjunto de numerosas ondas polarizadas en todas las direcciones posibles), entonces la luz emergente de la lámina representaría un conjunto de ondas polarizadas elípticamente sin ninguna

orientación privilegiada de las elipses, es decir seguiría siendo luz natural. Por eso para obtener con ayuda de una lámina cristalina luz elípticamente polarizada es necesario que luz incidente sobre ella sea preliminarmente polarizada linealmente. Sin embargo, también el paso de la luz *natural* a través de la lámina cristalina introduce ciertas variaciones en su estructura interna, convirtiendo, por ejemplo, la luz natural, compuesta de un conjunto de ondas polarizadas planamente con todas las orientaciones posibles, en una luz también natural, pero constituida por un conjunto de ondas elípticamente polarizadas con todas las direcciones posibles. Esta variación puede ser descubierta en el experimento, como mostró S. I. Vavílov.

Dividamos algún haz de luz natural en dos haces coherentes recurriendo a alguno de los conocidos esquemas interferométricos.

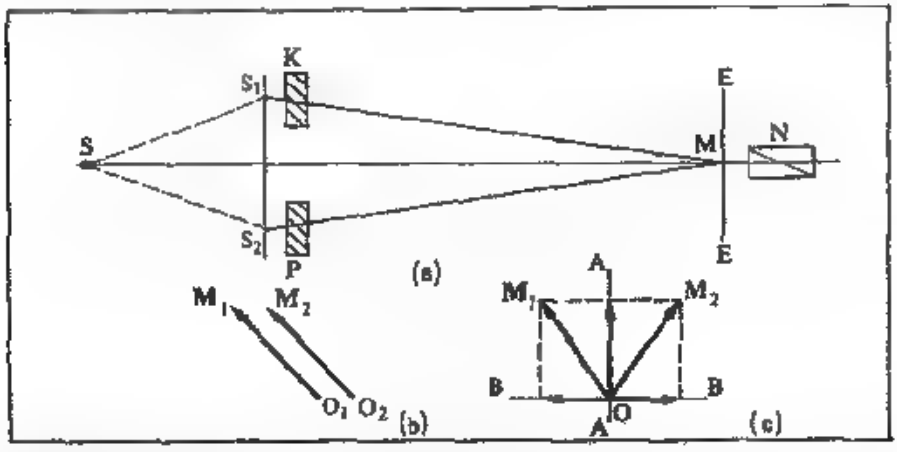


Fig. 18.3. Esquema del experimento de S. I. Vavilov para aclarar la estructura interna de la luz natural.

a, esquema general: S, fuente de luz natural; S_1 y S_2, sus dos imágenes coherentes; K, lámina de media onda, P, lámina compensadora, EE, plano de observación; N, polarizador. b, dirección de los vectores luminosos en las ondas procedentes de S_1 y S_2 antes de pasar a través de las láminas K y P. c, direcciones de los vectores luminosos después de que la luz pase a través de las láminas K y P.

Al encontrarse, los haces darán un cuadro común de interferencia, por ejemplo, con el máximo en el centro del campo. Ahora coloquemos en el camino de uno de los rayos interferentes de luz natural una lámina cristalina de media onda *K* e introduzcamos en el segundo haz una lámina de vidrio *P* debidamente escogida que asegure la compensación de la diferencia de recorrido aparecida (fig. 18.3). Ahora los haces interferentes que se encuentran, a pesar de mantenerse coherentes, *no darán* el cuadro esperado de interferencia: el campo resultará uniformemente iluminado. En esto se ha manifestado la variación de la estructura interna de la luz natural, acerca de la cual hablamos anteriormente.

Para aclarar lo que sucede, consideremos la luz natural en el haz inicial como un conjunto de ondas linealmente polarizadas con todas las posibles direcciones de polarización. En aquella parte de luz que pasa a través de la lámina de media onda se efectuará un giro de la dirección de polarización (transición de los cuadrantes 1—3 a los cuadrantes 2—4) (véase § 110, *b*). De esta manera, las direcciones de los vectores luminosos en los haces coherentes que eran iguales cuando no había ninguna lámina (véase fig. 18.3, *b*) ahora, gracias a la acción de la lámina sobre uno de los haces, resultarán no coincidentes (véase fig. 18.3, *c*). Los resultados de la interferencia serán diferentes en dependencia del ángulo entre los vectores OM_1 y OM_2, de manera que en promedio no habrán ni máximos ni mínimos; sin embargo, no se puede decir que obtendremos el mismo cuadro desordenado, como en el caso de superposición de rayos incoherentes.

Descompongamos cada uno de los vectores luminosos en dos componentes según AA y BB orientadas en la dirección de las bisectrices entre los vectores. Cada par de componentes, por ser coherentes y tener *una* sola dirección, interfieren entre sí. Sin embargo, la acción de la lámina de media onda se manifestó en que las componentes según AA conservaron su diferencia de fase inicial, mientras que las componentes según BB resultaron complementariamente desplazadas en fase en π (ya que las proyecciones de estas en BB están dirigidas a *distintos* lados). Por esto las primeras darán un cuadro de interferencia con el máximo, al igual que antes, en el centro del campo, y las segundas un cuadro de interferencia con el *mínimo* en el centro del campo, es decir un cuadro desplazado en 1/2 franja con respecto al primero. Y debido a que las intensidades de una y otra componente en promedio son iguales (en la luz natural no hay ninguna dirección privilegiada de oscilación), ambos cuadros de interferencia igualmente claros y desplazados en 1/2 franja no darán ninguna interferencia observable.

Sin embargo esta interferencia «latente» puede «revelarse»: si se mira la pantalla a través de un prisma de polarización orientado paralelamente a AA, entonces él extinguirá todas las componentes con dirección según BB, y dejará ver el cuadro de interferencia con el máximo en el centro del campo. Haciendo girar el polarizador paralelamente a BB, detendremos todas las oscilaciones con dirección según AA y veremos el segundo cuadro complementario de interferencia con el mínimo en el centro del campo. Por supuesto, en el caso de un polarizador dispuesto bajo un ángulo de 45° con respecto a AA y BB, al igual que antes no será notable la interferencia.

Este experimento interesante realizado por S. I. Vavílov permite descubrir «la polarización elíptica de la luz natural», resultado que a primera vista puede parecer paradójico.

§ 112 Descubrimiento y análisis de la luz polarizada elíptica y circularmente

El descubrimiento de las particularidades de la luz elípticamente polarizada está relacionado con ciertas dificultades.

Al utilizar para el análisis de la luz algún dispositivo de polarización*), obtendremos los siguientes resultados. A través del polarizador pasará sólo la parte de la luz que corresponde a la componente de las oscilaciones transmitidas por él; es fácil ver que la amplitud de la luz transmitida depende de la orientación del plano principal *NN* del polarizador con respecto a los ejes de la elipse.

La amplitud A es igual a la mitad de la longitud del lado paralelo a *NN* del rectángulo, en el cual está inscrita la elipse (fig. 18.4). Cuando se hace girar el nicol, gira también el rectángulo.

La amplitud será máxima ($A = b$), cuando el plano *NN* coincida con el eje mayor de la elipse, y mínima ($A = a$), si él es paralelo al eje menor Por esto cuando el polarizador gira nosotros obtenemos un oscurecimiento o aclaramiento parcial del campo, es decir se observará el mismo cuadro como cuando se investiga con un polarizador la luz parcialmente polarizada. En particular, si la luz está polarizada en círculo, es decir $a = b$, entonces la rotación del polarizador no influirá en nada sobre la intensidad de la luz transmitida, es decir veremos el mismo cuadro como en la investigación con un polarizador de la luz natural. De esta manera, el análisis con ayuda del polarizador no permite diferenciar la luz elípticamente polarizada de la parcialmente polarizada, y la circularmente polarizada de la natural.

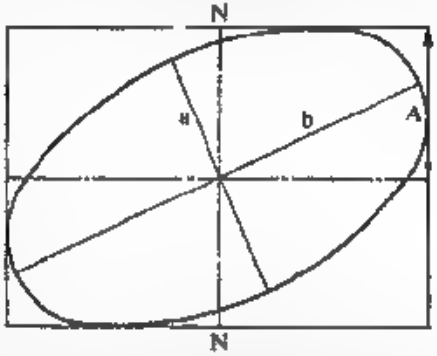


Fig. 18.4. Dependencia de la intensidad de la luz elípticamente polarizada que pasa a través del nicol con respecto a la orientación de este último.

Para un análisis completo es necesario transformar la luz elíptica o circularmente polarizada en planamente polarizada, cuyo análisis se realiza fácilmente con ayuda de un prisma de polarización.

El método de obtención de luz polarizada en el plano de emisión con polarización elíptica o circular se comprende de la observación de las relaciones citadas en § 110. Es suficiente compensar la diferencia de fase φ entre las componentes perpendiculares haciéndola llegar

*) Los dispositivos de polarización utilizados para el análisis del carácter de polarización de la luz con frecuencia se llaman *analizadores*.

a π ó 2π (o a cero. Con este fin se puede hacer pasar la luz estudiada a través de una lámina cristalina auxiliar de conveniente grosor u orientación.

a *Utilización de láminas de 1/4 de onda para la compensación de la diferencia de fases.* En el haz luminoso elípticamente polarizado entre las componentes orientadas a lo largo de los ejes principales de la elipse (en el circularmente polarizado, entre las componentes dirigidas a lo largo de los dos diámetros arbitrariamente escogidos y mutuamente perpendiculares) existe una diferencia de fases de $\pi/2$. Haciendo pasar la luz investigada a través de la lámina de $^1/_4\lambda$, nosotros aumentaremos $\pm\pi/2$ a esta diferencia, es decir compensaremos la diferencia de fases que se tiene reduciéndola a cero o a π. De esta manera, la luz investigada se volverá planamente polarizada, de lo que podemos convencernos con ayuda de un polarizador común. Con el fin indicado en el caso de un haz circularmente polarizado se puede orientar la lámina de $^1/_4\lambda$ como se quiera, en el caso de un haz elípticamente polarizado es necesario orientarla de tal manera, que las direcciones principales de la lámina coincidan con los ejes principales de la elipse, los cuales han sido determinados preliminarmente con ayuda de un polarizador. De esta manera, el análisis se realiza con ayuda de una lámina de $^1/_4\lambda$ y del polarizador. Con el método indicado también se puede determinar la dirección de rotación (polarización dextrógira o levógira), para lo cual no es necesario saber con anticipación, cuál de las dos oscilaciones en la lámina de $^1/_4\lambda$ utilizada se propaga con mayor velocidad.

b *Utilización de compensadores para el análisis de luz elípticamente polarizada.* Para un análisis cuantitativo de la luz elípticamente polarizada es necesario saber la forma y la disposición de la elipse con respecto a cualquier dirección, es decir la diferencia de fases de dos componentes mutuamente perpendiculares de cualquier dirección.

Para este fin sirven los instrumentos capaces de compensar hasta cero (o complementar hasta π) cualquier diferencia de fase. Estos instrumentos se llaman *compensadores*. Como ejemplo consideremos el *compensador de Babinet*. El está compuesto de dos cuñas, generalmente de cuarzo, cortadas de tal manera que sus ejes estén orientados bajo ángulo recto uno con respecto al otro (fig. 18.5).

La luz que pasa en diferentes lugares a través del compensador obtiene una u otra diferencia adicional de recorrido entre las dos componentes de las oscilaciones del vector luminoso en dependencia de la diferencia de los grosores de las cuñas en el lugar dado. Designando el grosor en la primera mitad de la cuña mediante d_1, y en la segunda, mediante d_2, encontraremos que la diferencia adicional de recorrido entre las componentes (una, que se encuentra en el plano del dibujo, y la otra, perpendicular a él) es igual a

$$(n_e d_2 + n_o d_1) - (n_o d_2 + n_e d_1) = (n_e - n_o)(d_1 - d_2). \qquad (112.1)$$

De esta manera, en el compensador de un cristal positivo ($n_e > n_0$) la luz que pasa por la línea donde $d_1 > d_2$ adquiere una diferencia adicional de recorrido; por la línea, donde $d_1 = d_2$, la diferencia inicial de fase se mantendrá invariable; por la línea, donde $d_1 < d_2$, la diferencia de recorrido disminuirá.

La luz elípticamente polarizada, al pasar a través de determinados lugares del compensador (los cuales complementan la diferencia de fases de las componentes paralelas a los planos principales del compensador hasta 0, 2π, 4π, etc.), se convierte en luz linealmente polarizada de una sola dirección. Es fácil ver que tales sectores del compensador están dispuestos a iguales distancias uno del otro. Si se coloca detrás del compensador B un polarizador N orientado de la manera correspondiente, entonces todos estos lugares resultarán oscuros (serie de franjas oscuras equidistantes y paralelas a la arista

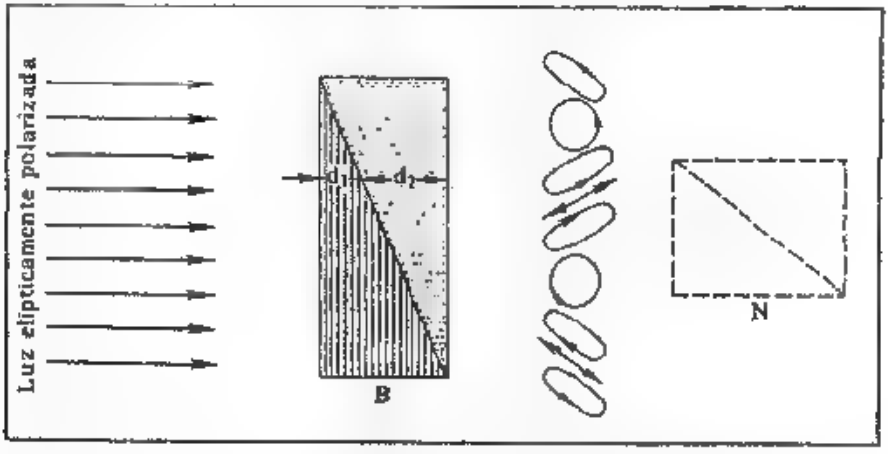


Fig. 18.5. Análisis de la luz elípticamente polarizada con ayuda del compensador y polarizador.

B, compensador de Babinet. La luz que pasa a través de los diversos sectores del compensador tiene diferentes estados de polarización.

del compensador; véase fig. 18.6, en donde está representado el aspecto del compensador mostrado en la fig. 18.5 al ser observada la superficie de éste a través de un polarizador). Para otra orientación del polarizador se puede obtener una serie de franjas oscuras equidistantes que corresponden a los lugares del compensador, donde la diferencia de fases adicional complementa la diferencia inicial de fase hasta π, 3π, 5π, etc.

Conociendo el grosor de las cuñas y el material, del cual están hechas, se puede calcular (o graduar preliminarmente) la diferencia adicional de fase y de esta manera determinan la diferencia de fase que caracterizaba luz elíptica dada. En la fig. 18.5, en forma esquemática se muestra la variación de esta diferencia de fase para la luz

que pasa a través del compensador en diferentes lugares de éste. Ella es igual (de abajo a arriba) a —45, 0, 45, 90, 135, 180, 225, 270 y 315°. Las cuñas con frecuencia se hacen movibles una con respecto a la otra y entonces los cálculos se realizan según el *desplazamiento* de las cuñas, el cual produce determinada disposición de las franjas, por ejemplo, la aparición de una franja oscura en el centro del campo (en la cruz del ocular). Para un trabajo práctico son más cómodos los compensadores, toda la superficie del campo visual de los cuales representa una región de una misma fase adicional, además esta última puede ser variada según nuestro deseo. Uno de los compensadores de este tipo está descrito en los ejercicios (véase ejercicio 164).

Debido a que para todos los métodos de investigación cuantitativa de la luz polarizada se exige la determinación del ángulo de giro (del polarizador, de la lámina de $^1/_4\lambda$ o del compensador), generalmente, los instrumentos de polarización son dotados de monturas con buenas divisiones angulares.

Fig. 18.6.

En el presente capítulo está descrito el método de obtención de luz polarizada elíptica o circularmente en el caso de transmisión de luz linealmente polarizada a través de una lámina cristalina. Sin embargo, esto está lejos de ser el único modo de creación de los tipos indicados de polarización. La polarización elíptica se observa en la reflexión de luz linealmente polarizada en un metal y en el caso de reflexión interna total; la polarización circular aparece a veces en estos procesos, y también en la acción del campo magnético sobre los átomos emisores (véase el efecto Zeeman) y en otros fenómenos. Se sobreentiende, que cualquiera que fuese el proceso que provoca la aparición de luz polarizada elíptica o circularmente, los métodos de análisis de ésta serán los mismos que los descritos en el presente parágrafo.

ESCALA
DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

19. RAYOS INFRARROJOS, ULTRAVIOLETAS Y ROENTGEN

En los capítulos anteriores fueron discutidas detalladamente las diversas propiedades de la luz, las cuales indican la naturaleza ondulatoria de ella (interferencia, difracción) y las cuales permiten establecer el carácter transversal de las ondas luminosas (polarización). De paso varias veces hemos notado que las ondas luminosas constituyen ondas electromagnéticas. En adelante encontraremos numerosas y variadas demostraciones de la naturaleza electromagnética de las ondas luminosas.

Examinemos ahora las particularidades de las ondas electromagnéticas relacionadas con la longitud de éstas

§ 113. Rayos infrarrojos y ultravioletas

Aquel conjunto de ondas electromagnéticas que se llama *luz* (a veces *luz visible*) constituye un estrecho intervalo de longitudes de ondas contenidas aproximadamente entre los 400 y 800 nm. Ellas actúan directamente sobre el ojo humano produciendo una excitación específica en su retina, la cual lleva a la percepción luminosa. Como consecuencia de esto el indicado intervalo de longitudes de onda juega un papel particular para el hombre, a pesar de que por sus propiedades físicas él en principio no se diferencia de las ondas electromagnéticas más cortas o más largas continuas a él. A pesar de que los límites de la sensibilidad del ojo son subjetivos, no obstante la rápida caída de la sensibilidad del ojo humano en los extremos de este intervalo (compárese con § 8) justifica las denominaciones especiales para las regiones vecinas del espectro.

En los mismos comienzos del siglo XIX fue introducido el concepto de los rayos *infrarrojos* y *ultravioletas*. La existencia de ondas

infrarrojas fue establecida en el año 1800 por Herschel, el cual observó el calentamiento de un termómetro sensible, sobre el que incidía la emisión del Sol con longitudes de onda mayores que las del extremo rojo del espectro. Herschel descubrió también que estos rayos se subordinan a las mismas leyes de reflexión y refracción que la luz visible.

En el año 1801 Ritter y simultáneamente Wollaston descubrieron que en el espectro solar tras su parte violeta se tiene una emisión invisible que actúa químicamente sobre el cloruro de plata (emisión ultravioleta). Posteriormente fueron establecidos también otros métodos de investigación tanto de la emisión ultravioleta como de la infrarroja.

El descubrimiento de la fotografía y sus éxitos jugaron un papel decisivo en la investigación de los rayos ultravioletas, ya que la placa fotográfica resulta bastante sensitiva a éstos. La investigación de la emisión ultravioleta es cómodo también realizar utilizando la capacidad de ésta de excitar la luminiscencia (fluorescencia o fosforescencia) y provocar el efecto fotoeléctrico. También se puede fotografiar la emisión infrarroja utilizando las placas fotográficas procesadas con un método especial (sensibilización, véase cap. XXXV). Sin embargo, de esta manera se logra alcanzar solamente una longitud de $\lambda = 1{,}2-1{,}3$ μm. Mucho más grande es la sensibilidad a los rayos infrarrojos en las modernas células fotoeléctricas y en las fotorresistencias, con ayuda de los cuales se puede registrar una emisión infrarroja aproximadamente de hasta 100 μm. Utilizando la influencia de los rayos infrarrojos sobre la luminancia de la fosforescencia (véase cap. XXXVIII), se logró investigar la región del espectro de hasta 1,7 μm. Sin embargo, el método térmico aplicable para cualquier longitud de onda es hasta nuestros días muy propagado al trabajar con la emisión infrarroja, especialmente para las longitudes de onda mayores que 2 μm. Por supuesto, en este caso se utilizan termómetros bastante sensibles, especialmente eléctricos (los bolómetros superconductores y los comunes y los termopares) que permiten constatar un aumento de temperatura de una millonésima de grado (10^{-6} K).

Utilizando receptores que absorban completamente toda la energía calorífica incidente sobre éstos (cuerpo negro, véase cap. XXXVI), sabiendo la capacidad calorífica del receptor y tomando en consideración las pérdidas de calor, se puede valorar en unidades absolutas la energía traída por los rayos, según el aumento de la temperatura, lo que en principio constituye una ventaja del método calorífico. Es utilizado para las *mediciones* de la energía radiante de todas las longitudes de onda incluyendo también las ultravioletas, especialmente en aquellos casos cuando se desea obtener datos cuantitativos acerca de la distribución de la energía según el espectro del cuerpo emisor. En la fig. 19.1 se muestra en forma esquemática esta distri-

bución para el espectro solar. Para otras fuentes (por ejemplo, lámpara de incandescencia o de vapor de mercurio) la distribución de la energía según las longitudes de onda puede diferir substancialmente de la mostrada. A pesar del carácter universal del método calorífico y la posibilidad de obtención de magnitudes comparables entre sí, generalmente, es más cómodo utilizar para diferentes intervalos de longitudes de onda los procedimientos especiales citados anteriormente.

En el estudio de la emisión infrarroja con una gran longitud de onda la principal dificultad consiste en la búsqueda de una fuente lo suficientemente potente de estas ondas. Una fuente común de emisión infrarroja es un cuerpo caliente. Para una temperatura pequeña la intensidad de la emisión es insignificante; con el aumento de temperatura la potencia total de la energía emitida crece rápidamente, pero el máximo de la emisión corresponde a ondas cada vez más cortas, de manera que la energía de los rayos de gran longitud crece no muy considerablemente. En la actualidad se observan ondas infrarrojas de una longitud aproximadamente igual a 1 mm. La creación de ondas electromagnéticas más largas resulta ser más cómoda según el método de excitación de oscilaciones electromagnéticas, utilizado por primera vez por Hertz y que se analiza en el estudio acerca de la electricidad. Como se sabe, con este método también se obtienen las ondas electromagnéticas relativamente largas que se utilizan en la radiotécnica (ondas con longitud de unas decenas de centímetros, metros y kilómetros). En los últimos años con el método de oscilaciones eléctricas han sido obtenidas ondas electromagnéticas también muy cortas, de una longitud de varias décimas de milímetro. De esta manera, las ondas con una longitud de unas décimas de milímetro pueden ser obtenidas tanto por el método de emisión por cuerpos incandescentes (como las infrarrojas) como por el de oscilaciones eléctricas (similarmente a las de Hertz). En otras palabras, las regiones de ondas infrarrojas y hertzianas se superponen y se tiene una transición continua de la luz visible a las ondas electromagnéticas con una longitud de onda tan larga como se quiera.

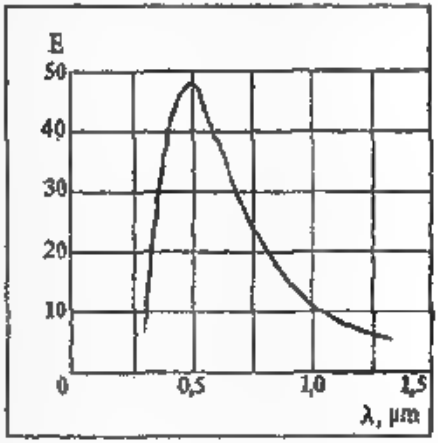


Fig. 19.1. Distribución de la energía en el espectro del Sol.

En la investigación del intervalo entre las ondas infrarrojas y hertzianas un importante rol jugaron los trabajos de los científicos

rusos (P. N. Lébedev, M. A. Levitskaia, A. A. Arkádieva-Glagóleva).

La propagación de nuestros conocimientos a la región de ondas ultravioletas también se realizaba muy lentamente. La principal dificultad en la investigación de éstas consiste en que las ondas ultravioletas cortas son fuertemente retenidas por las diferentes sustancias. El vidrio común es poco apto para las investigaciones de la emisión ultravioleta. Se utilizan especiales clases de vidrio (transparentes aproximadamente hasta 300—290 nm) o cuarzo (transparente aproximadamente hasta 180 nm). Para ondas más cortas se tiene que utilizar la óptica de fluorita (aproximadamente hasta 120 nm). También son muy propagados los vidrios obtenidos artificialmente. Los mejores ejemplares de cristales de fluoruro de litio son transparentes hasta los 180 nm. Para ondas aun más cortas no hay un material adecuado según su transparencia para los prismas y lentes, y se debe utilizar la óptica de reflexión: espejos cóncavos y redes de refracción reflexivas. Sin embargo, para una emisión ultravioleta tan corta tampoco son transparentes los gases a presión normal. Se observa una notable absorción en el oxígeno (y en el aire) ya para 180 nm. Por esto para las investigaciones con ondas más cortas se utilizan instalaciones espectrales, de las cuales ha sido extraído el aire (espectrógrafos al vacío). La segunda dificultad consiste en que la gelatina que forma la base de las placas fotográficas absorbe notablemente la emisión ultravioleta, comenzando aproximadamente de 240—230 nm, de manera que para una emisión ultravioleta más corta se utilizan generalmente placas no gelatinosas. Introduciendo todos estos perfeccionamientos se ha logrado ascender el estudio fotográfico de la luz ultravioleta aproximadamente hasta 2,0 nm. Por supuesto, en este caso se tiene que recurrir a la incidencia de la luz sobre la red bajo un ángulo deslizante. Para un ángulo de incidencia de 89° se logró observar la línea del hierro ionizado 16 veces (átomo de hierro, del cual han sido arrancados 16 electrones) para $\lambda = 1{,}21$ nm.

El uso de los cristales en calidad de redes de difracción permite acercarnos a la región del espectro de ondas aún más cortas. De esta manera fue estudiado, por ejemplo, el espectro de emisión del hierro hidrogenoide (hierro ionizado 25 veces). Las longitudes de onda de sus líneas de resonancia resultaron ser iguales a 0,17767 y 0,17819 nm.

La investigación de ondas ultravioletas, en particular, de las cortas y muy cortas puede también efectuarse con ayuda del efecto fotoeléctrico.

§ 114. Descubrimiento de los rayos Roentgen (X). Métodos de su obtención y observación

El acercamiento hacia la región de ondas aún más cortas por el lado de la emisión ultravioleta, encuentra enormes dificultades. Sin embargo, resultó posible llegar a la investigación de esta región del

espectro por el otro lado, apoyándose en el descubrimiento, hecho en el año 1895 por Roentgen.

Roentgen descubrió que en la descarga eléctrica en un tubo evacuado (por ejemplo, en el tubo utilizado para la investigación de las partículas catódicas) desde su ánodo son emitidos rayos capaces de atravesar los cuerpos, que no son transparentes para la luz visible (papel negro, cartón, finas capas de metal, etc.). Estos rayos, llamados por Roentgen como *rayos X*, pero más conocidos bajo el nombre de *rayos Roentgen*, fueron descubiertos por él gracias a la capacidad de éstos de provocar luminiscencia en una pantalla fluorescente. Roentgen también encontró que ellos son capaces de ocasionar ennegrecimiento en la emulsión fotográfica y pérdida de carga en el electroscopio como consecuencia de la ionización del aire. De esta manera, para la investigación de los rayos Roentgen pueden utilizarse una pantalla fluorescente, una placa fotográfica o una cámara de ionización con electroscopio. También fue establecido que ellos son capaces de provocar el efecto fotoeléctrico y, por supuesto, pueden ser investigados por su acción calorífica, aunque este último método de investigación se dificulta por la absorción débil de los rayos Roentgen, tan débil que para su completa retención se exigen capas de metal relativamente gruesas; además, es muy dificultoso detectar un pequeño incremento de calor en una capa maciza de metal. Hay que notar que Roentgen no sólo descubrió por primera vez la nueva emisión, sino que en sus primeros trabajos la supo investigar multilateralmente, estableciendo muchas de sus particularidades esenciales. Roentgen encontró que el lugar de donde proceden los rayos es el sector del tubo, que es bombardeado por los electrones y construyó una instalación que de manera más favorable asegura la obtención y utilización de los rayos Roentgen (fig. 19.2). Para concentrar el haz de electrones en un lugar, el cátodo se hace cóncavo y en su cavidad se introduce la espiral de alambre, que es calentada. De esta manera se consigue el enfoque del haz de electrones. Entre el cátodo y el ánodo se aplica un voltaje de varias decenas de kilovoltios.

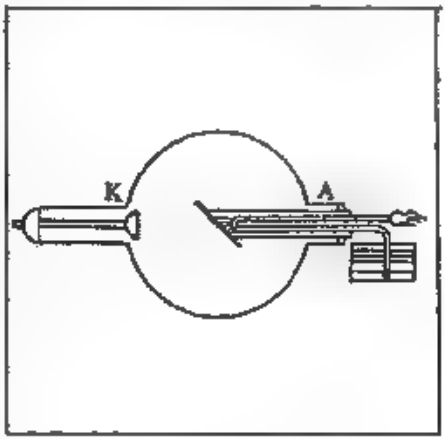


Fig. 19.2. Esquema del tubo de rayos X.
A es el ánodo (se enfría con agua), K, cátodo.

Debido a que la mayor parte de la energía de los electrones que chocan contra el ánodo se convierte en calor y sólo una pequeña

fracción (cerca del 0,1 %) es emitida como rayos Roentgen o se conserva como energía de los haces electrónicos *reflejados*, en los tubos potentes el ánodo se calienta fuertemente y puede fundirse. El corte inclinado del ánodo asegura la emisión de rayos Roentgen a un lado a través de la pared de la ampolla de vidrio del tubo.

§ 115. Absorción de la emisión Roentgen

La particularidad más notable de la emisión Roentgen es, como ya habíamos mencionado, su capacidad de atravesar sustancias que no son transparentes para la luz común. El mismo Roentgen investigó ampliamente esta propiedad de los rayos Roentgen al observar la luminiscencia de la pantalla fluorescente colocada en el camino de los rayos tras una capa de la sustancia investigada. Roentgen descubrió que la absorción de la emisión Roentgen en cualquier sustancia no está ligada con su transparencia para los rayos comunes. Así, por ejemplo, el papel negro o el cartón absorben los rayos Roentgen mucho más débilmente, que el vidrio del mismo grosor, en particular, si éste contiene sales de plomo.

Roentgen estableció que la propiedad de la sustancia de absorber los rayos Roentgen es tanto mayor, cuanto mayor sea su densidad, de tal manera las láminas de plomo debilitan el haz de emisión Roentgen mucho más fuertemente que las láminas del mismo grosor de aluminio. Para la absorción es esencial la presencia de átomos de elementos pesados en la sustancia absorbente, independientemente de la composición en qué entran éstos. Así, por ejemplo, una fina capa de albayalde o un vidrio con sales de plomo absorben fuertemente los rayos Roentgen precisamente gracias a la presencia de los átomos pesados de plomo en su composición.

En aquellas mismas investigaciones Roentgen también estableció otro hecho extremadamente importante, que fue utilizado por él para caracterizar los rayos en uno u otro caso. Fue descubierto que la absorción de los rayos Roentgen por *una misma sustancia* es diferente en dependencia de las condiciones en que son obtenidos. Los rayos fuertemente absorbibles fueron llamados rayos *blandos*, y los absorbibles débilmente, rayos *duros*. De esta manera, la capacidad de los rayos de atravesar las sustancias caracteriza el grado de *dureza* de éstos.

La comparación de la dureza de los rayos se realiza generalmente por su absorbilidad en alguna sustancia determinada (por ejemplo, en el aluminio). Pero también en todas las demás sustancias los rayos más duros son absorbidos más débilmente (con excepción de ciertos fenómenos de absorción selectiva, acerca de los cuales hablaremos más adelante).

Las investigaciones posteriores de absorción de rayos Roentgen permitieron establecer la medida cuantitativa de la dureza de éstos.

Midiendo la intensidad*) de los rayos Roentgen *antes* y *después* de la sustancia absorbente, se puede establecer la ley de absorción como la relación

$$I = I_0 e^{-\mu d},$$

donde I es la intensidad de la emisión después de la absorción, I_0, la intensidad de la emisión incidente sobre la sustancia absorbente, d, el grosor de la capa absorbente en centímetros y μ es el coeficiente de absorción que caracteriza la dureza.

Es fácil ver que $\mu = 1/d_0$, donde d_0 es el grosor de la capa que disminuye la intensidad de los rayos en $e = 2{,}718$ veces. A veces caracterizan la dureza de los rayos con el grosor de la capa absorbente de una sustancia determinada (generalmente, aluminio) que sea capaz de debilitar la intensidad de la emisión Roentgen dos veces. Este grosor D está relacionado con d_0 y μ por las fórmulas simples

$$D = 0{,}69 d_0 = 0{,}69/\mu. \qquad (115.1)$$

La dureza de los rayos Roentgen puede ser muy variada Se utilizan rayos, para los cuales D en el aluminio varía desde 0,0006 hasta 6 cm, es decir, cambia 10 000 veces.

Todas las valoraciones de la capacidad de los rayos Roentgen de ser absorbidos y de la dureza de éstos se dificultan mucho debido a que del tubo salen rayos Roentgen muy heterogéneos, es decir una amezcla de rayos con diferente dureza. Transmitiéndolos a través de la sustancia absorbante, retendremos los rayos más blandos, obteniendo de esta manera un haz más homogéneo. Este método de *filtración* es bastante tosco y no asegura la obtención de rayos estrictamente homogéneos y monocromáticos En la actualidad disponemos de procedimientos de monocromatización similares a los empleados en la óptica de longitudes comunes de ondas, es decir de métodos, cuya aplicación permite obtener una emisión Roentgen casi monocromática, la cual será sometida a una posterior monocromatización con ayuda de la difracción De esta manera, se obtienen rayos que no ceden ante los rayos luminosos en monocromaticidad y para ellos el coeficiente de absorción tiene un sentido físico completamente

*) Como se mencionó anteriormente, la determinación de la intensidad de los rayos Roentgen según la cantidad de calor desprendido al ser absorbidos éstos por el metal, a pesar de ser en principio el método más directo, está ligada con grandes dificultades técnicas. La intensidad de los rayos Roentgen también puede medirse observando otras acciones de los rayos Roentgen: por la intensidad de la fluorescencia provocada por ellos, por la velocidad de las reacciones fotoquímicas que ocurren bajo la acción de éstos, en particular, por el ennegrecimiento de la placa fotográfica y por la intensidad de la corriente de ionización obtenida bajo la influencia de éstos. El método más desarrollado es el de ionización, en el cual se trata de lograr que los rayos Roentgen sean completamente absorbidos en la cámara de ionización (capa gruesa de gas, utilización de gas pesado) En la actualidad en las instalaciones Roentgen estándares para el análisis estructural comunmente se emplean los contadores Geiger.

determinado. Para tales rayos monocromáticos él depende de la densidad ρ de la sustancia absorbente y con una aproximación bastante inexacta puede considerarse proporcional a ésta. Más exactamente la absorción se define por el *número* de átomos de la sustancia absorbente en unidad de grosor de la capa. Al pasar de unos átomos a otros la absorción crece rápidamente con el peso atómico, más correctamente, el número atómico Z, siendo proporcional al cubo del número atómico.

El mismo Roentgen, habiendo establecido el concepto de dureza de los rayos Roentgen, mostró que ella depende del régimen del tubo Roentgen: cuanto mayor sea la diferencia de potenciales entre el ánodo y el cátodo, la cual acelera los electrones, es decir cuanto mayor sea la velocidad de los electrones que bombardean el ánodo, más duros serán los rayos Roentgen.

De esta manera, un mismo tubo con cátodo incandescente puede servir para obtener rayos Roentgen de *cualquier* dureza, la cual se define por el campo de aceleración aplicado (tubo regulable). En los tubos de este tipo la dureza crece rápidamente al aumentar la diferencia de potenciales. El experimento muestra que el coeficiente medio de absorción μ de los rayos de este tubo es en forma aproximada inversamente proporcional al *cubo* de la diferencia de potenciales V entre el ánodo y el cátodo, es decir

$$\mu \sim 1/V^3. \qquad (115.2)$$

§ 116. Naturaleza de los rayos Roentgen

A pesar de que ya los primeros investigadores de los rayos Roentgen (Stokes, D. A. Goldgammer y en parte el mismo Roentgen*)) expresaron la opinión de que los rayos Roentgen son en esencia ondas electromagnéticas que aparecen al frenar los electrones rápidos que chocan contra el ánodo, sin embargo, una serie de propiedades de la emisión Roentgen no concordaban bien con su naturaleza ondulatoria. En general la investigación de la mayoría de sus propiedades se efectuaba con mucho esfuerzo. Durante largo tiempo no se lograba observar la reflexión y refracción de los rayos Roentgen al pasar éstos de un medio a otro. Roentgen pudo descubrir solamente unos rastros débiles de difusión de los rayos Roentgen, lo que, por supuesto, también era fácil de explicar partiendo de la suposición acerca de la naturaleza corpuscular de éstos.

Como principal dificultad para la hipótesis de la naturaleza ondulatoria de los rayos Roentgen sirvieron los fracasos en los experimentos hechos por Roentgen y por otros investigadores con el

*) Roentgen supuso que los rayos descubiertos por él constituyen ondas luminosas longitudinales. Sin embargo, él no defendía este punto de vista y consideraba también posibles otras interpretaciones.

fin de descubrir la interferencia y la difracción de los rayos Roentgen. Sólo mucho más tarde (aproximadamente en el año 1910) se aclaró que la longitud de onda de la emisión Roentgen es considerablemente menor que la de la luz visible y de los rayos ultravioletas y precisamente por esto los primeros experimentos para la realización de interferencia estaban a priori condenados al fracaso.

Hay que notar que después de la publicación de los primeros trabajos de Roentgen, justamente en el año 1897, Stokes enunció unas ideas acerca de la naturaleza de los rayos Roentgen que en general son correctas en los marcos de las concepciones modernas. Stokes opinaba que estos rayos eran cortos impulsos electromagnéticos que aparecen cuando los electrones que chocan contra el ánodo varían bruscamente su velocidad. Esta variación en la velocidad de la carga en movimiento puede ser considerada como debilitamiento de la corriente eléctrica que son los electrones en movimiento; él es acompañado por el debilitamiento del campo magnético ligado a los electrones móviles. La variación del campo magnético excita en el espacio circundante un campo eléctrico alterno, el cual a su vez provoca una corriente eléctrica alterna de desplazamiento y así sucesivamente. De acuerdo con las concepciones de Maxwell aparece un impulso electromagnético que se propaga en el espacio con la velocidad de la luz.

La falta de claridad en estas concepciones y, principalmente, la insuficiencia de datos experimentales trajeron consigo la aparición de otro punto de vista sobre los rayos Roentgen, al cual pronto se adhirió el mismo Roentgen.

La aclaración definitiva de la naturaleza de los rayos Roentgen ocurrió en el año 1912 cuando según la idea de Max Laue se logró realizar sin duda alguna el fenómeno de difracción de los rayos Roentgen.

§ 117. Difracción de rayos Roentgen en una red cristalina

El experimento realizado por Laue y colaboradores consiste en lo siguiente. Un estrecho haz de rayos Roentgen (fig. 19.3) separado por un conjunto de diafragmas de plomo D_1 y D_2 incide sobre el cristal K y, pasando a través de él alcanza la placa fotográfica PP. En la placa, después de ser revelada, se descubre, además de la mancha central correspondiente a la dirección inicial de los rayos Roentgen, un conjunto de pequeñas manchas dispuestas regularmente (fig. 19.4). La posición de éstas es completamente definida para el cristal dado y varía, si el cristal de una sustancia es cambiado por el cristal de otra. A este fenómeno se le puede dar una interpretación cuantitativa completa, si se supone que los rayos Roentgen son ondas que experimentan difracción en la red espacial que representa el cristal. En efecto, este último constituye un conjunto de átomos

dispuestos en forma de una red espacial regular. La distancia entre los átomos es de fracciones de nanómetros (por ejemplo, para el cristal de sal gema la distancia entre Na y Cl es igual a 0,2814 nm). Cada átomo de la red se convierte en un centro de difusión de las ondas Roentgen que son coherentes entre sí, ya que ellas son excitadas por una misma onda incidente. Al interferir entre sí, estas ondas dan máximos en determinadas direcciones, los cuales provocan la formación de pequeñas manchas aisladas de difracción en la emulsión fotográfica. Según la posición y la intensidad relativa de estas manchas nos podemos formar una idea acerca de la disposición de los centros difusores en la red cristalina y acerca de la naturaleza de éstos (átomos, grupos atómicos o iones). Por eso el fenómeno de difracción, siendo la demostración más importante e inmediata de la naturaleza ondulatoria de los rayos Roentgen, se convirtió en la

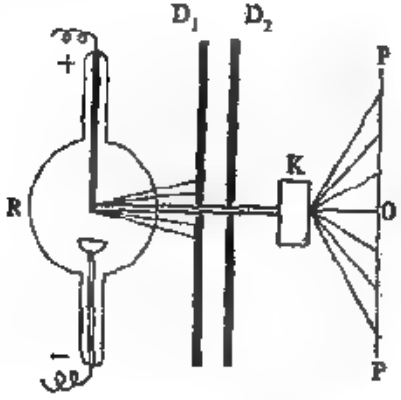


Fig. 19.3. Esquema del experimento de Laue.

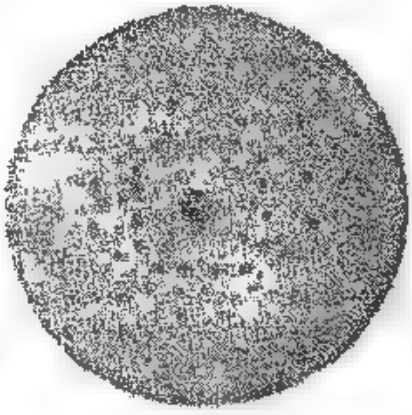


Fig. 19.4. Diagrama de Laue para el cristal ZnS.

base para el estudio experimental de las redes cristalinas. Gracias al descubrimiento de Laue resultó posible investigar con éxito el problema acerca de la estructura de los cristales. En los últimos tiempos el método de Laue se aplica para la investigación de la estructura de moléculas, líquidos e incluso de gases con ayuda de la difracción observada en las partes componentes de la molécula. A pesar de que en estos casos el cuadro de difracción es menos nítido, de todas maneras los resultados obtenidos son extremadamente importantes.

En aquellos tiempos el experimento de Laue se consideraba como una demostración evidente de la naturaleza ondulatoria, y no corpuscular, de los rayos Roentgen. En la actualidad se sabe que los

fenómenos de difracción también pueden observarse con los corpúsculos. Más adelante (véase § 178) volveremos al problema acerca de la naturaleza ondulatoria y corpuscular de la emisión.

§ 118. Espectrografía de los rayos Roentgen

El cuadro descrito en el parágrafo anterior corresponde a la difracción en la red *espacial* estudiada en el cap. X. La particularidad característica de ésta consiste en que para dado período de la red y para dada dirección del haz inicial se observan los máximos solamente para determinadas longitudes de onda. Por eso, si sobre el cristal incide una luz Roentgen «blanca», es decir, un impulso Roentgen equivalente a un conjunto de ondas de las más variadas longitudes, entonces el cristal separará solamente algunas longitudes determinadas de onda (las hace monocromáticas). Al contrario, si el impulso Roentgen incidente es aproximadamente monocromático, entonces para una relación *no adecuada* entre el ángulo de incidencia, la longitud de onda y la constante de la red, no podremos observar ningún máximo, sino que descubriremos solamente una difusión homogénea.

Si un haz paralelo de emisión Roentgen incide sobre el cristal, entonces en cada plano atómico se producirá difracción. El máximo de intensidad de las ondas Roentgen difractadas responde a la dirección que se define por las leyes de la reflexión regular. La condición de intensificación mutua de las ondas reflejadas en diferentes planos, se escribe, por supuesto, de la siguiente manera

$$2d \operatorname{sen} \theta = n\lambda, \qquad (118.1)$$

donde d es la distancia entre las capas, θ, el ángulo de deslizamiento (complemento del ángulo de incidencia hasta $^1/_2\pi$) y λ, la longitud de onda de la emisión difractada (véase § 53).

Esta *relación de Bragg*, deducida también por Yu. V. Wulff, indica qué longitudes de onda pueden reflejarse intensamente en el cristal para determinado ángulo de incidencia. Las ondas de otra longitud experimentarán una difusión más o menos homogénea en todas las direcciones, dando solamente un fondo general en la placa sin la formación de máximos de ennegrecimiento en la emulsión fotográfica. Si nosotros deseamos utilizar la difracción provocada en un cristal para la construcción de un espectrógrafo para los rayos Roentgen, entonces es necesario tomar en consideración la particularidad citada del funcionamiento de la red espacial. Existen varios procedimientos que permiten con ayuda de la red espacial establecer los lugares de los máximos de difracción para cualquier longitud de onda.

a. *Método del haz extendido* (Moseley, año 1913). Este método consiste en que los rayos son dirigidos al cristal en forma de un

extendido haz divergente que forma *todos los posibles* ángulos de deslizamiento. En este caso, de acuerdo con la relación de Bragg, los rayos de diferente longitud de onda se reflejarán formando distintos ángulos y obtendremos en la placa las manchas de difracción de diferentes longitudes de onda, es decir, el espectro del impulso Roentgen (fig. 19.5).

Este método fue utilizado en los primeros y muy fundamentales trabajos de espectrografía de rayos Roentgen. En la actualidad él posee solamente un significado histórico.

b *Método del cristal giratorio (en oscilación).* En este método los rayos inciden sobre el cristal en forma de un haz paralelo, pero el cristal *K* en el momento de la toma fotográfica se balancea con ayuda de un mecanismo de reloj (gira a uno y a otro lado), formando con la dirección del haz inicial de emisión Roentgen *todos los posibles*

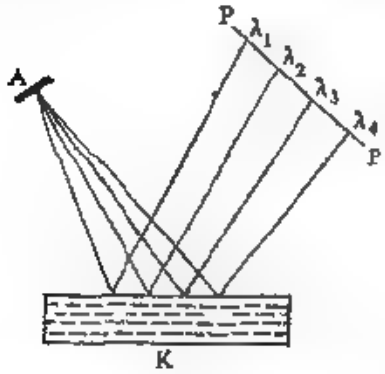


Fig. 19.5. Esquema de espectrografía de los rayos X con el método del haz ancho.

Los rayos inciden desde el ánodo A del tubo de rayos X sobre el cristal K en forma de un ancho haz divergente. Los rayos de diferente longitud de onda se reflejan en la placa fotográfica PP bajo diferentes ángulos.

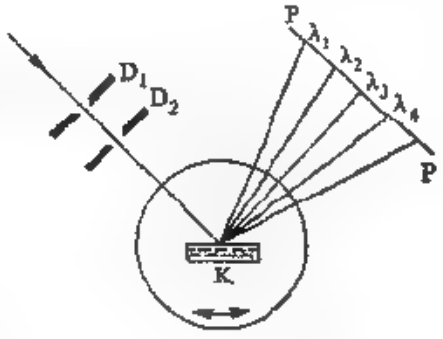


Fig. 19.6. Esquema de la espectrografía de los rayos X según el método del cristal rotatorio.

Un estrecho haz de rayos Roentgen, cortado por los diafragmas D_1 y D_2, incide sobre el cristal K que gira con ayuda de un mecanismo de relej.

ángulos de deslizamiento. Por eso también obtendremos el espectro del impulso Roentgen (fig. 19.6).

Este método sirve como principio en la construcción de los aparatos espectrales modernos de rayos Roentgen.

Los procedimientos indicados sirven para separar determinadas longitudes de onda de los rayos Roentgen (monocromadores) o para determinar las longitudes de onda de los rayos monocromáticos (espectrómetros).

La aplicación más importante de la espectrografía roentgénica es la investigación con ayuda de los rayos Roentgen de la estructura

de los cristales (y en los últimos tiempos incluso de las moléculas) y la determinación de los parámetros de la red cristalina. En aquellos casos, cuando nosotros disponemos de monocristales de suficientes dimensiones, para la investigación estructural se puede utilizar el método de Laue (véase § 117), utilizando la emisión Roentgen con espectro continuo.

En el caso de polvos cristalinos o de cuerpos policristalinos la investigación estructural puede ser realizada según el método propuesto en el año 1916 por Debye y Scherrer y también por Hull. El haz monocromático de rayos Roentgen es dirigido a la pequeña columna de polvo cristalino prensado o a una varilla de material policristalino (fig. 19.7); los diversos cristales pequeños de la preparación tienen todas las posibles orientaciones, de manera que el haz incidente forma con los planos atómicos los más variados ángulos.

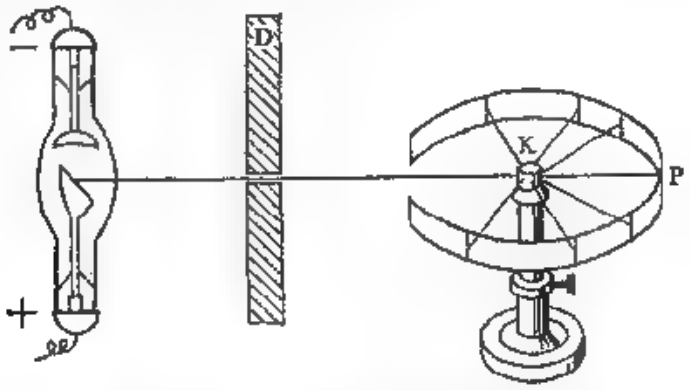


Fig. 19.7. Esquema de la espectrografía de los rayos X según el método de diferentes orientaciones de los cristales.

Fig. 19.8. Roentgenograma obtenido según el esquema representado en la fig. 19.7.

Los rayos de la longitud prefijada de onda λ se reflejarán bajo diferentes ángulos en los diversos planos atómicos que responden a distintos valores de θ (véase (118.1)), creando en la película fotográfica, que rodea la preparación, el correspondiente cuadro de difracción. La fig. 19.8 reproduce el roentgenograma obtenido; en el centro se ve

la huella del haz directo; a la derecha e izquierda están dispuestas las huellas de los rayos reflejados con la particularidad de que cada par de huellas simétricas responde a la reflexión en los planos cristalográficos de una determinada dirección. Sabiendo la longitud de onda λ y midiendo los ángulos de deslizamiento θ, podemos con ayuda de este roentgenograma establecer la estructura de los objetos monocristalinos, como lo son la mayoría de metales y otros materiales técnicos.

Si en las investigaciones de los rayos Roentgen en calidad de red de difracción se utiliza una red *plana* artificial con un período relativamente grande y se dirigen los rayos hacia ella bajo un ángulo próximo a 90°, entonces es posible observar difracción en la red plana, es decir con máximos correspondientes a todas las longitudes de onda (compárese § 47).

La utilización de la incidencia oblicua sobre las redes planas permitió determinar la longitud de onda de los rayos Roentgen con gran exactitud. Repitiendo las mismas mediciones con una red espacial de sal gema, se puede para una longitud conocida de la emisión Roentgen determinar exactamente el período de la red de sal gema, es decir la distancia entre los iones, que componen esta red. De aquí se logró encontrar el valor exacto del número de moléculas en un mol, es decir el número de Avogadro. Estas determinaciones del número de Avogadro se consideran las más seguras. De acuerdo con éstas se ha recomendado considerar el valor del número de Avogadro igual a $6\,022045 \cdot 10^{23}$ mol^{-1} (año 1974) en vez de $6{,}0247 \cdot 10^{23}$ mol^{-1} (año 1955).

§ 115. Espectro continuo de rayos Roentgen. Concepto de los rayos característicos

Los métodos indicados en el parágrafo anterior permiten investigar el carácter del espectro del impulso Roentgen incluso en el caso, cuando éste es «blanco», es decir da un espectro continuo. Tal carácter tiene el espectro de los rayos Roentgen que se obtienen en condiciones ordinarias en el tubo Roentgen al ser frenados los electrones por los choques contra el ánodo. La variación de la velocidad del electrón en este caso se lleva a cabo de una manera casual, y la emisión formada constituye un impulso completamente «irregular» equivalente a un conjunto de diversas longitudes de onda. Sin embargo, al lado de estos impulsos aparece también una emisión mucho más monocromática. Al ser bombardeado el ánodo por electrones de determinada velocidad se observa el siguiente fenómeno: para cierta velocidad de éstos, la magnitud de la cual se determina por la sustancia del ánodo, este último se convierte en fuente de rayos casi monocromáticos con una longitud de onda característica para la sustancia del ánodo dado. El origen de tales rayos se debe a los procesos dentro

de los átomos de esta sustancia. Para provocar semejantes procesos se exige cierta energía mínima característica para la sustancia del ánodo. Los rayos monocromáticos obtenidos se definen por la sustancia del ánodo y llevan por eso el nombre de rayos *característicos*.

En la actualidad después del establecimiento de los métodos de la espectroscopia roentgénica el concepto de dureza de la emisión Roentgen puede ser cambiado por un concepto más definido, como lo es la longitud de onda. De acuerdo con esto, a la emisión característica de dada sustancia nosotros la definiremos como la emisión que posee determinada longitud de onda.

La «luz blanca» Roentgen emitida por un tubo común constituye un conjunto de rayos de diferentes longitudes de onda y, por lo tanto, de diferente dureza. Cuando hablamos de la dureza de tales rayos, nos referimos a cierta magnitud media que caracteriza la parte principal del impulso observado. En este sentido se puede hablar también acerca de cierta longitud media de onda que caracteriza dado impulso. Se puede establecer la relación entre esta longitud media de onda λ_m y el voltaje acelerador V aplicado al tubo. El experimento muestra que

$$\lambda_m \sim \frac{1}{V} \text{ nm}, \tag{119.1}$$

donde V está expresado en kilovoltios.

De acuerdo con la última fórmula y la fórmula (115.2), se puede escribir la relación entre el coeficiente de absorción y la longitud de onda

$$\mu \sim \lambda^3, \tag{119.2}$$

es decir, el coeficiente de absorción es aproximadamente proporcional al cubo de la longitud de onda. Como se desprende de esta relación obtenida experimentalmente, el coeficiente de absorción disminuye rápidamente al disminuir la longitud de onda. Sin embargo, para cada sustancia existen regiones de longitudes de onda, en las cuales la absorción aumenta bruscamente (en 8—10 veces) en comparación con su comportamiento normal (absorción selectiva). Tales regiones responden a las de la emisión característica de la sustancia dada.

§ 120. Optica de los rayos Roentgen

Las dificultades para descubrir las propiedades ondulatorias de la emisión Roentgen están relacionadas con la excesiva pequeñez de sus longitudes de onda. En efecto, la medición de estas últimas muestra que cuando se usan tubos Roentgen comunes nosotros operamos con ondas cuya longitud es medida en décimas de nanómetros, es decir, mil veces menor que las longitudes de onda de la luz visible.

Los rayos característicos de los diferentes elementos químicos de la tabla periódica de los elementos poseen también longitudes de onda

del mismo orden. Cada elemento puede emitir varios grupos de rayos característicos, con la particularidad de que la dureza de estos últimos aumenta a medida que pasamos a elementos con mayor número atómico. Si comparamos entre sí los rayos característicos duros, entonces obtendremos las siguientes longitudes de onda, para el Mg 0,95, para el Fe 0,17, para el Ag 0,05, para el W 0,018 nm y para el elemento más pesado, el uranio, 0,01 nm. Una longitud de onda tan corta y correspondientemente una frecuencia tamaña conllevan a que en primer plano se manifieste el carácter corpuscular (cuántico) de la emisión Roentgen. Por eso se exigen condiciones especiales difíciles de realizar, bajo las cuales el carácter ondulatorio de los rayos Roentgen se dé a conocer claramente. Sin embargo, en los últimos años en esto se ha alcanzado grandes éxitos. Conozcamos algunos fenómenos de esta región, es decir, de la óptica de los rayos Roentgen.

a *Reflexión regular*. Una superficie especular común es demasiado rugosa para los rayos Roentgen y sólo en el caso de incidencia bajo un ángulo muy deslizante puede dar una reflexión regular. Esta reflexión ha sido lograda en el experimento; además, en este mismo principio se basa la red de difracción reflexiva (véase § 47).

Otro método de obtención de una reflexión regular se realiza en el experimento de Laue, donde las superficies reflectoras son planos cristalográficos, en los cuales los átomos forman un plano incomparablemente mucho más perfecto (están dispuestos en forma rigurosamente periódica) que cualquier superficie plana artificialmente pulida.

b. *Refracción*. Los primeros indicios de la existencia de la refracción de los rayos Roentgen fueron descubiertos cuando se notó la divergencia del cumplimiento de la condición de Bragg, la cual fija la posición de los máximos en la difracción sobre un cristal. Estas divergencias encontraron su aplicación en la suposición de la refracción de los rayos al salir del cristal. De ahí se podía valorar el índice de refracción para los rayos Roentgen. Él resultó ser menor que la unidad. De acuerdo con esto, se logró realizar el fenómeno de reflexión total interna en el límite aire—medio. Así, por ejemplo, en el límite aire—vidrio el ángulo límite de deslizamiento resultó ser igual a 11'; de aquí se pudo determinar exactamente el índice de refracción del vidrio para la emisión Roentgen.

También se observó refracción en un prisma de vidrio, sobre el cual incidía un haz divergente de rayos Roentgen. Algunos rayos del haz incidían bajo un ángulo mayor que el ángulo límite y experimentaban una reflexión total interna, otros se refractaron en el prisma y se dispersaron formando un espectro. De esta manera se logró observar y medir la dispersión de los rayos Roentgen, es decir, la dependencia del índice de refracción respecto a la longitud de onda. La diferencia del índice de refracción de la unidad es bastante peque-

fía (en la sexta cifra decimal) y la diferencia en los índices de refracción para distintas longitudes de onda es aún menor; de acuerdo con esto las correspondientes mediciones fueron realizadas muy aproximadamente.

§ 121. Escala de ondas electromagnéticas

Todo lo dicho anteriormente muestra que la emisión Roentgen constituye unas ondas electromagnéticas que se diferencian de la luz común solamente por la pequeñez de su longitud. Sin embargo, la variedad de longitudes de onda de los rayos Roentgen es extraordinariamente grande. Si generalmente las longitudes de onda de la emisión son centenas y miles de veces menores que las de la luz visible, entonces son posibles también rayos Roentgen mucho más suaves, que responden a una longitud de onda mayor. La dificultad en la observación de éstos consiste en que ellos son muy absorbibles por todos los cuerpos, acercándose en este sentido a la corta emisión ultravioleta. En efecto, tomando las medidas de prevención necesarias para trabajar con estos rayos tan fácilmente absorbibles, se logró observar rayos Roentgen que por su longitud de onda se refieren a la región que nosotros denominamos ultravioleta. Se comprende que en este caso no hay ninguna diferencia entre los rayos Roentgen y los ultravioletas. Tal o cual denominación para ellos depende del método de la excitación de éstos. Si la excitación de los rayos responde a los métodos de excitación de la emisión Roentgen, es decir, si nosotros llegamos a estos rayos blandos por el lado de los rayos Roentgen más duros, entonces llamaremos a éstos como rayos Roentgen. Si, por el contrario, los rayos obtenidos han sido provocados según el procedimiento que suele emplearse para la excitación de la emisión ultravioleta, es decir, si nosotros llegamos a ellos por el lado de los rayos ultravioletas de mayor longitud, entonces es natural referir estos rayos a la emisión ultravioleta. En la actualidad la región entre los rayos Roentgen y los ultravioletas ha sido completada (Hollweck) de manera análoga a como fue llenada la región entre los rayos de Hertz y los infrarrojos.

En el lado de las ondas de longitudes más cortas la escala no se interrumpe con los rayos Roentgen duros. En la naturaleza se encuentran ondas mucho más cortas que las comunes ondas Roentgen. Estos son los rayos γ emitidos por las sustancias radioactivas que por su naturaleza coinciden con las ondas Roentgen, pero se distinguen por su mayor dureza. Las diversas sustancias radioactivas emiten rayos γ de diferente longitud de onda, desde aquellos que son más blandos que algunos rayos Roentgen (rayos γ emitidos por el polonio) hasta los rayos, cuya longitud de onda es cien veces más corta que la de los más duros de los rayos comunes Roentgen (rayos γ emitidos por el torio C).

De esta manera, la escala de ondas electromagnéticas constituye una gradación ininterrumpidamente llena desde las radioondas más largas hasta las ondas cuya longitud se mide en milésimas de fracciones de angstrom. Por supuesto, no está excluida la posibilidad de existencia de ondas aún más cortas. Así, por ejemplo, el paso de los rayos cósmicos, que constituyen un flujo de corpúsculos con velocidades próximas a la de la luz, origina los rayos γ de una longitud de onda muy corta.

El siguiente diagrama da una idea acerca de toda la escala de ondas electromagnéticas (fig. 19.9). En la parte superior del diagrama se indican las longitudes de onda expresadas en angstrom (1 Å = = 0,1 nm = 10^{-9} cm) y en su parte inferior se da la denominación de las ondas. La superposición de las regiones, mostrada en la figura, indica cuán convencional es esta división en regiones. Debido al gran diapasón de las longitudes de onda presentes en la escala, ésta ha sido graduada de manera logarítmica.

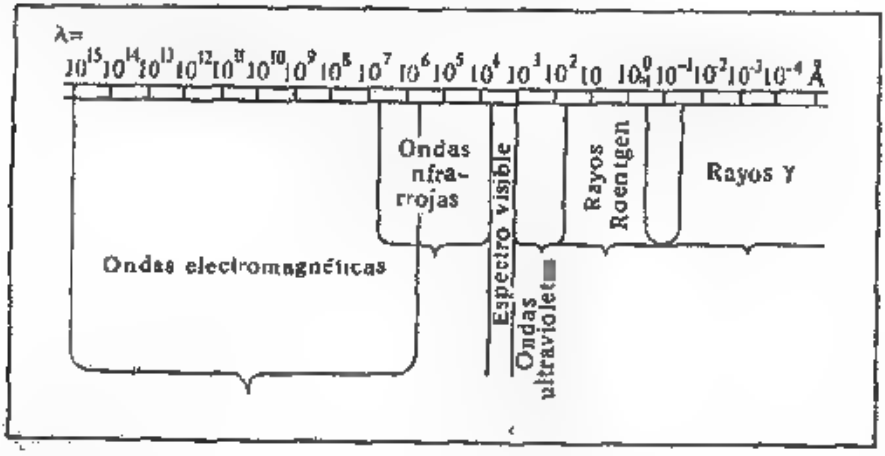


Fig. 19.9. Escala de ondas electromagnéticas.

EJERCICIOS

1. Deducir la ley de reflexión de la luz según Newton y según Huygens.

2. Si la luz procedente del Sol incide sobre una pantalla a través de un pequeño orificio, sobre ésta se formará la imagen del Sol (disco brillante, y durante el eclipse una hoz brillante) independientemente de la forma del orificio. Pero si el orificio es grande, entonces se obtendrá la imagen de este último. Explicar estos fenómenos y calcular la relación entre la dimensión del orificio D y la distancia h desde el agujero hasta la pantalla, para la cual se realizan el primero y el segundo casos (el diámetro angular del Sol es $31{,}5' \approx 0{,}01$ radián).

Respuesta: $D \geqslant h/100$ para la formación de la imagen del orificio, $D \leqslant h/100$ corresponde a la imagen de la fuente, en el caso de orificios muy pequeños es necesario considerar la influencia de difracción.

3. Determinar el ángulo límite, con el cual comienza la reflexión interna total al pasar la luz a) del vidrio al aire; b) del vidrio al agua (el índice de refracción del vidrio es 1,51, del agua 1,33 y del aire 1,00).

Respuesta: a) $r = \operatorname{arcsen} 0{,}66$; $r \approx 42°$; b) $r = \operatorname{arcsen} 0{,}88$; $r \approx 62°$.

4. Escribir la ecuación de la onda plana, cuyo frente se propaga a lo largo de la línea que forma los ángulos α, β y γ con los ejes de coordenadas.

Respuesta: $s = a \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{v}\right)$.

5. Escribir la ecuación de la onda emitida por un hilo infinito (onda cilíndrica).

Respuesta: $s = \frac{a}{\sqrt{r}} \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{v}\right)$.

6. Escribir la expresión para la onda monocromática como una función exponencial (en la forma compleja) y aclarar el sentido físico de la amplitud compleja.

7. Escribir la expresión de la función periódica simple, representada en la fig. 1, y desarrollarla en serie de Fourier.

8. ¿Por qué en el experimento con dos diapasones nosotros decimos que la oscilación modulada es *aproximadamente* equivalente a tres oscilaciones, mientras que en el ejemplo teórico estudiado hablamos *exactamente* acerca de tres oscilaciones monocromáticas equivalentes a la modulada? (Prestar atención a la ley de variación de la intensidad sonora del primer diapasón).

Respuesta: En el experimento la ley de modulación es diferente de $a = A(1 + \cos 2\pi mt)$.

9. Un experimento análogo al experimento con el diapasón se puede realizar con un frecuencímetro ordinario de corriente eléctrica alterna (esta última

normalmente tiene 50 períodos). Por eso, al transmitir corriente eléctrica a través de este frecuencímetro, observaremos una desviación de la lámina que corresponde a los 50 períodos. a) ¿Cuál será la reacción del frecuencímetro si la corriente eléctrica se interrumpe regularmente tres veces por segundo? b) ¿Cuál será la reacción en el caso de una interrupción irregular o de variación de la intensidad de la corriente eléctrica? Comprobar en el experimento las deducciones hechas.

Respuesta: a) Vibran las láminas 47, 50 y 53; b) muchas láminas oscilarán y de nuevo cesarán.

10. Demostrar que la luminancia B_1 de la fuente en una dirección dada es numéricamente igual a la razón de la iluminación E del área (dispuesta perpendicularmente a esta dirección) entre el ángulo sólido Ω, bajo el cual se ve desde esta área el sector emisor de nuestra fuente, es decir, $B_1 = E/\Omega$.

Corolario: La luminancia de la fuente no depende de la distancia.

11. Determinar la iluminación del área S dispuesta a la distancia R de un plano luminoso infinitamente grande y paralelamente a este último, si la luminancia del plano en la dirección normal es B y ésta obedece a la ley de Lambert.

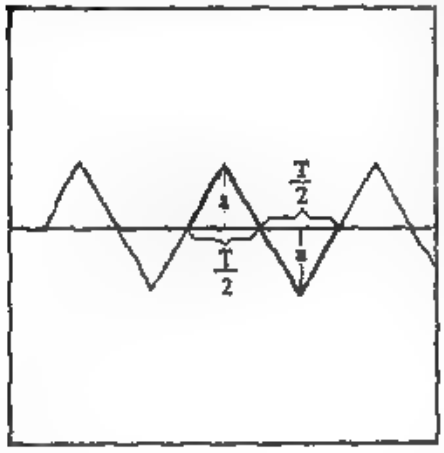


Fig. 1

Respuesta: $E = \pi B$.

Indicación. Resolver el problema con los cálculos generales y a base del ejercicio 10. Explicar desde el punto de vista físico ¿por qué en el caso examinado la iluminación no depende de la distancia?

12. Sea la luminancia del Sol $B = 1{,}2 \cdot 10^9$ cd/m^2. Determinar la iluminación dada por el Sol en la superficie de la Tierra (despreciar la absorción en la atmósfera).

Respuesta: $E = 94\,000$ lx.

13. Deducir las fórmulas (12.3) y (12.4) en el caso de sumación de las oscilaciones armónicas

$$s = s_1 + s_2 = a_1 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_1) + a_2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_2).$$

Indicación. Utilizar la escritura compleja de la oscilación armónica

$$s = \operatorname{Im}\{a_1 \exp[i(\omega t + \varphi_1)] + a_2 \exp[i(\omega t + \varphi_2)]\} = \operatorname{Im} A \exp[i(\omega t + \theta)].$$

14. *Método gráfico para la representación de las oscilaciones armónicas* (fig. 2). Si el vector a_1 gira con la velocidad angular ω, comenzando por la posición registrada con el ángulo φ_1 desde el eje Ox, entonces la proyección de éste sobre el eje Ox es $s_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$, es decir, representa una oscilación armónica con la amplitud a_1 y la fase inicial φ_1. Mostrar que la suma de dos oscilaciones armónicas se puede encontrar mediante la construcción de la diagonal del paralelogramo formado con los vectores a_1 y a_2, es decir, la amplitud de la oscilación resultante es $A = OP$, y su fase inicial $\theta = \angle POx$. Hallar gráficamente la suma de varias oscilaciones armónicas que respectivamente tienen amplitudes y fases iniciales a_1, φ_1; a_2, φ_2; a_3, φ_3, etc. (fig. 3).

15. ¿Pueden ser coherentes entre sí las oscilaciones de diferente período?

Respuesta: No, debido a que la diferencia de fases entre ellas cambia continuamente.

16. ¿Para qué diferencia inicial de fases la línea media (véase fig. 4.1, pág. 85) será una línea de intensidad nula?

Respuesta: Para $\varphi = \pi$. ¿Cómo realizar en el experimento tal disposición?

17. Mostrar que para el espejo doble de Fresnel la fuente S y sus dos imágenes virtuales S_1 y S_2 se encuentran en la circunferencia, cuyo centro O coincide con el punto de intersección de la arista del espejo doble con el plano perpendicular a esta arista y que pasa a través de S.

Utilizando esta construcción, mostrar que (fig. 4):

1) $\angle S_1 O S_2 = 2\alpha$, si α es el ángulo entre los espejos;

2) $2\omega = 2\alpha R/(r + R)$, donde 2ω es la apertura de interferencia para el punto central M del campo, r, la distancia OS y R, la distancia OM; si $R \gg r$, entonces $2\omega = 2\alpha$;

3) $2w = 2\alpha \dfrac{r}{r+R}$, donde $2w$ es el ángulo entre los rayos interferentes para el punto central M del campo;

4) $S_1 S_2 = 2l = 2r\alpha$;

5) la anchura de la franja $\mathcal{B} = \lambda \dfrac{r+R}{r2\alpha}$.

Indicación. Los ángulos α, ω, w son pequeños.

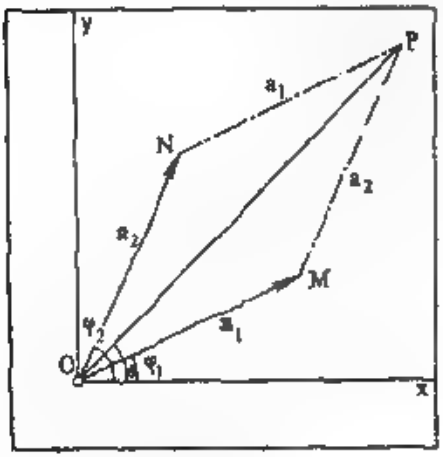


Fig. 2

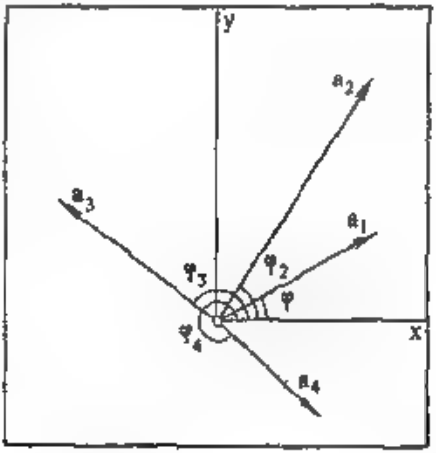


Fig. 3

18. Los espejos dobles de Fresnel forman un ángulo igual a 1°. La fuente se encuentra a una distancia de 10 cm, y la pantalla, a una distancia de 1 m de la arista de los espejos dobles. ¿Cuál es el ancho límite de la fuente (rendija se ilumina con luz verde)?

Respuesta: aproximadamente 0,4 mm.

19. ¿Cuál es la sucesión de la alternación de colores en el experimento con los espejos dobles de Fresnel, si la fuente emite luz blanca?

Respuesta: la franja central es blanca, las franjas de colores: desde el violeta hasta el rojo; las franjas de altos órdenes se sobreponen entre sí.

20. Deducir las fórmulas (22.2) y (22.3).

Indicación. Emplear la identidad

$$\cos[\overline{\omega}\tau + \varphi(\tau)] = \cos\overline{\omega}\tau \cos\varphi(\tau) - \operatorname{sen}\overline{\omega}\tau \operatorname{sen}\varphi(\tau).$$

Observación. El producto $\gamma(\tau)\cos[\overline{\omega}\tau + \psi(\tau)]$ se puede expresar como

$$\gamma(\tau)\cos[\overline{\omega}\tau + \psi(\tau)] = \operatorname{Re}\{[c(\tau) + is(\tau)]\exp(i\overline{\omega}\tau)\}.$$

La combinación $[c(\tau) + is(\tau)] \exp(i\bar{\omega}\tau)$ se denomina *grado complejo de coherencia*; su módulo coincide con $\gamma(\tau)$, y el argumento, con $\bar{\omega}\tau + \psi(\tau)$.

21. Calcular el grado de coherencia para los haces compuestos por trenes de onda.

El grado complejo de coherencia (véase ejercicio 20) se define por la relación

$$[c(\tau) + is(\tau)] \exp(i\bar{\omega}\tau) = \exp(i\bar{\omega}\tau) \frac{1}{a^2 t} \int_0^t a(t)\, a(t+\tau) \times$$

$$\times \exp\{i[\varphi(t+\tau) - \varphi(t)]\}\, dt.$$

Supongamos que la amplitud es constante y que los trenes tienen igual duración. En este caso la fase $\varphi(t)$ puede ser representada de la siguiente manera: $\varphi(t) = \varphi_j$; $jT \leqslant t \leqslant (j+1)\,T$; $j = 0, 1, 2, \ldots, N-1$,

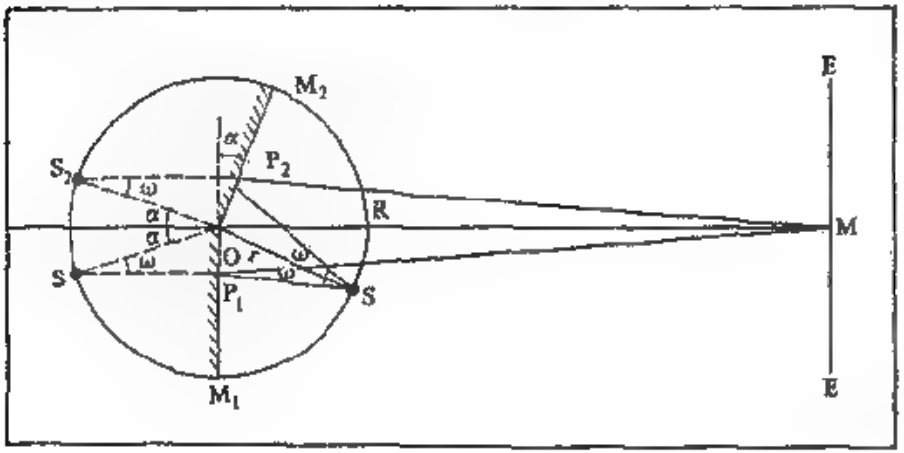


Fig. 4

donde φ_j son números aleatorios. Dividamos el dominio de integración $0, t = NT$ en N intervalos de longitud T cada uno. En los límites del j-ésimo intervalo, la fase $\varphi(t)$ tiene un valor constante igual a φ_j, y la fase $\varphi(t+\tau)$ toma dos valores dependientes de la relación entre τ y T. Si $\tau < T$, entonces en el intervalo $jT < t < (j+1)\,T - \tau$ se tendrá $\varphi(t+\tau) = \varphi_j$, y en el intervalo $(j+1)\,T - \tau < t < (j+1)\,T$ obtendremos $\varphi(t+\tau) = \varphi_{j+1}$. Por eso

$$c(\tau) + is(\tau) = \frac{1}{NT} \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ \int_{jT}^{(j+1)T-\tau} dt + \int_{(j+1)T-\tau}^{(j+1)T} \exp[i(\varphi_{j+1} - \varphi_j)]\, dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ 1 - \frac{\tau}{T} + \frac{\tau}{T} \exp[i(\varphi_{j+1} - \varphi_j)] \right\}$$

Si la diferencia de fases $\varphi_{j+1} - \varphi_j$ toma valores aleatorios arbitrarios y si $N \gg 1$, entonces se puede despreciar la suma de los términos $\exp[i(\varphi_{j+1} - \varphi_j)]$.

Por lo tanto,

$$s(\tau) = 0, \quad c(\tau) = 1 - \tau/T; \quad \tau < T.$$

Si $\tau > T$, entonces en todo el intervalo $jT < t < (j+1)T$ las fases $\varphi(t)$ y $\varphi(t+\tau)$ toman diversos valores (φ_j y φ_{j+1}, para $T < \tau < 2T$; φ_j y φ_{j+2}, para $2T < \tau < 3T$, etc.). Por esto cuando $N \to \infty$ tenemos $c(\tau) \to 0$, $s(\tau) = 0$.

El cambio de signo de τ conduce a los resultados obtenidos anteriormente, pero es necesario sustituir τ por $-\tau$. De este modo,

$$s(\tau) = 0; \quad c(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|/T; & |\tau| < T; \\ 0; & |\tau| > T. \end{cases}$$

Supongamos ahora que N_1 trenes tienen una duración T_1, N_2 trenes, una duración T_2, etc. Entonces si se cumple la condición $N_k \gg 1$, obtendremos

$$c(\tau) = \frac{1}{N} \sum_k N_k \left[1 - |\tau|/T_k \right], \quad N = \sum_k N_k,$$

además en la suma respecto al índice k es necesario considerar solamente aquellos términos, para los cuales $T_k > \tau$. El resultado de la sumación depende de la fracción N_k/N de trenes con duración T_k. Pasando de la variación discreta de T_k a la continua y poniendo el número relativo de trenes con duración T en el intervalo T, $T + dT$ igual a

$$\frac{T}{\overline{T}} \exp(-T/\overline{T}) \frac{dT}{\overline{T}}$$

(distribución de Poisson), obtendremos

$$c(\tau) = \int_{|\tau|}^{\infty} \left[1 - \frac{|\tau|}{T} \right] \frac{T}{\overline{T}} \exp(-T/\overline{T}) \frac{dT}{\overline{T}} = \exp(-|\tau|/\overline{T}).$$

Consideremos ahora que la fase φ es constante y que la amplitud $a(t)$ es una magnitud aleatoria, entonces

$$c(\tau) = \frac{1}{\overline{a^2}} \frac{1}{t} \int_0^t a(t) a(t+\tau)\, dt.$$

Para la sucesión de trenes de igual duración T, la amplitud $a(t)$ se puede representar en la forma

$$a(t) = a_j, \quad jT < t < (j+1)T, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

Dividamos el dominio de integración en intervalos con duración T y examinemos primero el caso $|\tau| < T$. Con ayuda de consideraciones análogas a las utilizadas anteriormente hallamos

$$c(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left[\left(1 - \frac{|\tau|}{T} \right) a_j^2 + \frac{|\tau|}{T} a_j a_{j+1} \right] \Big/ \overline{a^2}, \quad |\tau| < T.$$

Para un valor grande de N la sumación respecto a j es prácticamente equivalente a la promediación

$$\frac{1}{N} \sum_j a_j^2 = \overline{a^2},$$

$$\frac{1}{N} \sum_j a_j a_{j+1} = \frac{1}{N} \sum_j (a_j - \overline{a} + \overline{a})(a_{j+1} - \overline{a} + \overline{a}) = (\overline{a})^2.$$

En el caso $|\tau| > T$, en la función subintegral habrán sólo los términos $a_j a_{j+k}$, $k \neq 0$ y

$\overline{a_j a_{j+k}} = (\bar{a})^2$.

De esta forma,

$$c(\tau) = \begin{cases} \dfrac{(\bar{a})^2}{\bar{a^2}} + \left[1 - \dfrac{|\tau|}{T}\right]\left(1 - \dfrac{(\bar{a})^2}{\bar{a^2}}\right), & |\tau| < T, \\ \dfrac{(\bar{a})^2}{\bar{a^2}}, & |\tau| > T \end{cases}$$

Si las variaciones de la amplitud y de la fase ocurren simultáneamente, entonces en lugar de $\overline{a_j a_{j+k}}$ figurará

$\overline{a_j a_{j+k} \exp\{i(\varphi_j - \varphi_{j+k})\}} = 0$.

22. Deducir la fórmula (22.11).

Indicación. Basarse en la expresión

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ I_1(\omega - \bar{\omega}) + I_2(\omega - \bar{\omega}) + 2\frac{I_1(\omega - \bar{\omega})}{I_1}\sqrt{I_1 I_2}\cos(\omega\tau) \right\} d\omega,$$

utilizando las fórmulas (22.10) y la identidad

$\cos \omega\tau = \cos[(\omega - \bar{\omega})\tau + \bar{\omega}\tau] = \cos \bar{\omega}\tau \cos(\omega - \bar{\omega})\tau - \operatorname{sen} \bar{\omega}\tau \operatorname{sen}(\omega - \bar{\omega})\tau$.

23. Calcular el grado de coherencia $\gamma(\tau)$ de la no monocromaticidad surgida como consecuencia del efecto Doppler en el caso de una distribución maxwelliana de los átomos según las velocidades.

Indicación. Emplear la fórmula de Euler

$\cos y = {}^1/_2(e^{iy} + e^{-iy})$

y la integral de Poisson

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Respuesta:

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(\omega - \bar{\omega})^2/\Gamma^2]\cos(\omega - \bar{\omega})\tau\, d\omega = \exp[-(\Gamma\tau/2)^2].$$

24. Calcular el grado de coherencia de las oscilaciones en dos puntos iluminados por una fuente extendida incoherente lineal de luz.

Vamos a considerar que la fuente de luz está compuesta de puntos luminosos dispuestos equidistantemente en el segmento de longitud $2b$ (véase fig. 4.21). Cada punto luminoso envía la onda, que en el punto P_1 puede ser descrita

$$\frac{A}{d_{j1}}\cos(\omega t - kd_{j1} + \varphi_j), \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda},$$

donde A es un multiplicando constante, d_{j1}, la distancia desde el j-ésimo punto luminoso hasta P_1 y φ_j, la fase constante. La oscilación sumaria en el punto P_1 que ha sido creada por toda la fuente es igual a

$$\mathfrak{S}_1(P_1, t) = A\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{d_{j1}}\cos[\omega t - kd_{j1} + \varphi_j].$$

donde N es el número de puntos luminosos. La expresión para la oscilación $\mathfrak{E}_2(P_2, t)$ se obtiene de $\mathfrak{E}_1(P_1, t)$ al sustituir d_{j1} por d_{j2}, distancia desde el j-ésimo punto hasta P_2. Es cómodo realizar los cálculos posteriores utilizando la escritura compleja de las oscilaciones (véase ejercicio 23), o sea con ayuda de la fórmula

$$\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}.$$

Entonces $\mathfrak{E}_1(P_1, t)$ toma la forma

$$\mathfrak{E}_1(P_1, t) = A \operatorname{Re} \exp(i\omega t) \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{d_{j1}} \exp[-i(kd_{j1} - \varphi_j)] =$$

$$= \operatorname{Re} a_1(P_1) \exp[i(\omega t + \psi_1)],$$

$$a_1(P_1) \exp[i\psi_1(P_1)] = A \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{d_{j1}} \exp[-i(kd_{j1} - \varphi_j)]$$

Según la definición (22.22), tenemos

$$c_{12}(\tau) + is_{12}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{I_1 I_2}} \overline{a_1(P_1)\, a_2(P_2) \exp(i[\psi_2(P_2) - \psi_1(P_1)])} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{I_1 I_2}} A^2 \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} \frac{1}{d_{j1} d_{l2}} \exp(i[k(d_{l2} - d_{j1}) + \varphi_l - \varphi_j]).$$

Por cuanto las diferencias de fases $\varphi_l - \varphi_j$ para $l \neq j$ toman valores arbitrarios, los términos con $l \neq j$ dan una aportación muy pequeña y pueden ser despreciados. Vamos a considerar, en adelante, que $d_{j1} \gg b$, $d_{j2} \gg b$, de manera que para todos los j en el denominador se puede poner $d_{j1} = d_{j2} = d$. Por último, I_1 e I_2 se obtienen de la expresión para $c_{12}(\tau)$ si se supone que el punto P_1 coincide con P_2 y resultan ser iguales a

$$I_1 = I_2 = NA^2/d^2.$$

Como consecuencia de lo dicho tenemos

$$c_{12}(\tau) + is_{12}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \exp[ik(d_{j2} - d_{j1})]. \qquad (1)$$

Si d_{j2} y d_{j1} son considerablemente mayores que las dimensiones $2b$ de la fuente y la distancia $2l$ entre los puntos P_1 y P_2, entonces

$$d_{j2} - d_{j1} = 2l\, \Delta b j/d,$$

donde $\Delta b = 2b/N$ es la distancia entre los átomos emisores adyacentes. Debido a que $\Delta b \ll \lambda$, la suma respecto al índice j puede ser sustituida por la integral, el cálculo de la cual da

$$c_{12}(\tau) = \frac{\operatorname{sen}(2kbl/d)}{2kbl/d}; \quad s_{12}(\tau) = 0.$$

Hacemos notar que para obtener la relación (1) no hemos utilizado la suposición acerca de la disposición de las fuentes puntuales de la luz y de los puntos P_1 y P_2, sino que de la gran magnitud de d_{j2}, d_{j1}. Por eso (1) conserva su validez para cualquier distribución irregular de las fuentes, si están dispuestas sobre un segmento de línea, un sector de alguna superficie o en un volumen limitado.

25. Calcular la razón $\overline{I^2}/\overline{I}^2$ para la distribución de Rayleigh.

Respuesta:

$$\overline{I^2} = \int_0^\infty I^2 \exp(-I/\bar{I})\, dI/\bar{I} = 2(\bar{I})^2.$$

26. ¿Cómo varía la dimensión de los anillos de interferencia al cambiar en el patrón de Fabry—Perot la capa intermedia de aire por una de vidrio ($n = 1{,}5$)?

Indicación. En el método analítico de resolución es necesario tomar en consideración la refracción de la luz al salir ésta del vidrio.

La distancia angular entre las franjas en el caso de la capa intermedia de aire es

$$\delta i = \frac{\lambda}{2d \operatorname{sen} i}.$$

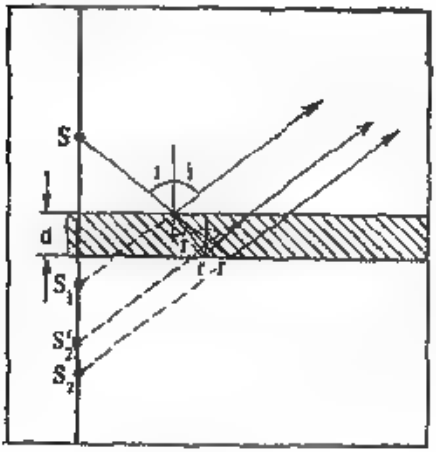


Fig. 5.

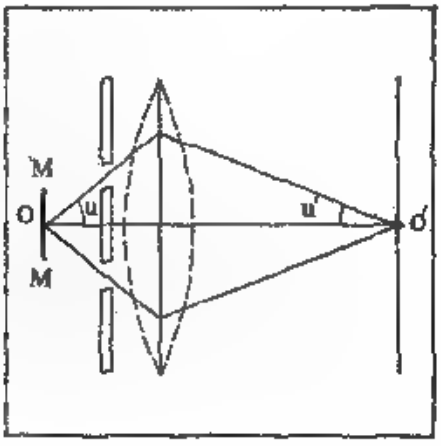


Fig. 6

La distancia angular entre las franjas en el caso de la capa intermedia de vidrio es

$$\delta i' = n \frac{\cos r}{\cos i} \delta r = n \frac{\cos r}{\cos i} \frac{\lambda}{2d \operatorname{sen} i}.$$

Respuesta: Los radios de los anillos aumentan en la razón $\operatorname{tg} i/\operatorname{tg} r$.

27. Resolver geométricamente el problema 26, hallando el cambio de las distancias entre las fuentes virtuales (fig. 5).

Para el aire, $S_1S_2 = 2d$. Para el vidrio $S_1S_2' = 2d \dfrac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} i} < 2d$.

Respuesta. Los radios de los anillos aumentan en la razón $\operatorname{tg} i/\operatorname{tg} r$.

28. Los rayos incidentes bajo un ángulo $i = 49°$ sobre la lámina del interferómetro de Jamin con un espesor $h = 2$ cm e índice de refracción $n = 1{,}51$, dan el máximo de quinto orden para $\lambda = 500$ nm. Determinar el ángulo entre las láminas.

Respuesta: $\varphi \approx 0{,}6'$.

29. ¿Cómo variará el cuadro interferencial creado por la lámina de Lummer—Gehrke hecha de crown ($n = 1{,}50$), si una de sus superficies es sumergida en bisulfuro de carbono ($n = 1{,}75$)?

Respuesta: El cuadro se desplazará 1/2 de franja.

30. Mostrar que el flujo de energía en la onda estacionaria es igual a cero. *Indicación.* Utilizar el teorema de Umov—Poynting.

31. Examinar detalladamente por qué en la luz transmitida y en la reflejada los cuadros interferenciales en las láminas delgadas se complementan mutuamente (observar las diferencias de fases, por ejemplo, para los anillos de Newton, prestando atención a la pérdida de fase en el límite).

32. Dos ondas no monocromáticas procedentes de fuentes independientes no dan interferencia. Sin embargo, cada una de ellas puede ser representada como un conjunto de ondas monocromáticas (método de Fourier). Cada par de tales ondas monocromáticas de un mismo período es capaz de dar un cuadro estable de interferencia. Explicar por qué nuestras ondas no dan interferencia, a pesar de que todas sus componentes interfieren de dos en dos. (Prestar atención al resultado de la interferencia de dos pares de componentes con frecuencias cercanas).

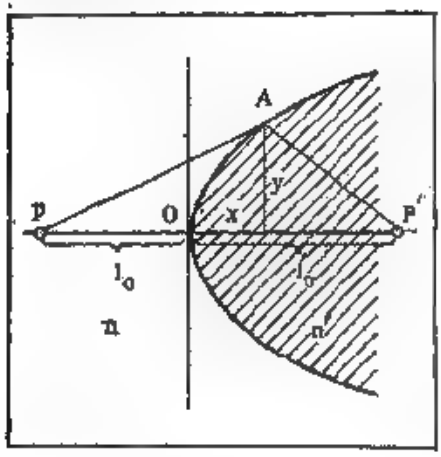


Fig. 7

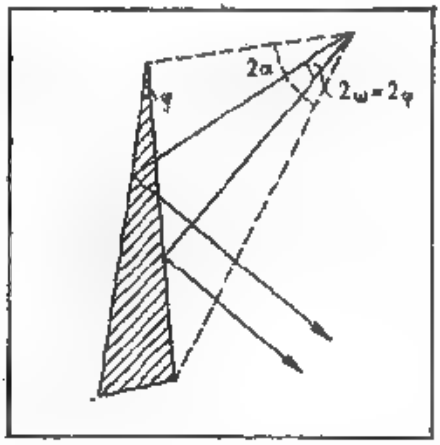


Fig. 8

33. *Experimento de Schrödinger.* Para observar la interferencia de haces, que divergen bajo ángulos grandes, Schrödinger utilizó el dispositivo mostrado en la fig. 8. Como fuente de luz sirve el hilo de Wollaston incandescente MM de diámetro $2d = 1$ μm. ¿Cuál será el ángulo límite u, con el cual todavía es posible la observación de la interferencia?

Respuesta: Las franjas se borran bajo la condición $2d \operatorname{sen} u \geq \lambda$, es decir, $u \approx 30°$.

34. Deducir la ley de reflexión de la luz en un espejo plano y mostrar que en este caso el tiempo es mínimo, basándose en el principio de Fermat.

35. La superficie que representa el lugar geométrico de los puntos A, para los cuales la suma de los caminos ópticos hasta los dos puntos conjugados P y P' es constante, se llama *aplanática*. Una superficie reflectora de este tipo es el elipsoide de revolución con respecto a sus focos. La superficie aplanática refractora fue indicada por Descartes (año 1637): ésta es la superficie de revolución, cuya sección (óvalo cartesiano) con el plano que pasa a través del eje, se define por la condición

$$nAP + n'AP' = \text{const}$$

para todos los A (fig. 7).

Hallar la ecuación del óvalo cartesiano (los parámetros del problema son: las distancias $PO = l_0$, $OP' = l_0'$ y los índices de refracción de los medios n y n'). Señalar en el dibujo las superficies, para las cuales es aplicable la exigencia de mínimo y de máximo en el enunciado del teorema de Fermat.

36. Construir el diagrama de la disposición de los vectores E, H y v en el caso de reflexión en el límite vidrio—agua, vidrio—aire y aire—vidrio.

37. ¿Por qué en el caso de interferencia en una cuña con un ángulo φ pequeño (fig. 8) se puede lograr una luminancia mucho mayor que con los espejos dobles de Fresnel?

Respuesta: La apertura 2α de los haces superpuestos se caracteriza por las dimensiones de la cuña y puede hacerse grande; la apertura de interferencia se define por el ángulo de la cuña y es igual a 2φ, es decir, puede hacerse pequeña, y por lo tanto, el ancho de la fuente puede hacerse grande.

38. En la fabricación del biprisma de Fresnel es muy difícil hacer del vidrio un biprisma con un ángulo en el vértice casi igual a 180°, por esto frecuentemente vencen esta dificultad de la siguiente manera: fabrican un biprisma de vidrio ($n = 1{,}52$) con un ángulo que difiere notablemente de 180° (por ejemplo, 170°), y complementan el aparato con un vidrio plano pegado junto con el biprisma de tal manera que se forma una cavidad (fig. 9). Esta cavidad se llenada de benceno ($n = 1{,}50$).

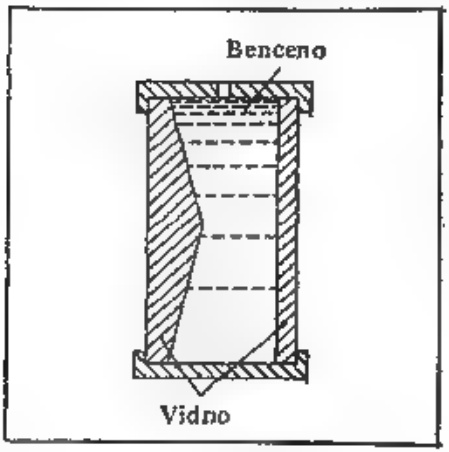


Fig. 9

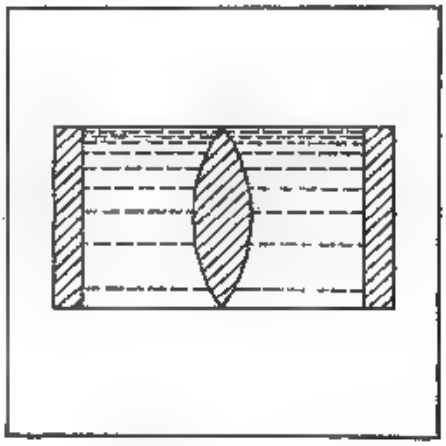


Fig. 10

Calcular el biprisma equivalente de vidrio.

Respuesta: $\alpha = 179°44'$.

39. Coloquemos una lente hecha de vidrio en un líquido que posee el mismo índice de refracción y que ha sido vertido en una cubeta plana (fig. 10). Sea que sobre la cubeta incide una onda plana. Utilizando el principio de tautocronismo, dibujar la forma del frente de onda al otro lado de la cubeta.

40. Dibujar la forma aproximada del frente de onda (tipo de frente: plano, convexo, cóncavo) para el ejercicio anterior en el caso cuando el líquido vertido posee un índice de refracción mayor, menor e igual al índice de refracción de la sustancia de la lente.

41. Una lente de crown ($n = 1{,}50$) está sobre una lámina, una mitad de la cual ha sido hecha del mismo crown, y la otra, de flint con el índice de refracción de 1,70. Las capas intermedias entre la lente y la lámina han sido llenadas

de anilina ($n = 1{,}58$). Describir el carácter de los anillos de Newton en la disposición dada.

42. Realizar el experimento con una película fina (petróleo en el agua, o pompa de jabón) y examinar en el experimento la localización de las franjas en la superficie de la película y la variación de la coloración al variar el ángulo de observación.

43. Calcular la variación de la visibilidad en las franjas interferenciales en el dispositivo de Fresnel a medida que aumenta el ancho de la fuente.

Indicación. Dividamos la imagen de la fuente con ancho $2b$ en pequeñas franjas angostas, dx ($\ll \lambda$), cada una de las cuales puede dar una iluminación máxima $I_0\,dx$. Para el punto N a la distancia h del máximo central M (fig. 11, *a*) la iluminación creada por el sector dx en el centro de la fuente, se define por la expresión

$$dE = I_0\,dx\left(1+\cos\frac{4\pi lh}{\lambda D}\right) = I_0\,dx\left(1+\cos\frac{2\pi h}{\mathscr{B}}\right),$$

donde para abreviar mediante $\mathscr{B}$ se designa la razón $\lambda D/2l$ (ancho de la franja interferencial). La iluminación, creada en N por el sector dx dispuesto a la

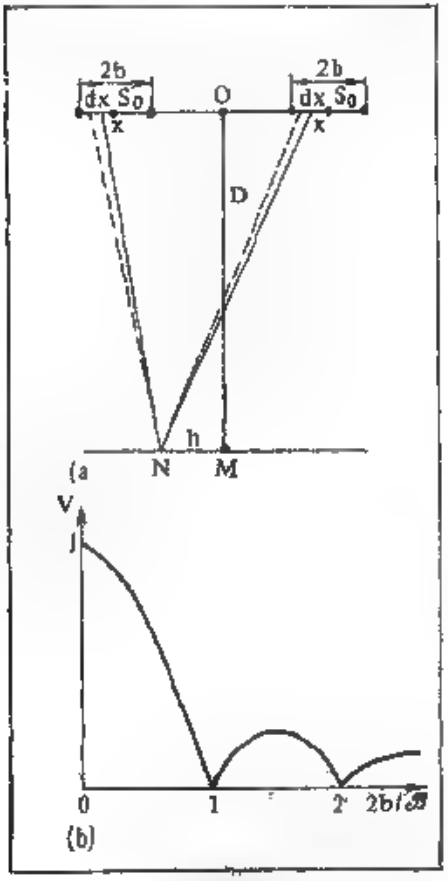


Fig. 11

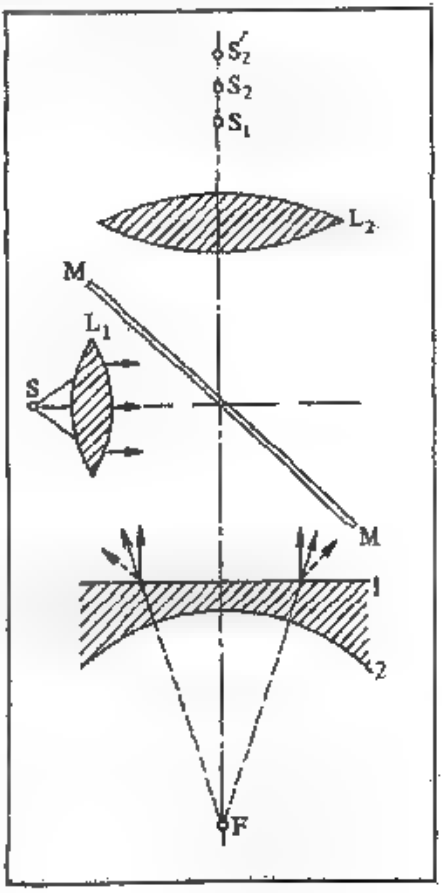


Fig. 12

izquierda de S_0, a la distancia x, es igual a

$$dE = I_0\,dx\left(1+\cos\frac{2\pi(h-x)}{\mathcal{R}}\right).$$

Para la iluminación total en el punto N obtendremos

$$E=\int_{-b}^{+b} I_0\left(1+\cos\frac{2\pi(h-x)}{\mathcal{R}}\right)dx = I_0 2b + I_0\frac{\mathcal{R}}{\pi}\operatorname{sen}\frac{2\pi b}{\mathcal{R}}\cos\frac{2\pi h}{\mathcal{R}}.$$

El primer término de esta suma da para toda la pantalla (para cualquier h) una iluminación constante (fondo), y el segundo, una iluminación periódicamente variable en dependencia de h (máximos y mínimos). Al crecer el ancho $2b$ de la fuente el fondo crece continuamente, y la magnitud de los máximos no puede ser mayor que $I_0\mathcal{R}/\pi$. De esta manera, con el aumento del ancho de la fuente el contraste disminuye continuamente. La razón

$$V=\frac{E_{máx}-E_{mín}}{E_{máx}+E_{mín}}$$

lleva el nombre de *visibilidad* de las franjas,

$$V=\frac{\mathcal{R}}{2\pi b}\left|\operatorname{sen}\frac{2\pi b}{\mathcal{R}}\right|.$$

A medida que aumente la magnitud $2b$, la visibilidad tiende a cero, pasando a través de un conjunto de máximos y mínimos. La variación de la visibilidad en dependencia de $2b/\mathcal{R}$ se muestra esquemáticamente en la fig. 11, *b*.

44. El esquema de obtención de los anillos de Newton está representado en la fig. 12. ¿Cómo variarán los radios de los anillos si en lugar de aire el espacio *1—2* se llenará de una sustancia con un índice más grande de refracción, por ejemplo, de agua ($n = 1{,}33$)? (Experimento de Newton).

Respuesta. Los radios de los anillos correspondientes disminuirán ya que disminuye λ. ¿Cómo hacer concordar esta respuesta con las de los problemas 26 y 27?

Indicación. En el caso de la capa intermedia de aire los anillos se obtienen al sobreponerse la onda reflejada en *1* (haz paralelo) y la onda reflejada en *2* (haz divergente procedente del foco virtual F del espejo convexo *2*). La lente L_2 da dos imágenes virtuales de la fuente S_1 (el haz paralelo reflejado en *1* es recogido en el foco de la lente L_2) y de S_2 (imagen de F). La dimensión de los anillos se define por la distancia $S_1'S_2'$. Cuando se llena el espacio *1—1* con agua, los rayos reflejados en *2*, al refractarse en la capa de agua (lente divergente), se volverán aún *más divergentes* y la lente L_2 los recogerá en el punto S_1', de manera que $S_1'S_1' > S_2'S_1'$, y por lo tanto, los anillos se harán más menudos.

45. ¿Qué forma tendrán los anillos de Newton si la lámina está hecha de dos pedazos (crown $n = 1{,}50$ y flint $n = 1{,}75$), la lente es de crown ($n = 1{,}50$), y el espacio entre ellos ha sido llenado de bisulfuro de carbono ($n = 1{,}62$) (fig. 13)?

Respuesta. Los semianillos oscuros sobre el crown se unirán con los semianillos brillantes sobre el flint y viceversa.

46. Con ayuda del principio de reciprocidad establecer cómo varían las condiciones de reflexión y refracción al cambiar el orden de disposición de los medios (problema de Stokes). Se supone que los medios no son absorbentes.

Principio de reciprocidad: al dirigir contrariamente todos los rayos que salen del sistema el rayo incidente también se invierte.

Indicación (véase fig. 14). Sea que para las amplitudes en el límite *I—II* el coeficiente de reflexión es igual a ρ, el coeficiente de transmisión igual a τ, y en el límite *II—I*, ρ' y τ', respectivamente.

Recorrido directo: la amplitud del rayo incidente (EO) es igual a A, la amplitud del reflejado (OB), igual a $A\rho$, y la del refractado (OC), igual a $A\tau$.

Inversión: al incidir la luz a lo largo del rayo CO el rayo refractado (a lo largo de OE) tiene una amplitud $A\tau\tau'$, el rayo reflejado (a lo largo de OD), una amplitud $A\tau\rho'$; al incidir la luz a lo largo de BO el rayo reflejado (a lo largo de OE) tiene una amplitud $A\rho^2$; el rayo refractado (a lo largo de OD), una amplitud $A\rho\tau$. Según el principio de reciprocidad

$$A\tau\tau' + A\rho^2 = A, \quad A\tau\rho' + A\rho\tau = 0,$$

es decir,

$$\rho = -\rho' \quad \text{y} \quad \tau\tau' = 1 - \rho^2.$$

Respuesta: Al cambiar el orden de la disposición de los medios la magnitud del coeficiente de reflexión se mantiene invariable, pero cambia su signo, $\rho' = -\rho$ (la fase varía en π). El coeficiente de transmisión varía: $\tau' = (1 - \rho^2)/\tau$. El hecho de que el orden de disposición de los medios cambie τ manteniéndose invariable ρ, es resultado de la variación de la sección del haz en la refracción.

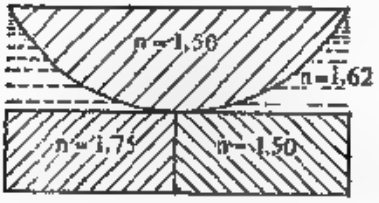


Fig. 13

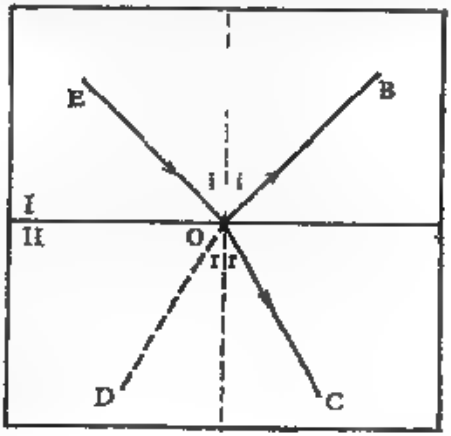


Fig. 14

A partir de la ley de conservación de la energía es fácil mostrar que para $|\rho| = |\rho'|$ debe cumplirse $\tau\tau' = (1 - \rho^2)$ (véase también el ejercicio 191).

47. Considerando la intensidad del haz incidente como 1 deducir la fórmula de la distribución de la intensidad en la luz transmitida (I_{trans}) y en la reflejada (I_{ref}) en el caso de interferencia múltiple en una lámina planoparalela, suponiendo que el coeficiente de absorción $A = 0$, de manera que $T + R = 1$.

Respuesta:

$$I_{trans} = \frac{T^2}{(1-R)^2} \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \operatorname{sen}^2 (1/2\psi)} = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \operatorname{sen}^2 (1/2\psi)},$$

$$I_{ref} = \frac{\frac{4R}{(1-R)^2} \operatorname{sen}^2 (1/2\psi)}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \operatorname{sen}^2 (1/2\psi)}.$$

Indicación. Suponiendo que el coeficiente de reflexión para la amplitud es igual a ρ, y el coeficiente de transmisión, a τ (el coeficiente de absorción se

supone igual a cero, $\alpha = 0$) de modo que $R = \rho^2$, $T = \tau^2$ y $T + R = 1$, hallaremos las amplitudes de los rayos transmitidos (0, 1, 2, 3, . . .) y de los reflejados (0', 1', 2', 3', . . .) (*fig.* 15). De acuerdo con esto la oscilación luminosa en el haz transmitido se da por la expresión $\tau^2\rho^{2k} \exp [i(\omega t - k2\pi m)]$, donde k es el número del haz ($k = 0, 1, 2, \ldots$), y m, el orden de interferencia. Para los haces reflejados tenemos $\tau^2\rho^{2k-1} \exp [i(\omega t - 2\pi m)]$ donde $k = 1, 2, 3, \ldots$ Para el haz reflejado de orden cero ($k = 0$) tenemos $\rho \exp [i(\omega t + \pi)] = -\rho \exp (i\omega t)$ (se toma en cuenta la pérdida de una semionda en comparación con el haz transmitido, como consecuencia de la divergencia en las condiciones de reflexión).

Así, la oscilación resultante:

para el haz transmitido

$$A = \sum_{k=0}^{k=\infty} \tau^2\rho^{2k} \exp [i(\omega t - k2\pi m)] = \frac{T}{1 - R \exp(-i2\pi m)} \exp (i\omega t),$$

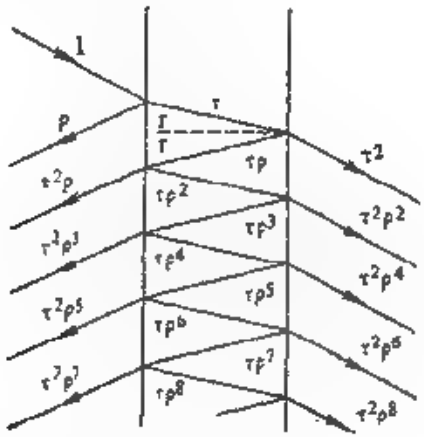


Fig. 15

para el haz reflejado

$$B = -\exp(i\omega t) \left\{\rho - \tau^2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \rho^{2k-1} \exp[-i2\pi m]\right\} =$$

$$= -\exp(i\omega t)\, \rho \frac{1 - (T + R) \exp(-i2\pi m)}{1 - R \exp(-i2\pi m)} = -\exp(i\omega t)\, \rho \frac{1 - \exp(-i2\pi m)}{1 - R \exp(-i2\pi m)}.$$

Pasando a las intensidades, es decir, formando $I_{trans} = AA^*$ e $I_{ref} = BB^*$, hallaremos:

$$I_{trans} = \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos 2\pi m} =$$

$$= \frac{T^2}{(1-R)^2} \frac{1}{1 + \dfrac{4R}{(1-R)^2} \operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}\Psi)} = \frac{1}{1 + \dfrac{4R}{(1-R)^2} \operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}\Psi)},$$

$$I_{ref} = R\,\frac{2[1-\cos 2\pi m]}{1-2R\cos 2\pi m+R^2} = \frac{\dfrac{4R}{(1-R)^2}\operatorname{sen}^2(^1/_2\psi)}{1+\dfrac{4R}{(1-R)^2}\operatorname{sen}^2(^1/_2\psi)}.$$

donde $\psi = 2\pi m$. De aquí $I_{trans} + I_{ref} = 1$ para cualquier dirección (cualquier ψ ó m), es decir, la suma de intensidades del haz transmitido y del reflejado es igual a la intensidad del incidente de acuerdo con el principio de conservación de la energía, ya que nosotros despreciamos la absorción ($A = 0$).

Observación. En la deducción la sumación se ha efectuado desde 0 hasta ∞, es decir, hemos considerado el número de haces interferentes infinitamente grande. Esto corresponde a la suposición de que las dimensiones del instrumento de interferencia sean ilimitadas o a la admisión de que la disminución de la intensidad de los haces que se suman dependiente de R se realice lo suficientemente rápido para poder considerar los haces de órdenes altos como muy débiles.

48. Representar gráficamente la disposición mutua de I_{trans} e I_{ref} en dependencia de R en el caso de interferencia múltiple (véase ejercicio 47).

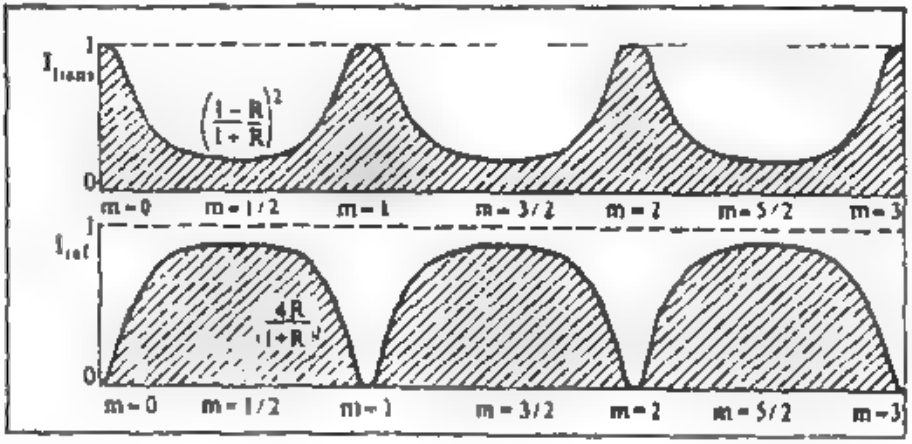


Fig. 16

Con el aumento de R la fracción total de luz reflejada crece en comparación con la transmitida, pero de tal manera que $I_{trans} + I_{ref}$ se mantiene constante e igual a la intensidad del haz incidente (fig. 16).

49. Las franjas de diferente orden en la lámina de Lummer—Gehrke se disponen a ambos lados de la lámina. 1) ¿Dónde se sitúan las franjas de órdenes altos? 2) ¿Cuál es la dependencia de la anchura de la franja del orden de interferencia, de la longitud de onda y del espesor de la lámina?

Respuesta: 1) $m\lambda = 2h\sqrt{n^2 - \cos^2\varepsilon}$, donde m es el orden de interferencia, y ε, el ángulo formado por el rayo emergente con la superficie de la lámina, de esta manera, con el aumento del orden las franjas se alejan de la lámina (ε crece).

2) $\Delta\varepsilon = \dfrac{\lambda\sqrt{n^2-1}}{2hc}$, es decir, la anchura de las franjas aumenta con la longitud de onda y disminuye al aumentar el espesor de la lámina y el orden de interferencia.

50. Las franjas de diferente orden en el patrón de Fabry—Perot tienen la forma de anillos concéntricos. 1) ¿Donde se sitúan las franjas de órdenes altos, más cerca del centro o lejos de él? 2) ¿Cuál es la dependencia de la anchura de la franja en función del orden de interferencia, de la longitud de onda y del espesor h del patrón?

Respuesta. 1) $m\lambda = 2h\cos\varphi$, donde φ es el ángulo entre el rayo emergente y la normal a la lámina. De esta manera, con el aumento del orden ($+\Delta m$) las franjas se acercan más al centro (φ disminuye).

2) $\Delta\varphi = \dfrac{\lambda}{2h\,\mathrm{sen}\,\varphi}$, es decir, la anchura de las franjas aumenta con la longitud de onda y con el aumento del orden de interferencia y disminuye, al aumentar el espesor del patrón.

51. El cuadro de interferencia también se observa al pasar la luz a través de una película fina. En este caso el cuadro tiene una forma complementaria al cuadro en la luz reflejada (los máximos en los lugares de los mínimos y viceversa, los colores (en el caso de luz blanca) son menos saturados (blanquecinos). Mostrar el recorrido de los rayos interferentes en la luz transmitida y explicar las particularidades señaladas.

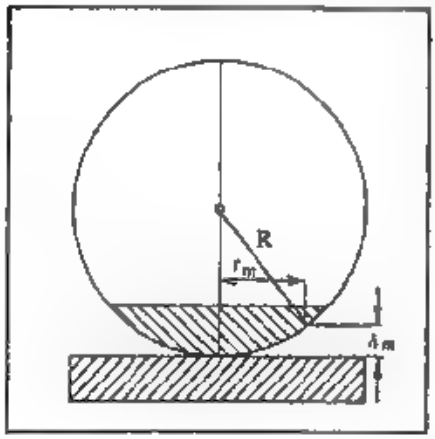


Fig. 17

Indicación. Considerar la reflexión reiterada, el principio de conservación de la energía o pérdida de una semionda en cada acto de reflexión, la interrelación entre las intensidades de la luz transmitida y la reflejada.

52. En las películas y pompas de jabón la aparición de la mancha oscura sirve como indicio de que la película está a punto de romperse. Explicar este fenómeno.

Indicación. Hallar la condición interferencial para la formación de la mancha oscura.

53. Calcular el radio del m-ésimo anillo oscuro de Newton (fig. 17).

Respuesta: $r_m^2 = (2R - \delta_m)\,\delta_m \approx 2R\delta_m$ para $\delta_m = {}^1/_2 m\lambda$, es decir, $r_m = \sqrt{mR\lambda}$.

54. Si se mira la superficie de un espejo cubierto de polvo menudo, entonces se verán claramente los anillos interferenciales como resultado de la interferencia entre los rayos difundidos por las partículas de polvo y por su reflexión en el espejo. ¿De qué manera aparece la insignificante diferencia de recorrido necesaria, a pesar del gran espesor del espejo? ¿Por qué este experimento se logra sólo con un polvo muy fino?

Respuesta. Véase fig. 18; póngase atención a la magnitud de la apertura de interferencia (BSO) en este caso.

55. *Reflexión de la luz en una superficie rugosa* (fig. 19). Al incidir la luz sobre una superficie rugosa se obtiene una reflexión irregular y difusa. Sin embargo, si el ángulo de incidencia es próximo a 90°, entonces se podrá observar una reflexión especular (imagen) en la superficie mate y, además, con matices rojizos. Explicar el fenómeno.

Indicación. La diferencia de recorrido en el caso de una reflexión regular en el vértice y en la base de las rugosidades es igual a $2h\cos i$, donde h es la altura de la rugosidad e i, el ángulo de incidencia. Si $2h\cos i = m'/_2\lambda$, donde m es impar, entonces en la dirección de la reflexión regular no habrá luz, y ella pasará por otra dirección i'. En el caso de diversos h la luz se refleja por diversas

direcciones i' (difusamente). Si $h \cos i \ll \lambda$, entonces la condición $2h \cos i = m\lambda/_2$ es imposible, y se observará una reflexión regular. Cuanto mayor sea λ, tanto mayor podrá ser el h y menor el i para que se cumpla esto. De aquí se deduce que la superficie es especular cuando h es pequeño en comparación con λ; para los rayos Roentgen λ es del orden de las distancias atómicas y un pulido especular es imposible. Solamente en el caso de incidencia bajo un ángulo deslizante muy pequeño se logró observar la reflexión especular de los rayos Roentgen (Compton, año 1923, ángulo de deslizamiento fue igual a 10'—20', $\lambda = 1{,}28$ Å).

56. *Transmisión de la luz a través de una superficie mate* (fig. 20). Una onda plana, al pasar a través de una superficie mate, se vuelve difusa (el vidrio mate «no es transparente»). Al ser cubierto el vidrio mate con agua o, mejor, con benceno o glicerina ($n \approx 1{,}50$), éste se aclara. Explicar el fenómeno. ¿Para qué dimensiones (h) de las rugosidades el vidrio será mate?

Indicación. Examinar la diferencia de recorrido al pasar la luz a través de las rugosidades del vidrio mate.

Respuesta: $h(n-1) > \lambda/_2$.

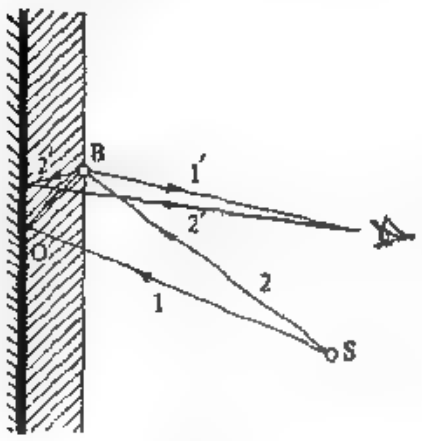


Fig. 18

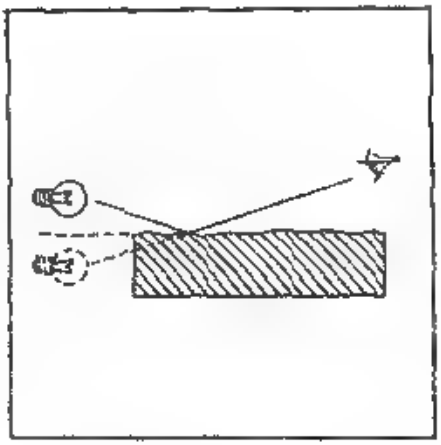


Fig. 19

57. Calcular el radio de la zona central de Fresnel para el caso representado en la fig. 21, donde $AP = a$, $PB = b$, $MB = b + \lambda/_2$ y $MO = r$.

Respuesta: $r = \sqrt{\dfrac{ab}{a+b}\lambda}$. (Despreciar los términos con λ^2 en comparación con λ.)

58. Calcular el radio de la zona central de Fresnel para el caso de una onda plana geométricamente y como solución particular del problema 57.

Respuesta: $r = \sqrt{b\lambda}$.

59. Analizar el problema acerca de la reflexión especular y de la reflexión de una onda plana en un límite plano según el método de las zonas de Fresnel.

Indicación. Dividir el límite en zonas planas de ancho a y perpendiculares al plano de incidencia.

Si la onda incide bajo un ángulo φ, se refleja en el primer medio bajo un ángulo ψ y pasa al segundo bajo un ángulo χ, entonces para los rayos reflejados en el límite de las zonas, la diferencia de recorrido

$$\Delta_r = a(\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\psi),$$

y para los refractados

$\Delta_{ik} = a\,(n_1 \operatorname{sen} \varphi - n_2 \operatorname{sen} \chi)$.

Siempre se puede escoger a de tal manera que $\Delta_1 = \lambda$, es decir de modo que las ondas reflejadas en las mitades derecha e izquierda de cada zona se anulen mutuamente. Sólo para la dirección $\operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} \psi$, es decir $\varphi = \psi$, es imposible escoger el ancho de la zona de esta manera. Por esta dirección la luz se reflejará. Análogamente para las ondas refractadas la *única* dirección, por la cual la luz para cualquier división de la superficie en zonas no se extingue, satisface la condición $n_1 \operatorname{sen} \varphi - n_2 \operatorname{sen} \chi = 0$, es decir la ley de refracción.

60. Calcular la amplitud de oscilación en el punto B (véase fig. 21), que es originada por la acción de la primera zona de Fresnel.

Indicación. La amplitud resultante es proporcional al área de la primera zona, que según el ejercicio 58 es igual a $ab\lambda$. Pero debido a que las ondas secundarias procedentes de los diversos sectores de la primera zona alcanzan el punto B con cierta diferencia de fases, su acción, de acuerdo con la fig. 8,8, disminuye como $2/\pi$.

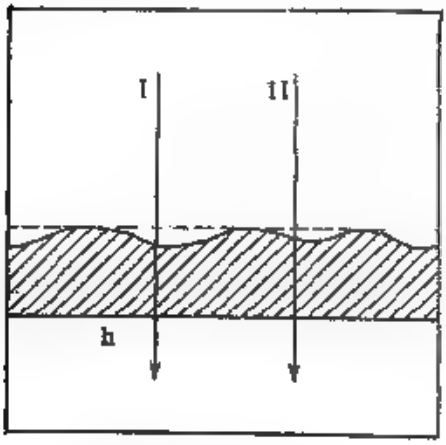


Fig. 20

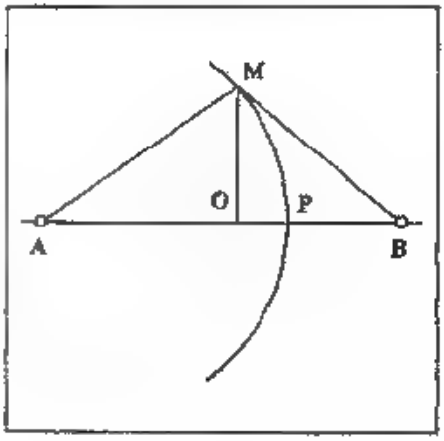


Fig. 21

Respuesta. La amplitud es proporcional a $2b\lambda$.

61. Calcular la amplitud de la onda secundaria elemental de Fresnel—Huygens.

Indicación. a_0 es proporcional a la amplitud A de la oscilación, que llega hasta el elemento ds, y al área de este elemento, es decir

$a_0 = cA\,ds$.

Para determinar el coeficiente c comparemos la acción inmediata de la onda plana A sen $(\omega t - \varphi)$ en el punto B (véase fig. 21) y la acción calculada por el método de Fresnel, cuando como superficie auxiliar se escoge el frente de la onda plana. La distancia entre P y B es b.

1. Cálculo directo para el punto B: A sen $(\omega t - \varphi - kb)$, es decir la amplitud en el punto B deberá igualarse a A y la fase a $-(\varphi + kb)$.

2. Cálculo por el método de Fresnel. De acuerdo con (33.1) la amplitud en B es aproximadamente igual a a_0/b (ya que $MB \approx b$), es decir $cAds/b$. De acuerdo con el ejercicio 60 la acción de la primera zona tomando en cuenta su área y la diferencia de fases desde los diversos sectores de ella, es $cA2b\lambda/b = 2cA\lambda$.

Debido a que la acción en el punto B es igual a la *mitad* de la acción de la primera zona, la amplitud buscada en el punto B es $\varepsilon A\lambda$.

La comparación con el cálculo directo da $\varepsilon A\lambda = A$, es decir

$\varepsilon = 1/\lambda$.

De este modo, desde cada elemento ds va la onda esférica

$$\frac{a_1}{r}\operatorname{sen}(\omega t - \varphi - kr) = \frac{A\,ds}{r\lambda}\operatorname{sen}(\omega t - \varphi - kr).$$

82. Determinar la diferencia de recorrido de los rayos paralelos reflejados en un espejo plano.

Respuesta: Cero.

83. Si un orificio circular (por ejemplo, el diafragma iris) crece de tal manera, que su dimensión, anteriormente igual a una zona, se hace igual a dos, entonces en el punto correspondiente B la iluminación disminuye considerablemente llegando casi hasta cero, a pesar de que el flujo de energía luminosa a través del orificio aumentado casi se duplica. ¿Cómo hacer concordar estos dos hechos?

Indicación. Prestar atención a la distribución de la energía en todo el cuadro de interferencia.

84. Supongamos que en el experimento de Arago—Poisson la fuente de luz no es un punto sino un pequeño cuerpo luminoso, por ejemplo, una pequeña esfera. ¿Qué se observará en el centro de la sombra geométrica: la imagen de la fuente o un punto brillante?

Respuesta: La imagen de la fuente.

85. Cuando dividimos la superficie de la onda en zonas anulares, nosotros llegamos a la conclusión de que la fase determinada por el método de Fresnel se diferencia de la verdadera en $\pi/2$, y partiendo la superficie de la onda en muescas meridionales nosotros deducimos que la diferencia en fase entre la onda calculada y la real es igual a $\pi/4$. Explicar la causa de la aparente divergencia.

Indicación. Al comparar es necesario partir de una misma dirección inicial del vector correspondiente al sector elemental en el polo de la onda. En el método de las muescas se considera como dirección inicial a la del vector condicionado por la acción de la pequeña franja meridional. Se tiene que introducir una correspondiente corrección dividiendo la pequeña franja en zonas análogas a las meridionales.

86. *Teorema de Babinet.* Las pantallas y los orificios se denominan complementarios, si ellos coinciden por su forma, dimensiones y disposición. Mostrar que el cuadro de difracción originado por las pantallas y orificios complementarios coincide para todos los puntos del plano focal, a excepción de la región A correspondiente a la imagen de la fuente S en ausencia de la difracción.

Indicación. Prestar atención a que en todas las regiones, a excepción de A, reina la oscuridad, si la onda no es limitada por nada, es decir si no hay pantallas ni orificios. Si en algún punto la amplitud en presencia de la pantalla es α, y en presencia del orificio complementario es β, entonces $\alpha + \beta = 0$.

87. Hallar gráfica y analíticamente la amplitud de la oscilación resultante en el caso de difracción de Fraunhofer por una rendija con una incidencia oblicua de los haces.

88. Determinar los valores del ángulo φ, que responde a los máximos de amplitud en el caso de difracción de Fraunhofer por una rendija.

Indicación. La condición de máximo conduce a la ecuación transcendental $\operatorname{tg}\alpha = \alpha$, donde $\alpha = (b\pi/\lambda)\operatorname{sen}\varphi$, que se resuelve gráficamente (fig. 22) y que tiene raíces para

$\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1{,}43\pi$, $\alpha_2 = 2{,}46\pi$, $\alpha_3 = 3{,}47\pi$, $\alpha_4 = 4{,}47\pi$ ...

69. Calcular los valores de la amplitud y de la intensidad en la difracción de Fraunhofer por una rendija para los valores de $\alpha = (b\pi/\lambda)$ sen φ a intervalos de 30° y construir los gráficos correspondientes.

70. Encontrar los ángulos φ que definen las posiciones de los mínimos, si la onda plana incide sobre la rendija de ancho b en la dirección que forma el ángulo ψ con la normal al plano de la rendija.

Respuesta: sen $\varphi =$ sen $\psi + m\lambda/b$, donde m son números enteros.

71. Al aumentar la rendija el doble el flujo luminoso transmitido también aumenta el doble. Por otro lado, la amplitud en este caso se duplica, de manera que la intensidad deberá crecer cuatro veces. ¿Cómo se resuelve esta aparente paradoja?

Respuesta: Véase ejercicio 63.

72. Calcular la onda difractada para la distribución gaussiana de amplitud en el frente ondulatorio plano (véase fig. 9.8, *a*)
$a(x, y) = a_0 \exp[-(x^2 + y^2)/2w^2]$.

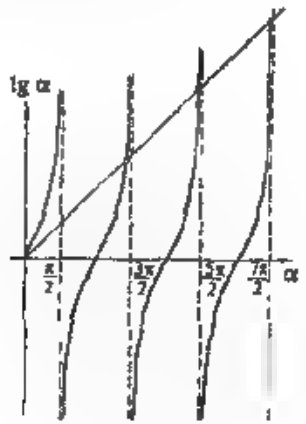


Fig. 29

Indicación. El campo buscado se determina por la integral de Fresnel—Kirchhoff

$$s(x, y) = \int\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(x', y')}{r} \cos(\omega t - kr)\, dx'\, dy',$$

$r = \sqrt{z^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2}$.

El multiplicando $1/r$ debe ser sustituido por $1/z$, y en el argumento del coseno se debe colocar aproximadamente

$r \approx z + [(x - x')^2 + (y - y')^2]/2z$,

además representar el coseno por la fórmula de Euler

$\cos \alpha = {}^1/_2 (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$

y utilizar la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\xi'^2}{2w_1^2} - \frac{(\xi - \xi')^2}{2w_2^2}\right] d\xi' = \sqrt{2\pi}\, \frac{w_1 w_2}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}} \exp[-\xi^2/2(w_1^2 + w_2^2)].$$

Respuesta:

$$s = \frac{2\pi}{k} a_0 \frac{w_0^2}{\sqrt{w_0^4 + (z/k)^2}} \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{2w^2}\right] \cos\left\{\omega t - k\left[z + \frac{x^2+y^2}{2R}\right] - \alpha\right\},$$

$$R = z + (kw_0)^2/z; \quad w^2 = w_0^2 + (z/kw_0)^2, \quad \operatorname{tg}\alpha = kw_0^2 z.$$

73. Mostrar que si el período d de la red es conmensurable con el ancho b de la rendija, de manera que $d = nb$, entonces en el espectro de la red desaparecen todos los máximos cuyos números son múltiplos del número n.

74. Deducir la fórmula (46.1)

$$A = A_0 \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \frac{\operatorname{sen} N\beta}{\operatorname{sen}\beta}.$$

Indicación. En la deducción es necesario considerar que la distribución de las amplitudes que es condicionada por la acción de una rendija (el ancho de la rendija $b \gg \lambda$), es $A_0 \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = f(\alpha)$, donde $\alpha = \frac{b\pi}{\lambda} \operatorname{sen}\varphi$, $f(\alpha)$ es una función de φ lentamente variable, y para variaciones de φ en límites no muy amplios se le puede considerar constante.

Para obtener la acción de toda la red es necesario sumar las acciones de las diferentes rendijas, considerando que la diferencia de fases de dos rendijas adyacentes es

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \operatorname{sen}\varphi = 2\beta.$$

Así, pues, la acción de la n-ésima rendija en el punto con coordenadas x, z (el eje y está dispuesto a lo largo de los trazos de la red) se expresará por el factor $u_n = f(\alpha) \exp\{i(k(x\operatorname{sen}\varphi + z\cos\varphi) + n\Phi)\}$,

$$u = \sum_0^{N-1} u_n = f(\alpha) \exp\{ik(x\operatorname{sen}\varphi + z\cos\varphi)\} S,$$

donde

$$S = \sum_0^{N-1} \exp(in\Phi) = \frac{1-\exp(iN\Phi)}{1-\exp(i\Phi)} = \frac{\exp(^1/_2 iN\Phi)}{\exp(^1/_2 i\Phi)} \frac{\operatorname{sen}(^1/_2 N\Phi)}{\operatorname{sen}(^1/_2\Phi)}.$$

Los multiplicandos que contienen exponentes imaginarios caracterizan la fase de la onda resultante y los demás definen la amplitud de ésta, que es igual a

$$f(\alpha) \frac{\operatorname{sen}(^1/_2 N\Phi)}{\operatorname{sen}(^1/_2\Phi)} = A_0 \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \frac{\operatorname{sen} N\beta}{\operatorname{sen}\beta}.$$

Pasando a la intensidad, es decir formando $u \cdot u^*$, obtendremos

$$I = u\, u^* = A_0^2 \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\alpha^2} \frac{\operatorname{sen}^2 N\beta}{\operatorname{sen}^2\beta},$$

75. Utilizando la fórmula de la distribución de la amplitud (y de la intensidad) en el espectro de la red de difracción $A = A_0 f(\alpha) \frac{\operatorname{sen} N\beta}{\operatorname{sen}\beta}$, donde $f(\alpha)$ es una función lentamente variable de φ, y $\beta = \frac{\pi}{\lambda} d \operatorname{sen}\varphi$, hallar la disposición de los máximos principales, de los mínimos adicionales y de los máximos adicionales en el espectro de la red; determinar la amplitud y la intensidad de los máximos adicionales, la semianchura del máximo principal y las intensidades relativas de los máximos adicionales

Respuesta: La posición de los máximos principales se determina de las condiciones: sen $\beta = 0$; sen $N\beta = 0$, de donde $\beta = m\pi$ y $m = 0, 1, 2, \ldots$, es decir $d \operatorname{sen} \varphi = m\lambda$. La posición de los mínimos adicionales se determina de las condiciones: sen $\beta \neq 0$, sen $N\beta = 0$, de donde $\beta = \pi (m + p/N)$, donde m es cualquier número entero, y p toma los valores $1, 2, \ldots (N - 1)$, es decir, $d \operatorname{sen} \varphi = \lambda (m + p/N)$. La posición de los máximos adicionales se determina de la condición sen $N\beta \approx 1$ (ya que sen β en forma relativamente lenta cambia al cambiar β). De aquí $\beta \approx \pi (m + \mu/2N)$, donde m es el número del máximo principal ($m = 0, 1, 2, \ldots$) y μ es un número entero impar desde 3 hasta $(2N - 3)$. Los máximos adicionales con $\mu = 1$ y $\mu = 2N - 1$ no existen, debido a que en este caso sen β varía en forma relativamente rápida (véase más adelante).

La amplitud de los máximos adicionales es proporcional a $\dfrac{1}{\operatorname{sen} (\mu\pi/2N)}$, la intensidad de éstos, proporcional a $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 (\mu\pi/2N)} \approx \dfrac{4N^2}{\pi^2\mu^2}$, ya que $\dfrac{\mu\pi}{2N}$ es pequeño para pequeños μ, es decir cerca del máximo principal. El valor β^* correspondiente a la mitad de la intensidad del máximo principal ($\infty {}^1/_2 N^2$) se define por la condición $\dfrac{\operatorname{sen}^2 N\beta^*}{\operatorname{sen}^2 \beta^*} = \dfrac{N^2}{2}$. Debido a que β^* es pequeño, $\operatorname{sen}^2 N\beta^* = {}^1/_2 (N\beta^*)^2$. La solución numérica de esta ecuación transcendental da $N\beta^* = 80° = 1{,}38$ rad. La magnitud $2\beta^*$ define la anchura del máximo principal al nivel de la mitad de la intensidad $2\beta^* = 2{,}76/N$ (fig. 23). Debido a que N es muy grande, los máximos principales son bastante ostensibles. La distancia entre los puntos, donde la función sen $N\beta$/sen β toma el valor máximo y el valor igual a la mitad del máximo, es $\beta^* = 1{,}38/N$, y la distancia entre este primer punto y el punto, donde la función dada se reduce por primera vez a cero, es $\pi N > 2\beta^* = 2{,}76/N$. A la posición del primer máximo adicional ($\mu = 1$) le corresponde $\beta = \dfrac{\pi}{2N} = \dfrac{1{,}5}{N}$. De esta manera, el primer máximo adicional ($\mu = 1$) es *cubierto* por el máximo principal adyacente, y el último máximo adicional ($\mu = 2N - 1$) es cubierto por el máximo adicional principal del siguiente orden, es decir no se observan ni el primer máximo adicional ni el $(2N - 1)$ —ésimo y quedan $(N - 2)$ máximos adicionales dispuestos entre los $(N - 1)$ mínimos adicionales.

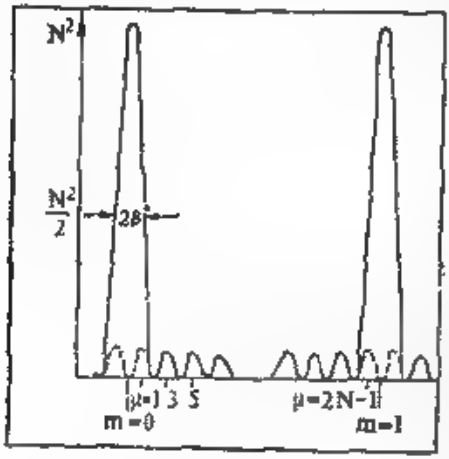


Fig. 23

El primer máximo adicional observable responde a $\mu = 3$ y se encuentra del vértice del máximo principal a una distancia correspondiente a $\beta = \dfrac{3\pi}{2N} = \dfrac{4{,}7}{N}$. Su intensidad es de $4N^2/\pi^2\mu^2$, es decir $4/9\pi^2$ del máximo principal ($\approx 1/22 = 5\%$); la intensidad relativa del siguiente máximo adicional ($\mu = 5$) es $4/25\pi^2 = 1/62 = 1{,}6\%$ del máximo principal, etc.

76. Examinar la difracción de la onda plana incidente en forma normal sobre una red sinusoidal (Rayleigh).

Indicación. Si la red está dispuesta en el plano xy y la onda llega según la dirección z, entonces la ecuación diferencial para la onda E tiene la forma

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}.$$

Para la onda sinusoidal de frecuencia ω obtendremos

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}+k^2E=0, \tag{1}$$

donde $k=\omega/v=2\pi/\lambda$ es el número de onda.

La solución de la ecuación diferencial lineal (1) tiene la forma

$$E=A\exp\left[i\left(ux-z\sqrt{k^2-u^2}\right)\right],$$

donde A y u son funciones arbitrarias. Esta solución representa un conjunto de ondas planas con amplitudes A, que se propagan en las direcciones que forman ángulos φ con el eje z, además sen $\varphi=\pm u/k$ (véase ejercicio 4). Debido a que u es una función arbitraria, las ondas de difracción, en forma general, pueden propagarse en diferentes direcciones (la única limitación: $u\leqslant k$).

El problema general sobre la difracción de una onda en un límite plano (red) se concretiza por las propiedades de esta red. En la superficie $z=0$ el valor de E según el principio de Kirchhoff—Fresnel es de la forma

$$E(x, 0)=f(x),$$

donde $f(x)$ caracteriza las propiedades de la red, es decir su influencia sobre la amplitud y la fase de la onda transmitida. En el caso de la red sinusoidal de Rayleigh con período d (a lo largo de x) y con un coeficiente máximo de transmisión C tenemos:

$$f(x)=C\exp\left(i\frac{2\pi}{d}x\right),$$

Para la red de Rayleigh escogida por nosotros, podemos determinar A y u de la condición $E(x, 0)=f(x)$, es decir, $Ae^{iux}=C\exp\left(i\frac{2\pi}{d}x\right)$, de donde $A=C$ y $u=2\pi/d$, donde C y d se definen por las propiedades de la red de Rayleigh. Poniendo el valor encontrado de u en la expresión sen $\varphi=u/k$ que caracteriza la dirección de propagación de las ondas planas difractadas, hallaremos:

$$\text{sen}\,\varphi=\frac{2\pi}{d}\frac{1}{k}=\frac{\lambda}{d} \quad \text{ó} \quad d\,\text{sen}\,\varphi=\lambda$$

De este modo, la difracción de la onda monocromática plana por la red sinusoidal de Rayleigh da espectro sólo de 1-er orden. El espectro de orden cero, correspondiente a $\varphi=0$, y los espectros de órdenes superiores, para los que sen $\varphi_m=\pm m\lambda/d$ ($m=2, 3, \ldots$), estarán ausentes. Si $f(x)=C\,\text{sen}\frac{2\pi}{d}x=$ $=\frac{C}{2i}\left[\exp\left(i\frac{2\pi}{d}x\right)-\exp\left(-i\frac{2\pi}{d}x\right)\right]$, las condiciones de frontera $E(x, 0)=$ $=f(x)$ son satisfechas, evidentemente, por dos ondas con $u=\frac{2\pi}{d}\ \frac{1}{k}=\frac{\lambda}{d}$ y $u=-\frac{\lambda}{d}$, es decir, esta red da espectros de 1-er orden y —1-er (véase ejercicio 78).

77. Utilizando los resultados del ejercicio 76, mostrar que para $d<\lambda$ los espectros de difracción no se forman y aclarar el sentido físico de este hecho.

Indicación. Para $d < \lambda$ tenemos $\operatorname{sen} \varphi > 1$, es decir no hay dirección, según la cual pueda propagarse la onda difractada. De la expresión $E = A \exp[i(ux + z\sqrt{k^2 - u^2})]$ se deduce que para $\lambda > d$, es decir para $u > k$, E tiene la forma

$$E = A \exp\left[-z\sqrt{u^2 - k^2}\right] \exp(iux),$$

es decir se obtiene una onda cuya amplitud disminuye a lo largo de z según la ley $A \exp\left[-z\sqrt{u^2 - k^2}\right]$ y, por lo tanto, a una distancia z considerable se torna tan pequeña como se quiera (amortiguación a lo largo de z). La onda con una amplitud finita se propaga sólo a lo largo de x en la capa situada lo suficientemente cerca a la red.

78. Utilizando los resultados del ejercicio 76, examinar la difracción producida por una estructura unidimensional periódica arbitraria

Indicación. Para la estructura periódica con periodo d tenemos

$$f(x) = \sum_m C_m \exp\left(im\frac{2\pi}{d}x\right),$$

donde $m = 0$, $m = \pm 1$, $m = \pm 2$, etc. (teorema de Fourier).

Para las ondas difractadas se puede escribir

$$E = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_m \exp\left\{i\left[xm\frac{2\pi}{d} + z\sqrt{k^2 - m^2\left(\frac{2\pi}{d}\right)^2}\right]\right\}.$$

Los términos de esta serie para grandes m ($m2\pi/d > 2\pi/\lambda$) disminuyen exponencialmente en dependencia de z y para grandes z no desempeñan ningún papel. Quedan sólo los términos de la serie, para los cuales $m2\pi/d \leqslant 2\pi/\lambda$. Estas son ondas planas con direcciones φ_m, para las cuales $\operatorname{sen} \varphi_m = m\lambda/d$. La última relación es la conocida fórmula de difracción por una red periódica. C_m da la amplitud del espectro de orden m y se define por el carácter de la estructura periódica (de la red).

79. Calcular la condición para que los espectros de órdenes altos se superpongan entre sí a) ¿Depende esto del periodo de la red? ¿En qué orden ocurrirá la superposición de los espectros en el caso de los rayos visibles (desde $\lambda = 400$ nm hasta $\lambda = 800$ nm)? ¿En qué orden es posible la superposición del espectro de la lámpara de mercurio (líneas brillantes desde $\lambda = 579$ nm hasta $\lambda = 253$ nm)?

Respuesta: $k\lambda_1 = (k + 1)\lambda_2$.

b) ¿Cuál es el orden máximo del espectro para la longitud de onda λ, si el periodo de la red es igual a d?

Respuesta: m es igual a la parte entera de la fracción d/λ.

80. Determinar la dispersión angular de la red de difracción con periodo $d = 2$ μm para el segundo orden si $\lambda = 5000$ Å.

Respuesta: $\delta\varphi/\delta\lambda = 0{,}4'/\text{Å}$.

81. Calcular la dispersión angular del patrón de Fabry—Perot, de la lámina de Lummer—Gehrke y del escalón de Michelson, expresándola mediante la longitud de onda, el espesor de la lámina y el índice de refracción del material de la lámina. ¿Depende la dispersión del patrón de Fabry—Perot de la distancia entre las láminas?

Respuesta: Para la lámina de Lummer—Gehrke $\dfrac{\delta r}{\delta\lambda} = \dfrac{m}{\sqrt{4d^2n^2 - m^2\lambda^2}}$.

82. Deducir la expresión para el poder separador de la lámina de Lummer—Gehrke y de otros aparatos espectrales de interferencia.

Respuesta: $A = Nm$.

Para la lámina de Lummer—Gehrke $A \approx \frac{L(n^2-1)}{\lambda}$, si se desprecia la dispersión de vidrio (L es la longitud de la lámina; n, el índice de refracción del vidrio).

83. Deducir la expresión para la región de dispersión de la lámina de Lummer—Gehrke y de otros aparatos interferenciales.

84. ¿Qué parámetros deberá poseer la red de difracción para que en el segundo orden se pueda discernir el doblete de sodio $D_1 = 589$ nm, $D_2 = 589{,}5$ nm?

Respuesta: $N \geqslant 500$ trazos.

85. ¿Qué longitud mínima debe tener la lámina de Lummer—Gehrke, hecha de un vidrio con índice de refracción $n = 1{,}5$, para separar la línea de hidrógeno $\lambda = 656{,}3$ nm, que constituye un estrecho doblete con una distancia entre las componentes de $1{,}4 \cdot 10^{-3}$ cm?

Respuesta: aproximadamente 2,5 cm.

86. La red de difracción con un ancho de 3 cm tiene un período de 3 μm. ¿Cuál es su poder separador en el segundo orden? ¿Cuál es la divergencia de longitudes de onda discernibles para los rayos verdes?

Respuesta: $A = 20\,000$, $\delta\lambda \approx 1/4$ Å.

87. En los experimentos de difracción de rayos Roentgen el haz incide sobre una red con período de 2 μm bajo un ángulo de deslizamiento de 30′ (ángulo de deslizamiento es el ángulo formado por la dirección del rayo con el plano de la red). El ángulo de difracción para el espectro de tercer orden se obtuvo igual a $1^1/_2°$. Determinar la longitud de onda de los rayos Roentgen.

Respuesta: 1,78 Å.

88. a) Examinar la difracción por una red (lámina) zonal.

Indicación. Es necesario examinar el cuadro de difracción de primer, segundo y demás órdenes de los diferentes elementos de la red y mostrar que los rayos difractados en dado orden procedentes de todos los sectores de la red se intersecan con la normal en un sólo punto.

La distancia focal de m-ésimo orden $f_m = C/2\lambda m$, donde C es una magnitud constante que caracteriza la red ($C = r_n^2/n$, donde n es el número del anillo y r_n, su radio).

¿Posee la red zonal aberración cromática?

b) Examinar la analogía entre la red de Rayleigh y la placa zonal, la transmisión de la cual varía a lo largo de su radio siguiendo la ley $\sin \frac{2\pi}{a} r^2$.

Indicación. Calcular la amplitud del campo en el eje de la placa zonal (incide una onda plana) con ayuda del principio de Huygens—Fresnel:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_{máx}} \sin\left(\frac{2\pi}{a} r^2\right) \cos\left[k\left(R + \frac{r^2}{2R}\right)\right] r\,dr.$$

La integral se resuelve al sustituir la variable r por $\sqrt{\xi}$.

89. Una lámina de vidrio, sobre la cual ha sido trazada la red de difracción, constituye una de las paredes de una caja larga llena de agua. Escribir la fórmula que define la dirección hacia los máximos dentro del agua.

Si una parte de la red sale fuera del agua, entonces tras la red se puede obtener dos espectros dispuestos uno sobre otro, uno en el agua y el otro en el aire. ¿En qué se diferencian estos espectros?

Respuesta: El espectro en el aire es 4/3 veces más largo.

90. Realizar el experimento de difracción de los rayos de luz incidentes bajo un ángulo próximo a 90° sobre una regla milimetrada y describir las condi-

ciones que permitan observar el fenómeno (es cómodo utilizar las divisiones milimetradas marcadas sobre la regla de cálculo, y como fuente escoger la espiral incandescente de una bombilla llena de gas).

91. El impulso I se forma de dos sinusoides: $y' = \operatorname{sen} \omega t$ y $y'' = 2 \operatorname{sen} 3\omega t$. El impulso II se forma de $y' = \operatorname{sen} \omega t$ y $y'' = 2 \operatorname{sen} (3\omega t + \pi/4)$.

Mostrar que estos impulsos responden a una misma distribución espectral de energía, pero tienen diferentes formas. (Para simplificar, los impulsos están representados por la suma de dos sinusoides, y no por un conjunto infinito de sinusoides con períodos próximos).

92. *Franjas de Talbot*. Si al observar en el anteojo el espectro obtenido de la red de difracción se cierra parte del objetivo del anteojo con una delgada lámina de vidrio o de mica, entonces se obtendrá un espectro intersecado por unas franjas oscuras. El fenómeno se observa, si la lámina se introduce por el extremo rojo del espectro, y no aparece si la lámina se introduce por el extremo violeta. Explicar el fenómeno partiendo de los razonamientos del § 51 acerca del rol de la red. ¿Cómo deben modificarse las condiciones del experimento para que la introducción de una capa complementaria por el lado violeta provoque el fenómeno y no lo provoque por el lado rojo?

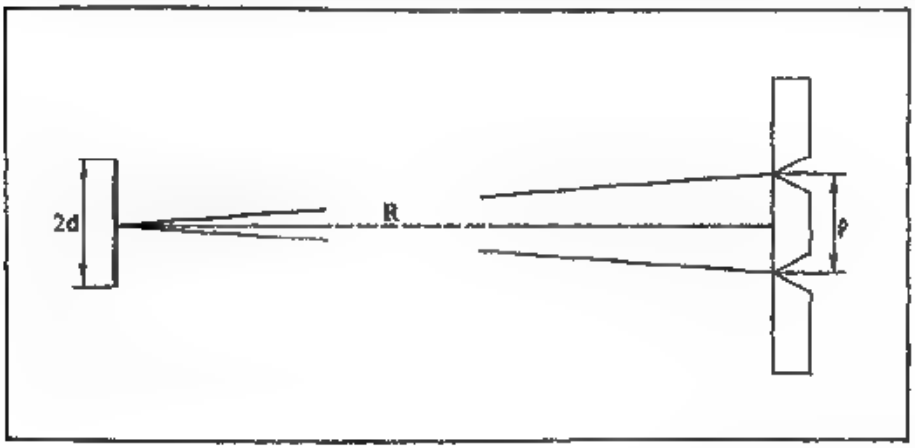


Fig. 24

Indicación. La introducción de la capa de espesor h con índice de refracción n retrasa la propagación de la luz procedente de la parte tapada de la red, introduciendo una diferencia adicional de fases proporcional a $2\pi \frac{h(n-n')}{\lambda}$, donde n' es el índice de refracción del medio. Esta diferencia de fases depende de φ, y en el espectro pueden aparecer franjas de interferencia. El retraso de los impulsos que vienen de la parte inferior de la red, o la aceleración de los impulsos que vienen de la parte superior de la red (véase fig. 9.30), permite a los impulsos retrasados alcanzar a los que se adelantaron y provoca la formación de franjas de interferencia. Así, pues, el resultado depende del signo de $n - n'$ y de la posición de la capa introducida.

93. *Experimento de difracción de Grimaldi* (año 1665). Grimaldi describió el fenómeno observado por él de la alternación de luz y sombra al iluminar dos rendijas dispuestas muy cerca con la luz procedente del Sol (el diámetro angular del Sol es igual a $31' \approx 0{,}01$ rad). ¿Cuál debe ser la distancia ρ entre

las rendijas en esta disposición para que pueda aparecer la interferencia? (fig. 24; R es la distancia hasta el Sol).

Respuesta. $\rho \leqslant 25$ μm (cálculo para la luz verde, $\lambda = 0{,}5$ μm). Este resultado nos hace dudar de que Grimaldi haya observado fenómenos de difracción en el experimento dado. Es probable que las franjas observadas tengan una procedencia subjetiva (contraste).

94. *Experimento de difracción de Young.* A diferencia del dispositivo de Grimaldi, Young no utilizó como fuente el Sol sino una rendija intensamente iluminada (véase § 16). Calcular la distancia admisible entre las rendijas B y C en el experimento de Young, considerando que la distancia desde A hasta BC es igual a 1 m y el orificio A constituye la imagen del Sol y además los rayos solares son concentrados por la lente con una distancia focal de 10 mm (fig. 25), es decir A tiene dimensiones de 0,1 mm.

95. ¿Cuál será la diferencia de recorrido entre los rayos correspondientes procedentes de dos rendijas adyacentes que dan mínimos adicionales en el caso de tres rendijas, de cuatro rendijas? ¿Qué aspecto tendrá el diagrama de amplitudes para estos casos?

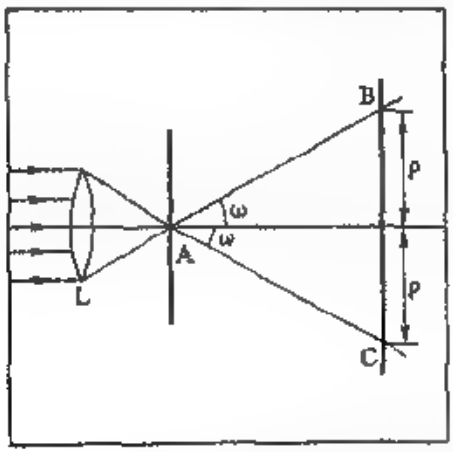


Fig. 25

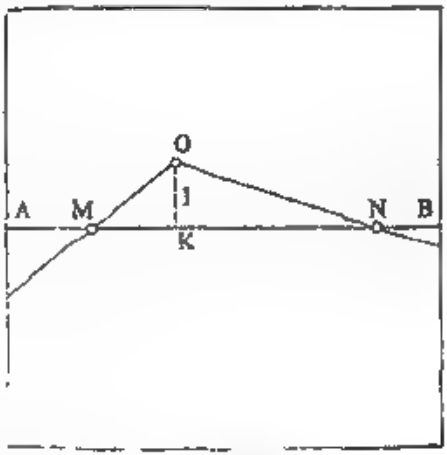


Fig. 26

Respuesta: Para tres rendijas $\lambda/3$ y $2\lambda/3$; $4\lambda/3$ y $5\lambda/3$, etc.; triángulos; para cuatro rendijas: $\lambda/4$, $2\lambda/4$ y $3\lambda/4$; $5\lambda/4$, $6\lambda/4$ y $7\lambda/4$, etc.; cuadrados.

96. Determinar la posición de los máximos adicionales de la red de difracción (período d, número de trazos N).

Respuesta: $d \operatorname{sen} \varphi = (m + 1/2)\,\lambda/N$.

97. Deducir la fórmula

$$\frac{n_1}{a_1} - \frac{n_2}{a_2} = \frac{n_1 - n_2}{R}$$

para el caso de refracción en una superficie convexa.

Examinar el caso de refracción en una superficie cóncava, cuando la imagen se obtiene virtual (realizar la construcción y deducir la fórmula).

98. Obtener de la fórmula

$$\frac{n_1}{a_1} - \frac{n_2}{a_2} = \frac{n_1 - n_1}{R}$$

la fórmula para los espejos esféricos convexos y cóncavos.

99. ¿Dónde verá el ojo que se encuentra en el aire la moneda dispuesta verticalmente bajo él sumergida en el agua a una profundidad de 1 m?
Indicación. Aplicar la fórmula de refracción en el límite de dos medios.
Respuesta: A la profundidad de 3/4 m.

100. Encontrar los planos principales para la superficie esférica.
Respuesta: De las condiciones (véase (74.1))

$$V=\frac{n_1a_2}{n_2a_1}=1 \quad \text{y} \quad \frac{n_1}{a_1}-\frac{n_2}{a_2}=\frac{n_1-n_2}{R}$$

hallaremos $a_1=a_2=0$.

101. Analizar la fórmula de la lente delgada

$$\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=(N-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

para el caso de superficies convexas y cóncavas de la lente; de una lente de aire (burbuja) dentro del agua; de una lente de vidrio en el aire, etc., indicando en qué casos la lente es convergente y en cuáles divergente.

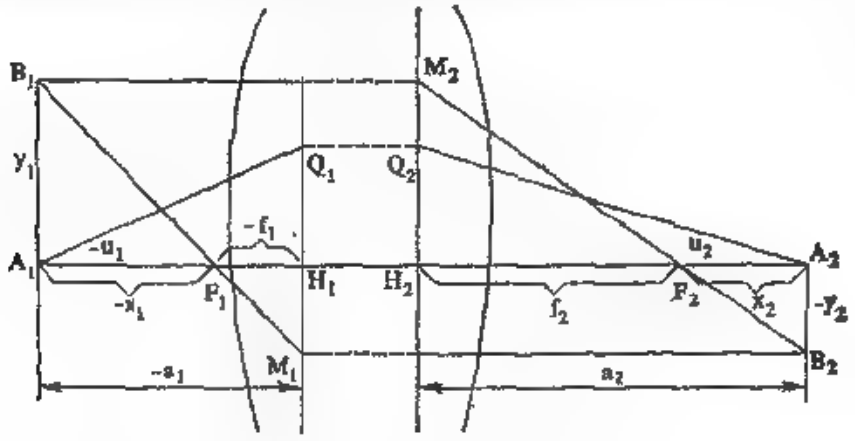


Fig. 27

102. Investigar la fórmula de la lente delgada

$$\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=\frac{1}{f},$$

aclarando 1) la disposición mutua del objeto y de la imagen, 2) V, es decir el signo y la magnitud del aumento lateral (para $V=1$, $a_1=a_2=0$, es decir los planos principales de la lente delgada se juntan en un plano, que pasa a través de la lente).

103. Designando la distancia desde la fuente hasta el foco anterior mediante x_1 y la distancia desde la imagen hasta el foco posterior mediante x_2, deducir la fórmula de la lente delgada en la forma dada por Newton: $x_1x_2=-f^2$.

104. Doblamos un alambre bajo un ángulo $\pi-\varphi$. Dispongamos el punto O de flexura a la distancia $OK=1$ de la línea AB (fig 26). Mostrar que los puntos de intersección de los extremos del alambre con AB son puntos conjugados de la lente con distancia focal $f=1/\varphi$. Si el alambre gira alrededor del punto O, entonces los movimientos de M y N representarán los movimientos de la fuente

y de la imagen con respecto a la lente dispuesta en OK. (El modelo es válido para aquellos ángulos φ, para los cuales $MO \approx MK$, o sea que MO puede representar un rayo paraxial).

105. Mostrar que para la lente, en ambos lados de la cual los medios son diferentes ($n_1 \neq n_2$), tenemos $f_1/f_2 = -n_1/n_2$.

106. Deducir la relación que define los puntos conjugados del sistema óptico (fig. 27), y su aumento lateral:

$$x_1x_2 = f_1f_2; \quad f_1/a_1 + f_2/a_2 = 1; \quad f_1/f_2 = -n_1/n_2; \quad V = -x_2/f_2 = -f_1/x_1.$$

Introduzcamos las siguientes designaciones:

$$A_1F_1 = -x_1; \quad A_1B_1 = y_1; \quad F_1H_1 = -f_1; \quad A_1H_1 = -a_1; \quad \angle H_1A_1Q_1 = -u_1,$$
$$F_2A_2 = x_2; \quad A_2B_2 = -y_2; \quad H_2F_2 = +f_2; \quad H_2A_2 = +a_2; \quad \angle H_2A_2Q_2 = +u_2$$

Deducciones: 1) De la semejanza de los triángulos $F_1A_1B_1$ y $F_1H_1M_1$ y de los triángulos $F_2H_2M_2$ y $F_2A_2B_2$ tenemos $-V = -y_2/y_1 = x_2/f_2 = f_1/x_1$; de aquí $x_1x_2 = f_1f_2$ ó $f_1/a_1 + f_2/a_2 = 1$, ya que $x_1 = a_1 - f_1$ y $x_2 = a_2 - f_2$.

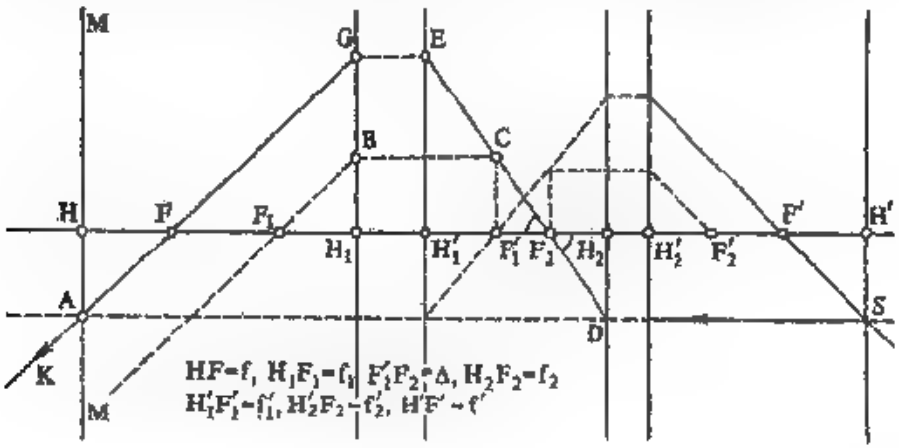


Fig. 28

2) De los triángulos $Q_1H_1A_1$ y $Q_2H_2A_2$ obtendremos $a_1u_1 = a_2u_2$ (para los haces paraxiales); luego, considerando las relaciones $(1 - V) = a_2/f_2$ y $(1 - 1/V) = a_1/f_1$, hallamos $f_1y_1u_1 = -f_2y_2u_2$. Después de utilizar la relación de Lagrange $n_1u_1y_1 = n_2u_2y_2$ (véase § 74), hallamos $-f_1/f_2 = n_1/n_2$, es decir la razón entre las distancias focales es igual a la razón entre los correspondientes índices de refracción de los medios extremos pero tomada con signo contrario.

107. Dos lentes gruesas (f_1 y f_2) están dispuestas de tal manera que sus ejes coinciden y la distancia entre los focos es igual a Δ. Determinar la distancia focal f del sistema complejo obtenido (fig. 28).

Respuesta: $f = f_1f_2/\Delta$.

Indicación. El rayo SD paralelo al eje del sistema sale de éste según GF. De este modo, el punto F es el foco anterior del sistema; el plano MM que interseca el rayo GF a la altura del rayo SD es el plano principal anterior y H es el punto principal. Para construir el rayo GF empleemos las propiedades de los puntos principales de los sistemas componentes (F_1, H_1, H'_1, F'_1, H_2, F'_2, H'_2, F'_2); en particular, los rayos del punto C que se encuentra en el plano focal del primer sistema, deben salir de este sistema paralelamente entre sí, o sea $BF_1 \parallel GFA$.

Así pues, la distancia focal del sistema $f = HF$. Del dibujo hallaremos:

$$f = AH\frac{f_1}{BH_1} = AH\frac{f_1}{CF_1'} = \frac{AH}{DH_2}\frac{f_1f_2}{\Delta} = \frac{f_1f_2}{\Delta}.$$

De manera análoga para la segunda distancia focal hallaremos:

$$f' = -\frac{f_1'f_2'}{\Delta} = -\frac{f_1f_2}{\Delta} = -f.$$

Para $\Delta = 0$ obtendremos $f = \infty$, o sea, un sistema telescópico: los rayos paralelos, al pasar a través de este sistema, salen de nuevo como un haz paralelo.

Cuando coinciden los planos principales H_1' y H_2, o sea para $f_1' + \Delta - f_2 = 0$ y bajo la condición de que $f_1' = -f_2$ (véase ejercicio 105) tenemos

$$1/f' = 1/f_1' + 1/f_2',$$

es decir, la potencia óptica de las lentes en contacto es igual a la suma de las potencias ópticas de las componentes.

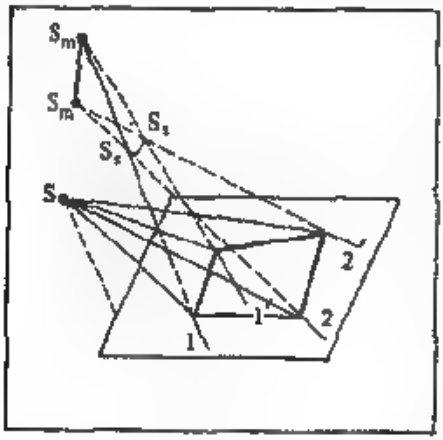


Fig. 29

El foco anterior F del sistema complejo es conjugado, respecto a la primera lente, del punto F_2 (rayo F_2EGF). La distancia x_F desde F_1 hasta F se halla con ayuda de la fórmula (79.1)

$$x_F = f_1f_1'/\Delta$$

De manera análoga para la distancia $x_{F'}'$ desde F_2' hasta F' tenemos

$$x_{F'}' = -f_2f_2'/\Delta.$$

Las posiciones de los planos principales H y H' respecto a los focos F_1 y F_2' se definen respectivamente por las evidentes igualdades: $x_H = x_F - f$; $x_{H'}' = x_{F'}' - f'$

La lente es el ejemplo más simple de un sistema complejo. Si las dos superficies refringentes se consideran como las componentes del sistema y si se utiliza la fórmula (72.1), es fácil hallar

$$f' = \frac{f_1f_2}{\Delta} = \frac{1}{(n-1)(1/R_1 - 1/R_2) + [(n-1)^2/n]\,d/R_1R_2},$$

donde d es el espesor de la lente en el eje. A diferencia de la fórmula (77.1) para la lente delgada, en el denominador ha aparecido un término, que describe la influencia del espesor de la lente. Escogiendo d de tal manera que $f' = \infty$, obtenemos de la lente gruesa un anteojo (véase § 93).

108. La refracción en un límite plano provoca el astigmatismo del haz.

a) Mostrar que los rayos que salen desde el punto (S), después de la refracción en el límite plano no tienen ningún punto de intersección (fig. 29)

Indicación. Hallar la distancia del punto de intersección de dos rayos simétricos hasta el límite, y cerciorarse de que ella depende del ángulo de incidencia.

b) Cerciorarse de la aparición de astigmatismo en la refracción en el límite plano, examinando el haz incidente en forma *oblicua* sobre el plano. Poner atención en que el ángulo de divergencia entre los rayos, que se encuentran

en el plano definido por el eje del haz y por la normal a la superficie (sección meridional), varía más fuertemente que para los rayos, que se encuentran en el plano perpendicular (sección sagital).

109. Utilizando el hecho de que para la superficie esférica hay un par de puntos aplanáticos, construir una lente aplanática e indicar los puntos aplanáticos para ella.

Respuesta: Si P y Q son los puntos aplanáticos de la superficie esférica KL, entonces ellos también serán puntos aplanáticos para la lente limitada por la superficie KL y la esfera MN, que tiene su centro en el punto P.

110. El ancho D' del haz que sale del anteojo (sistema telescópico) es más angosto que del que ingresa al objetivo D (fig. 30). Mostrar que el aumento del anteojo es igual a

$$\mathcal{M} = \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\text{diámetro del haz antes de anteojo}}{\text{diámetro del haz después del anteojo}} = \frac{D}{D'} = \frac{\text{diámetro de la pupila de entrada}}{\text{diámetro de la pupila de salida}}.$$

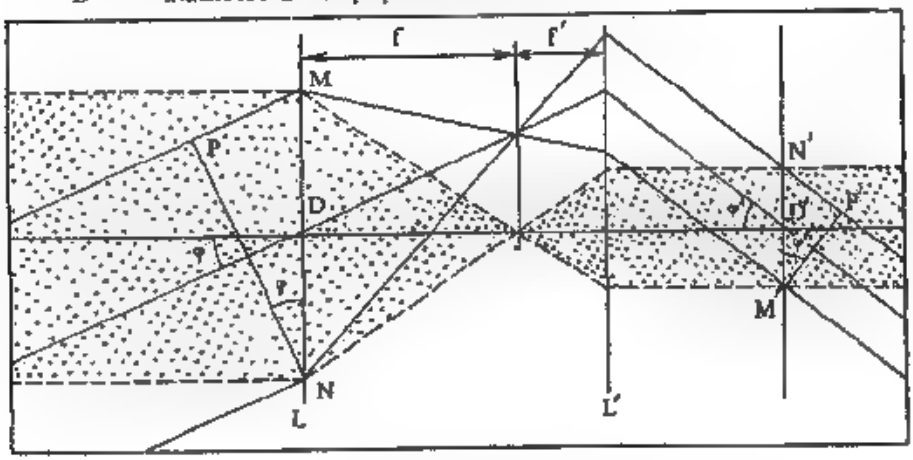


Fig. 30

Indicación. Utilizar la fig. 30 y examinar la condición para que los rayos procedentes del centro y del borde de un objeto infinitamente alejado no den diferencia de recorrido, es decir, $(PM) = (N'P')$. Pero $PM = D$ sen φ; $N'P' = D'$ sen φ'. Debido a la pequeñez de φ y φ' hallaremos:

$$\varphi' D' = \varphi D.$$

111. Si un haz paralelo de rayos incide sobre un prisma que no está colocado en la posición de mínima desviación, entonces al salir éste tendrá otro ancho. De este modo, el prisma puede ser un sistema telescópico que da aumento o disminución de la imagen. Averiguar cuándo tiene lugar el primer caso y cuándo el segundo.

112. *Refracción en el prisma.* En las designaciones acordadas en el § 86, para la desviación del rayo en el caso de refracción en el prisma tenemos $D = (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) - \varepsilon$.

Hallar la condición de mínima desviación $\frac{\delta D}{\delta \alpha_1} = 0$, es decir, $|\alpha_1| = |\alpha_2|$.

los rayos de entrada y de salida son simétricos y el rayo en el prisma es paralelo a la base.

Mostrar que en el caso de recorrido simétrico de los rayos $n = \dfrac{\operatorname{sen} {}^1/_2 (D+\varepsilon)}{\operatorname{sen} {}^1/_2 \varepsilon}$.

Si el ángulo refractante ε es pequeño y los rayos inciden sobre el prisma bajo un pequeño ángulo (α es pequeño) entonces $D = \varepsilon (n-1)$.

Indicación. Para pequeños α_1 y ε el ángulo α_2 también es pequeño. Por lo tanto: $\alpha_1 = n\beta_1$, $\alpha_2 = n\beta_2$. De aquí $D = (n-1)(\beta_1 + \beta_2) = \varepsilon (n-1)$.

113. Mostrar que en el prisma de Amici (fig. 31) el rayo no se desviará, si se observan las siguientes condiciones:

$\alpha_1 = 90°$; $\operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha_2 = \sqrt{(n_1^2-1)/(n_1^2-n_2^2)}$.

Indicación. El rayo que pasa sin desviación entre y sale del prisma en forma paralela a la base y va simétricamente respecto al prisma interno.

El prisma triple de Amici está fabricado de flint (C-18) y de crown (C-20) (véase la tabla en el ejercicio 114), de tal modo que el rayo F ($\lambda = 4861$ Å) no se desvía. Calcular este prisma y encontrar el ángulo de divergencia (la dispersión) entre los rayos C ($\lambda = 6563$ Å) y G ($\lambda = 4341$ Å)

114. *Aberración cromática y acromatismo.* a) La aberración cromática de una lente puede definirse como variación de la distancia focal para distintas longitudes de onda que se caracterizan por la diferencia en el índice de refracción: $\delta \left(\frac{1}{f}\right) = \frac{\delta n}{n-1} \frac{1}{f}$. Si $\delta \left(\frac{1}{f}\right) = 0$, entonces la lente es acromática.

Mostrar que la condición para la acromatización de una lente compleja compuesta de dos lentes pegadas, es

$1/\nu_1 f_1 + 1/\nu_2 f_2 = 0$,

donde $\nu_1 = (n_1 - 1)/\delta n_1$, $\nu_2 = (n_2 - 1)/\delta n_2$ (para los cálculos prácticos se puede tomar n_1 y n_2 para la línea D del sodio o sea considerar que ν_1 y ν_2 son los coeficientes de dispersión de nuestros vidrios).

Indicación. Utilizar los resultados del ejercicio 107.

Tabla 1. *Características de los vidrios ópticos*

Denominación	Designación	n_D	ν	$n_F - n_C$	$n_F - n_D$	$n_{G'} - n_F$
Crown borosilícico	C-20	1,5100	63,4	0,00805	0,00565	0,00451
Crown silícico	C-7	1,5147	60,6	0,00849	0,00599	0,00481
Crown	C-12	1,5161	58,9	0,00879	0,00619	0,00499
Crown—flint	C-49	1,5262	51,0	0,01032	0,00730	0,00598
Crown ligero de baritina	C-21	1,5302	60,5	0,00877	0,00617	0,00495
Crown de baritina	C-17	1,5399	59,7	0,00905	0,00637	0,00515
Crown de baritina	C-6	1,5726	57,6	0,00995	0,00702	0,00569
Flint ligero	C-16	1,5783	41,7	0,01367	0,00986	0,00829
Crown pesado	C-24	1,6126	58,6	0,01046	0,00737	0,00593
Flint	C-8	1,6129	36,9	0,00860	0,01184	0,01008
Flint	C-3	1,6242	35,9	0,01738	0,01242	0,01060
Flint pesado	C-18	1,7550	27,5	0,02743	0,01975	0,01730

Nota: $\lambda_D = 5893$ Å, $\lambda_C = 6563$ Å, $\lambda_F = 4861$ Å, $\lambda_{G'} = 4341$ Å.

b) Se tiene una lente biconvexa simétrica de crown borosilícico C-20 con una distancia focal (para la línea D) $f_1 = 100$ mm. Calcular la lente de flint (o sea escoger la variedad de vidrio e indicar los radios de las superficies), que puede ser pegada a la lente dada para obtener una lente acromática convergente con una distancia focal próxima a 300 mm (hacer los cálculos para $f = 300$ mm, escoger según la tabla adjunta la variedad de vidrio más conveniente y por último calcular qué f se obtiene).

Respuesta. $r_1 = -102$ mm, $r_2 = 635$ mm, $f = 292$ mm. Vidrio: C-20 y C-16.

115. *Aumento de la lupa.* Aplicando la fórmula de la lente simple encontraremos: $\operatorname{tg}\varphi' = \frac{l'}{-a'+d} = \frac{l(f-a')}{f(d-a')}$, donde φ' es el ángulo de visión de la imagen; $\operatorname{tg}\varphi = l/D$, donde φ es el ángulo de visión del objeto colocado a la distancia D del ojo descubierto (fig. 32).

El aumento $\mathscr{M}$ es igual a

$$\mathscr{M} = \frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{D(f-a')}{f(d-a')};$$

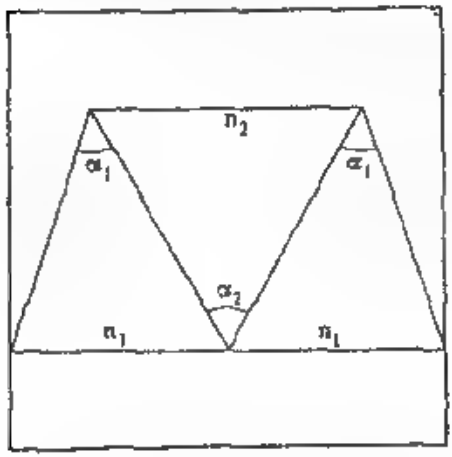


Fig. 31

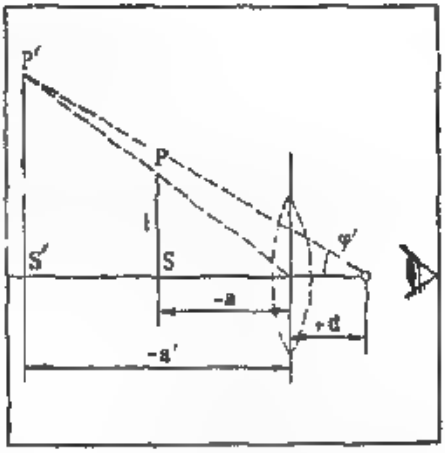


Fig. 32

para $a' = -\infty$ se tiene $\mathscr{M} = D/f$, para $d - a' = D$ se obtiene $\mathscr{M} = D/f + 1 - d/f$, es decir el aumento depende un tanto de la posición del ojo (d). Cuando el ojo está situado cerca del foco principal ($d = f$), lo que ocurre en la práctica, entonces $\mathscr{M} = D/f$.

116. Calcular la dispersión angular y lineal del espectrógrafo dotado de tres prismas de 60° hechos de vidrio C-3 y que posee la lente de cámara con una distancia focal $f = 250$ mm. Los prismas han sido colocados en el mínimo de desviación para el rayo F. Hacer el cálculo para varias longitudes de onda. Construir el gráfico de cálculo trazando en el eje de las abscisas la distancia entre las líneas, y en el eje de las ordenadas, la longitud de onda.

117. El diámetro del objetivo colimador $d = 50$ mm. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del prisma de 60° hecho de C-18 y el diámetro del objetivo de cámara para la completa utilización del flujo luminoso, que ingresa al aparato, si el prisma está colocado en el mínimo de desviación para el rayo F?

118. Deducir la expresión para el poder separador del objetivo del anteojo por el método de Abbe.

Indicación. Sea $a = a_1$, $a = 1$. La condición de separación es $d = \lambda_0/n$ ó $\varphi = \lambda_0/R$.

119. Mostrar que en el plano conjugado del objeto el cuadro de difracción coincide con el de Fraunhofer.

Indicación. Representar el sistema óptico ideal como dos subsistemas, entre los cuales desde cada punto del objeto va un haz paralelo de rayos (fig. 33). Disponiendo el diafragma de apertura en los haces paralelos, obtenemos el esquema de observación de la difracción de Fraunhofer.

120. Mostrar que el cuadro de difracción en el caso de obtención de la imagen de dos fuentes puntuales coherentes no tiene máximo en el centro, si las fuentes están dispuestas a la distancia definida por la fórmula (V° 1).

121. ¿Qué aspecto tendrá la imagen de una malla menuda (redes cruzadas) si en el plano focal del objetivo del microscopio se coloca un diafragma en forma de rendija que pasa en forma a) paralela a los trazos verticales de la malla, b) paralela a los trazos horizontales de la malla y c) oblicua a unos y otros trazos?

122. ¿Cuál será el poder separador del ojo humano cuando la dimensión de la pupila es $R = 2$ mm (para los rayos verdes, $\lambda = 5500$ Å)? (El índice de refracción del medio del ojo $n = 1{,}4$.) Determinar el ángulo límite y compararlo con el límite de separación condicionado por la estructura de la retina del ojo.

123. Hallar el poder separador del objetivo de 1 m.

124. ¿Por qué razón el empleo del ocular del anteojo no puede aumentar su poder separador, a pesar del aumento considerable dado por el ocular?

125. ¿Cómo influye el aumento del diámetro del objetivo sobre la dimensión del pequeño círculo de difracción y del de dispersión que es originado por la aberración esférica? (En los buenos objetivos modernos el error del orificio es corregido tan bien que la calidad de la imagen se define por los fenómenos de difracción).

126. ¿Cuáles deben ser los prismas del espectrógrafo capaz de descubrir el efecto Zeeman en el hidrógeno en un campo magnético de 10 000 Oe?

127. ¿Cuál deberá ser el prisma de crown C-12 (flint C-16) para separar el dobleto amarillo del sodio (5890 Å y 5896 Å)?

128. Examinar el ejercicio anterior para las dos líneas amarillas próximas del mercurio 5770 Å y 5791 Å.

129. Deducir la condición de coherencia de la iluminación creada por una fuente extendida en los diferentes puntos de la estructura con período d (la dimensión angular de la fuente, determinada desde el lugar donde está situado el objeto, es igual a φ).

Respuesta. Si $\varphi \ll \lambda/d$, la iluminación es coherente.

Indicación. La iluminación es coherente si la *distinción* en el desfasaje de las ondas luminosas que se propagan desde *diferentes* puntos de la fuente y que llegan los elementos de la estructura, es pequeña en comparación con 2π. La iluminación de la estructura, creada por los distintos sectores de la fuente extendida, puede ser considerada como la iluminación creada por un sistema de ondas planas*), que inciden sobre la estructura por *diferentes direcciones* en dependencia del punto de la fuente, desde el cual ellas parten. Toda la diversidad de las direcciones se define por las dimensiones angulares φ de la fuente. Cada onda plana crea en los límites del elemento de la estructura oscilaciones que se diferencian en fase $2\pi\, d\varphi_i/\lambda$, donde φ_i es el ángulo que define la dirección de la onda plana correspondiente. Las diferencias en el recorrido originadas por las dimensiones de la fuente, difieren en la magnitud $\sum d\varphi_i = d\sum \varphi_i = d\varphi$, y en los desfasajes, en la magnitud $(2\pi/\lambda)\, d\varphi$.

*) Las ondas emitidas por los diversos puntos de la fuente y que llegan a la estructura, pueden ser consideradas planas, ya que $d \ll R$, donde R es la distancia desde la estructura hasta cualquier punto de la fuente.

130. Mostrar analíticamente que la diferencia de dos sinusoides de igual frecuencia y amplitud, pero un tanto desfasadas entre sí, constituye una sinusoide de la misma frecuencia, pero con una amplitud pequeña, esta sinusoide resultante está desfasada casi en $^1/_2\pi$ con relación a las originales.

131. Calcular el poder separador del prisma de Rutherford (fig. 34) para la línea D, o sea $\lambda = 5890$ Å.

Indicación. $A = b' \dfrac{dn'}{d\lambda} - 2b \dfrac{dn}{d\lambda}$.

132. Comparar el poder separador y la dispersión de varios prismas de un sólo material (*C*-3), dispuestos en la posición de mínima desviación (fig. 35): 1) AEB con el ángulo en E igual a 70° y ACB con el ángulo en C igual a 60°; 2) ACB y $A'CB'$ con $CA' = {}^1/_2 CA$; 3) ACB y el par de prismas MNP y $M_1N_1P_1$ con ángulos en N y N_1 iguales a 60° y $MN = {}^1/_2 AC$.

133. Determinar el máximo ángulo de refracción de los prismas triangulares hechos de *C*-3 y de *C*-18, para los cuales pueden existir mínimos de desviación.

Indicación. Poner atención en la reflexión interna total.

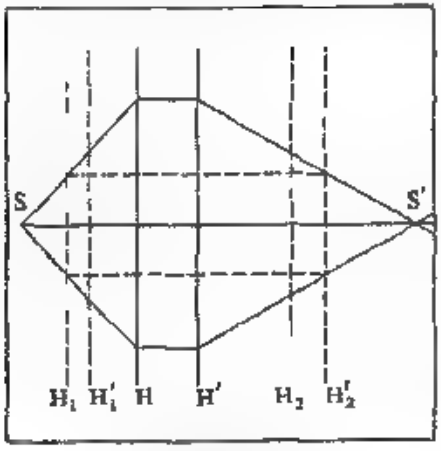


Fig. 33

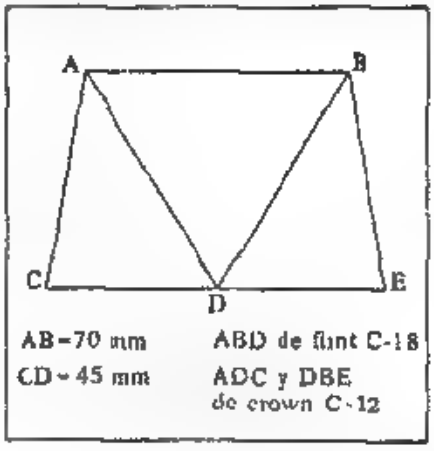


Fig. 34

134. Un proyector está dotado de un espejo (corregido completamente de la aberración esférica), que tiene la distancia focal $f = 100$ cm y el diámetro del orificio $D = 100$ cm. Como fuente de luz se utiliza el cráter de un arco eléctrico que puede ser considerado como un disco de 4 mm de diámetro, cuyo centro coincide con el foco del espejo. La luminancia del cráter es 10^8 cd/m^2, su emisión se rige por la ley de Lambert.

Determinar la intensidad luminosa esférica media de la fuente y la intensidad luminosa en el eje del proyector (el efecto de apantallamiento de los carbonos del arco puede ser despreciado).

135. Los objetivos del colimador y de la cámara del espectrógrafo tienen iguales diámetros, y las distancias focales de éstos son respectivamente iguales a f_1 y f_2. Con ayuda del condensador se logra una iluminación de la rendija, con la cual el objetivo del colimador está completamente lleno de luz. Demostrar que la luminosidad del aparato depende sólo del objetivo de la cámara.

Demostración. La luminancia de la rendija es B; el flujo en el aparato, $\Phi = \pi B \sigma \operatorname{sen}^2 u = \pi B \sigma R^2/f_1^2$; el área de la imagen de la rendija, $\sigma' = \sigma f_2^2/f_1^2$, la iluminación, $E = \pi B R^2/f_2^2$, o sea sólo depende de la luminosidad del objetivo de la cámara.

136. ¿Cuántas veces crece la iluminación, si la luz del Sol es concentrada por una lente con un orificio relativo de $d/f = 1/5$?

Respuesta. Aproximadamente 400 veces.

137. Deducir la expresión para la *iluminación* dada por cualquier sistema óptico a la distancia l, en la forma $E' = KBS/l^2$ (fórmula de Mangin), donde K es el coeficiente de transmisión del sistema óptico; S, el área de la pupila de salida del sistema; B, la luminancia de la fuente.

Indicación (fig. 36). El flujo incidente sobre la imagen es igual a $\Phi' = K\Phi = KB\sigma\pi \operatorname{sen}^2 u$; el área de la imagen, $\sigma' = \sigma \operatorname{sen}^2 u/\operatorname{sen}^2 u'$ (condición de senos). Para la iluminación tenemos

$$E' = KB\pi \operatorname{sen}^2 u',$$

donde $\operatorname{sen} u' = D/2l$, o sea

$$E' = K\frac{B}{l^2}\frac{\pi D^2}{4} = K\frac{BS}{l^2},$$

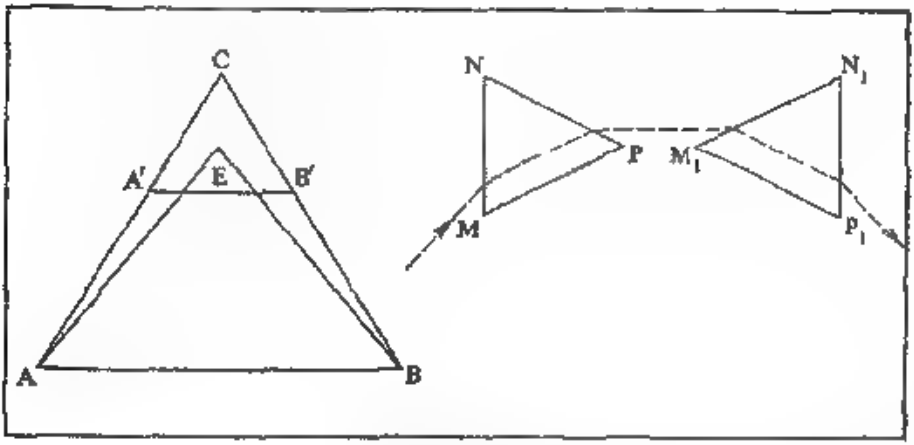


Fig. 35

donde $S = \pi D^2/4$ es el área de la pupila de salida.

138. Determinar la iluminación creada por el proyector con un espejo de diámetro $D = 2$ m, el arco del cual tiene una luminancia $B = 10^9$ cd/m^2, a la distancia $l = 1$ km en el caso de una transparencia ideal ($K = 1$). (Utilizar la fórmula de Mangin, véase ejercicio 137).

Respuesta:

$$E = \frac{\pi \cdot 10^9 \cdot 2^2}{4 \cdot 10^6} \approx 3 \cdot 10^3 \text{ lx}.$$

139. ¿Por qué la turmalina, al igual que cualquier dispositivo polarizador, no deja pasar más de la mitad de la luz natural?

140. Describir los fenómenos que se observarán al girar T_2 en la fig. 16.1. Describir los fenómenos que se observarán al girar S_2 en la fig. 16.3.

141. Mostrar que de la ley de Brewster se deduce la perpendicularidad del rayo reflejado bajo el ángulo brewsteriano y del rayo refractado.

Indicación. Utilizar la ley de Brewster y la ley de refracción.

142. Determinar el ángulo de Brewster para la reflexión en el fondo de un recipiente de vidrio, que está lleno de agua (el recipiente ha sido hecho de crown con el índice de refracción $n = 1{,}50$).

143. ¿Cómo determinar el índice de refracción de un dieléctrico no transparente (por ejemplo del esmalte)?

Indicación. Utilizar la ley de Brewster.

144. Hacer una pila de placas fotográficas, realizar con ella los experimentos simples de polarización y describirlos.

145. Tratar de determinar la polarización de los rayos del Sol reflejados en la superficie del agua. ¿A qué hora del día la polarización será máxima?

146. Describir cómo varían las intensidades I_o e I_e en el experimento descrito en la pág. 409. Indicar, en particular, las posiciones, para las cuales $I_o = 0$ ó $I_e = 0$, ó $I_o = I_e$.

147. Calcular la apertura de los prismas representados en las figs. 17.4 y 17.5 (véase § 108).

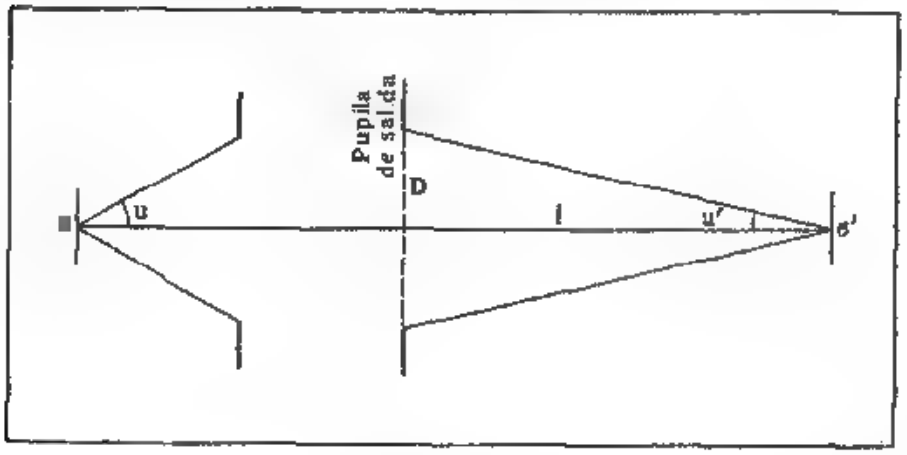


Fig. 36

148. Calcular los prismas birrefringentes de espato de Islandia (véase fig. 17.8) que dan un ángulo de 5° entre los rayos.

149. ¿Cuál será el ángulo de divergencia que da el prisma representado en la fig. 17.8, *c*, si cada una de las mitades de los prismas tiene un ángulo refringente de 30°?

150. Los parabrisas y los faros de los automóviles son hechos de polaroid. ¿Cómo deben estar dispuestos estos polaroides, para que el chofer pueda ver el camino alumbrado por la luz de sus faros y no experimente la acción cegadora de los faros de los automóviles que vienen al encuentro?

Respuesta: En las lunas y en los faros de todos los automóviles los polaroides se colocan de tal manera que el plano principal de éstos forme un ángulo de 45° con el horizonte.

151. El fotómetro de polarización más simple está construído de la siguiente manera (fig. 37). La luz a través de un pequeño orificio cuadrado (los lados del cual están orientados según los planos principales del prisma mostrado en la fig. 17.8, *c*) incide sobre el prisma y después es observado a través del nicol. Para dimensiones adecuadas del orificio y del prisma polarizador a través del

nicol se verán dos cuadrados contiguos. Al girar el nicol la relación de las iluminaciones de estos cuadrados varía.

a) ¿Para qué orientación de *N* respecto a *W* ambos cuadrados estarán igualmente iluminados, si la luz incidente es natural, si la luz incidente está polarizada a lo largo de uno de los lados del orificio cuadrado, si está polarizada a lo largo de la diagonal del orificio?

b) La luz parcialmente polarizada con una dirección de polarización a lo largo de uno de los planos principales del prisma *W*, incide sobre el aparato. ¿Cuál será el grado (Δ) de polarización, si la igualdad de los campos responde a un giro del nicol en un ángulo α respecto al plano señalado del prisma *W*?

Indicación. El grado de polarización se define como la razón de la diferencia en las intensidades (I' e I'') de los haces polarizados en direcciones mutuamente perpendiculares, entre la intensidad total (I) esto es $\Delta = (I' - I'')/I$.

Respuesta: $\Delta = -\cos 2\alpha$

Determinar α, si el grado de polarización es igual a 20%.

152. En la tabla 2 se citan los índices de refracción para varias longitudes de onda en el espato de Islandia y en el cuarzo.

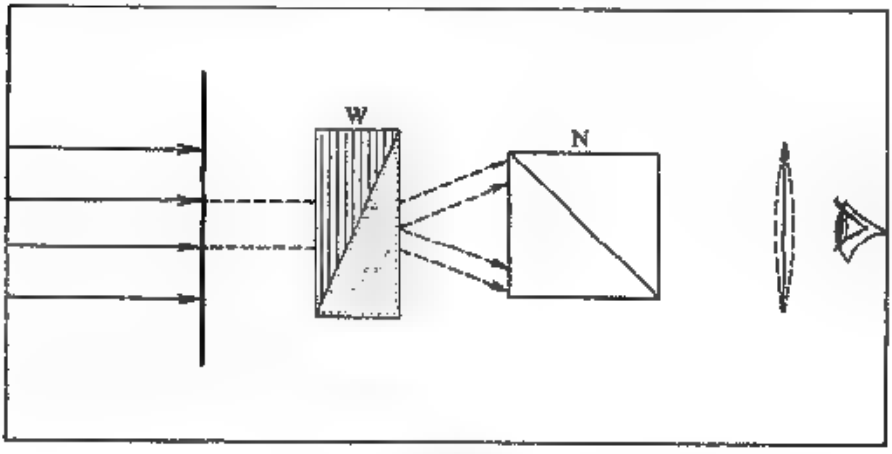


Fig. 87

Calcular qué espesor deberán tener las láminas de cuarzo y de espato de Islandia para que con las diferentes longitudes de onda ellas sirvan de láminas de cuarto de onda.

153. Considerando la dificultad en la confección de láminas tan delgadas (véase ejercicio 152), es más racional emplear láminas que den una diferencia de recorrido igual a $(m + 1/4)\,\lambda$. Calcular tal lámina de cuarzo para $\lambda = 589{,}3$ nm (luz amarilla) para que su espesor sea próximo a 1 mm. ¿Cómo funcionará esta lámina en los rayos violetas ($\lambda = 400{,}0$ nm)?

154. Explicar por qué no es ventajoso el empleo de láminas cristalinas gruesas de $1/4\lambda$ (poner atención en la dispersión de la diferencia de los índices de refracción; o sea en la dependencia de la diferencia de los índices de refracción en función de la longitud de onda).

155. Examinar detalladamente el problema acerca de la obtención de polarización circular *dextrógira* o *levógira*. ¿De qué tipo se obtendrá la polarización, si el espesor de la lámina cristalina es tal que ella crea una diferencia de recorrido igual a $3/4\lambda$?

Tabla 2. Indices de refracción en el espato de Islandia y en el vidrio para algunas longitudes de onda

Longitud de onda λ, nm	Espato de Islandia		Cuarzo	
	n_e	n_o	n_e	n_o
687 (rojo)	1,484	1,653	1 550	1,541
656 (anaranjado)	1,485	1,655	1 551	1,542
589 (amarillo)	1,486	1,658	1 553	1,544
527 (verde)	1,489	1,664	1 556	1,547
486 (azul)	1,491	1,668	1 559	1,550
431 (azul violeta)	1,495	1,676	1,564	1,554
400 (violeta)	1,498	1,683	1,568	1,558

156. Examinar detalladamente ¿qué se obtiene, si la luz *natural* incide sobre una lámina cristalina, en particular sobre la lámina de 1/4 de onda, y sobre la lámina de 1/2 de onda?

157. Si en la realización del experimento de Young la luz que pasa a través de dos rendijas se polariza en planos mutuamente perpendiculares (por ejemplo, con ayuda de polaroides dispuestos de manera correspondiente), entonces no se observará la interferencia. Este experimento conocido de Arago—Fresnel fue modificado por los autores mencionados, disponiendo *después de ambas rendijas* una lámina cristalina, las direcciones principales de la cual forman un ángulo de 45° con cada una de las direcciones de polarización de ambos haces interferentes. Como resultado se formaron cuatro ondas de igual amplitud, en las cuales los planos de oscilación coincidían de dos en dos (dos ondas con oscilaciones en el primer plano principal de la lámina cristalina y dos ondas con oscilaciones en el segundo plano focal). Sin embargo, no se observó la interferencia. El cuadro de interferencia tampoco se observa al ser examinado éste a través de un nicol de cualquier orientación. Esto demuestra que la cuestión no se reduce a la formación de dos cuadros de interferencia con máximos desplazados en media franja y polarizados en direcciones mutuamente perpendiculares.

Explicar lo observado por Arago—Fresnel. ¿Qué es necesario para que se observe la interferencia?

Respuesta. La interferencia se observa si la luz que incide sobre la rendija se hace preliminarmente polarizada en el plano.

158. Fresnel descubrió que la lámina débilmente refringente de cal sulfatada no manifiesta colores de interferencia, a pesar de que de ella salen dos ondas con una diferencia de recorrido próxima a 2—3 longitudes de onda. Explicar este fenómeno.

Nota. La observación de Fresnel sirvió de punto de partida para la realización de los famosos experimentos de Arago y Fresnel (véase § 109).

159. Representar esquemáticamente en un dibujo el carácter de la polarización de la luz que sale del compensador de Babinet, con ayuda de flechas, círculos y elipses, en los cuales esté representada la dirección de las oscilaciones.

Explicar cuál será la diferencia para la luz roja y para la violeta.

160. ¿Qué cuadro se observará al pasar la luz *blanca* elípticamente polarizada a través del compensador de Babinet y del nicol?

161. Utilizando la tabla dada en el ejercicio 152, describir el cuadro que se observa al pasar la luz polarizada en el plano a través de una cuña de cuarzo con un ángulo en el vértice $\alpha = 5'$.

La dirección del eje coincide con la arista AA dispuesta verticalmente. El plano de polarización de la luz incidente forma un ángulo de 45° con la dirección del eje del cuarzo. La luz es monocromática, $\lambda = 589{,}0$ nm.

Dar el dibujo esquemático de las direcciones de las oscilaciones en el haz que sale de la cuña, y calcular a qué distancia se encontrará el lugar de polarización circular derecha

162. Describir la diferencia en el cuadro de interferencia observado en el caso cuando se coloca entre los dos polarizadores cruzados una lámina de mica y un montón de finas hojas de mica montadas al azar y que tienen en su conjunto el mismo espesor que la lámina.

Respuesta. En el segundo caso («montón de láminas») no hay direcciones principales

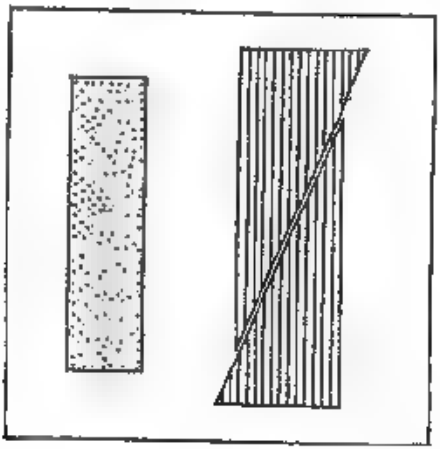


Fig. 38

163. Describir el cuadro que debe observarse en los rayos paralelos al colocar entre los nicoles cruzados una lámina cortada de un cristal uniáxico en forma paralela al eje óptico. ¿Qué pasará si la lámina gira y si gira el analizador?

164. El compensador de Babinet—Soleil se construye como una lámina planoparalela y dos pequeñas cuñas cortadas del cuarzo en forma paralela al eje. De este modo, las cuñas forman en conjunto una lámina planoparalela de espesor variable, además en la lámina constante y en las variables los ejes ópticos están orientados perpendicularmente entre sí (fig. 38).

Examinar el funcionamiento de este compensador. ¿Qué aspecto tendrá el campo, si se dispone el compensador de Babinet—Soleil según el esquema de la fig. 18.5)?

Respuesta. El grado de elipticidad será igual en todo el campo.

165. ¿Es posible obtener en la luz blanca un cuadro de interferencia según el esquema de la fig. 26.22*) para cualquier espesor del espato de Islandia? Calcular la diferencia de recorrido para la lámina de espato de Islandia cortada en forma paralela al eje, para un espesor de 5 mm. ¿Para qué espesores es posible

*) Véase en el segundo tomo.

la observación de interferencia con la línea del mercurio, para la cual $\lambda/\Delta\lambda = 400\,000$?

166. El monocromador de polarización de Wood, basado en el fenómeno de dispersión de los índices de refracción, puede ser realizado según el esquema de la fig. 39. El polarizador N_1 ha girado un ángulo de 45° respecto a los planos principales del cristal K. Para un espesor adecuado del cristal las dos líneas próximas saldrán de él linealmente polarizadas y además en planos mutuamente perpendiculares. Con una disposición correspondiente de N_2 una de ellas será retenida casi por completo y la otra pasará (monocromador). (En realidad el monocromador tiene una estructura más compleja).

a) La luz blanca es enviada a través del monocromador de Wood hacia la rendija del espectrógrafo. ¿De qué tipo será el espectro? ¿Qué variaciones ocurrirán en el espectro si N_2 gira 90°?

Respuesta: El espectro consta de pequeñas franjas alternadas oscuras y brillantes; cuando N_2 gira las franjas oscuras y brillantes cambian de lugar.

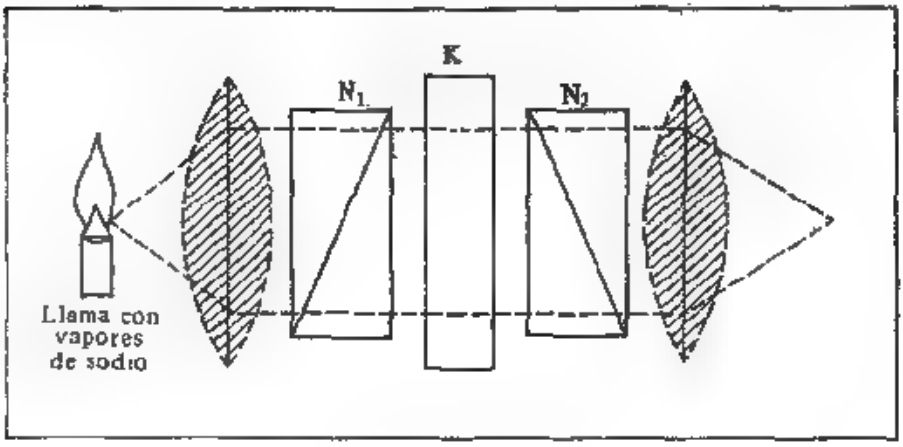


Fig. 39

b) Calcular el espesor del cristal K de cuarzo o de espato de Islandia, que permite separar las dos líneas amarillas próximas del sodio $D_1 = 589{,}6$ nm y $D_2 = 589{,}0$ nm; los índices de refracción se citan en la tabla 3.

Tabla 3. Indices de refracción del espato de Islandia y del cuarzo

Línea	Espato de Islandia		Cuarzo	
	n_e	n_0	n_e	n_0
D_1	1,48654	1,65846	1,55338	1,54423
D_2	1,48652	1,65843	1,55335	1,54420

167. ¿Cuál será la sucesión de los anillos de colores cuando se observa la interferencia de rayos polarizados en los haces divergentes (véase fig. 26.23)? ¿Dónde están dispuestos más estrechamente los anillos, en el centro del cuadro o cerca de la periferia?

168. En el experimento anterior entre N_1 y N_2 se coloca una lámina de espato de Islandia con un espesor $d = 1$ mm. Determinar los radios del primero, tercero y décimo anillos brillantes para la luz roja ($\lambda = 687{,}0$ nm) y para la violeta ($\lambda = 400{,}0$ nm).

¿Qué se observará en el lugar de la lámina por donde pasan los rayos que intersecan el eje bajo un ángulo de 30°, de 45°, para el caso de luz amarilla monocromática ($\lambda = 589{,}0$ nm) y para el caso de luz blanca?

A nuestros lectores:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y de ciencia ficción.

Dirijan sus opiniones a: Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú I—110, GSP, URSS.

MIR PUBLICARÁ:

B. Yavorski, A. Detlaf

MANUAL DE FÍSICA

En este manual se estudian diversos fenómenos y conceptos físicos, se formulan brevemente las leyes y regularidades de la física clásica y moderna, se incluyen las aclaraciones necesarias y, en muchos casos, las conclusiones.

El libro cuenta con un apéndice donde se informa sobre las unidades de las magnitudes físicas en el Sistema Internacional (SI) y en otros sistemas, así como acerca de la precisión e importancia de las constantes físicas universales.

El nivel de conocimientos necesarios para la comprensión de este manual corresponde al de los estudiantes de segundo curso de los institutos politécnicos superiores.

La obra está destinada a los estudiantes de los institutos politécnicos, y también será de gran utilidad a ingenieros, a los postgraduados no especializados en el campo de la física, así como a los docentes de las escuelas de enseñanza media y universidades.